

Задачи к вебинару 02.06.2026

Задание 1

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что $AD : BC = 2 : 1$ и $AB = BC$.

- Докажите, что прямые DB_1 и $A_1 B_1$ перпендикулярны.
- Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1 , если боковая грань $AA_1 D_1 D$ — квадрат.

Задание 2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 8 на ребре AA_1 взята точка K такая, что $A_1 K = 1$. Через точки K и B_1 проведена плоскость α , параллельная прямой AC_1 .

- Докажите, что $A_1 P : PD_1 = 1 : 6$, где P — точка пересечения плоскости α и ребра $A_1 D_1$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1 .

Задание 3

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, а боковое ребро SA равно 17. На ребрах AB и SB отмечены точки K и L соответственно, причем $AK = SL = 7$. Плоскость α проходит через точки K , L и C .

- Докажите, что плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины пирамиды S до плоскости α .

Задание 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$, а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани $ABB_1 A_1$.

- Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью AMB , лежит на отрезке OC_1 .
- Найдите угол между прямой OC_1 , и плоскостью AMB .

Задание 5

Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$.

- Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AC = 6$.

Задание 6

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, сторона AB основания которой равна 32, а боковое ребро BB_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1 L = 28$. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

- Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой MB .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка M , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .



Задание 7

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 , точки M , N и K — середины BC , CC_1 и A_1C_1 соответственно.

- Докажите, что точки Q , M , N и K лежат в одной плоскости.
- Найдите площадь сечения QMN .

Задание 8

Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Ребро SA является высотой пирамиды. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF : FB = AE : EC = 1 : 5$. Плоскость α проходит через точки E и F перпендикулярно прямой AC и пересекает рёбра AB и CS в точках H и M соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.
- Найдите объём многогранника $BCMEHF$, если объём пирамиды $SABC$ равен 216.

ОТВЕТЫ

1. $\arccos \frac{\sqrt{35}}{14};$

2. $\operatorname{arctg} \sqrt{113};$

3. $\frac{42}{13};$

4. $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}};$

5. $\frac{3\sqrt{66}}{5};$

6. 232;

7. $18\sqrt{2};$

8. 200.