Вся теория для задания №1 ЕГЭ по профильной математике

Влад Вуль

Игорь Уколов

В данном файле представлена **вся теория, необходимая для задания №1** из ЕГЭ по профильной математике.

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по ссылке или QR коду:

Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

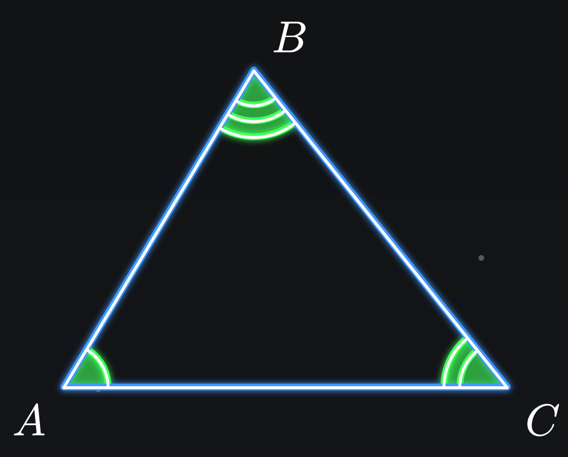
≪ Задание 1 ≫

< Теорема о сумме углов треугольника, внешнего угла >

Сумма углов треугольника равна $180°$.

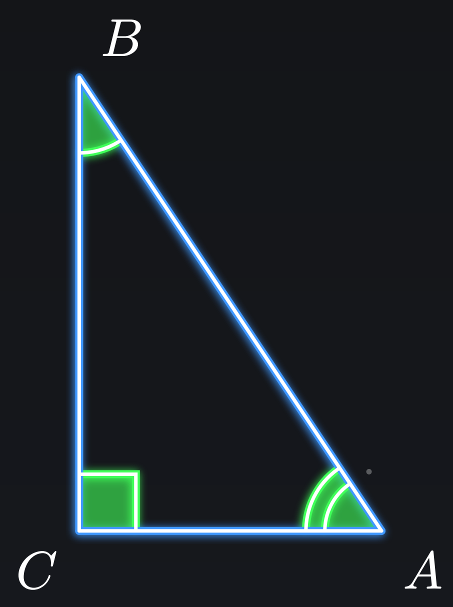
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Примечание: $\angle C$ *треугольника* ABC *— это* $\angle ACB$.

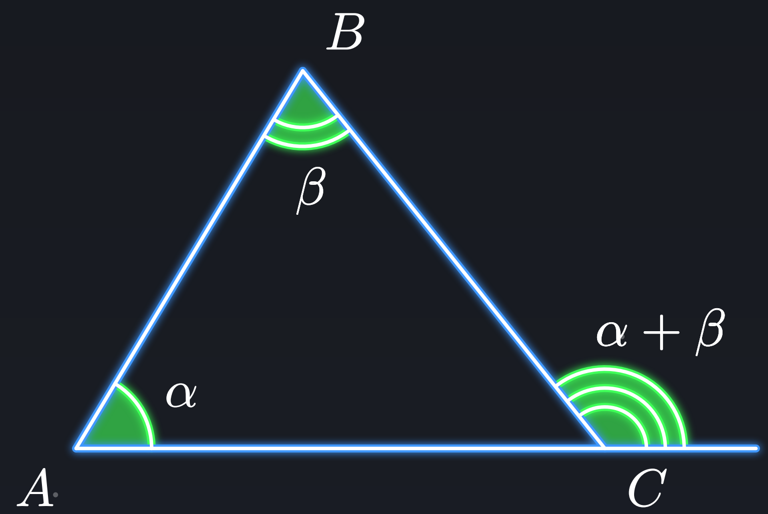


Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

$$\angle A + \angle B = 90°$$



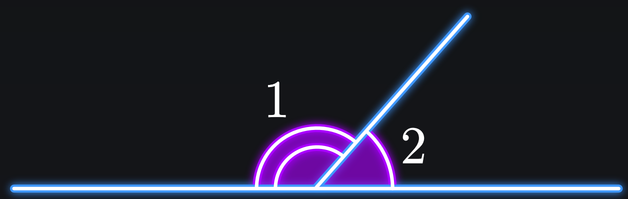
Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.



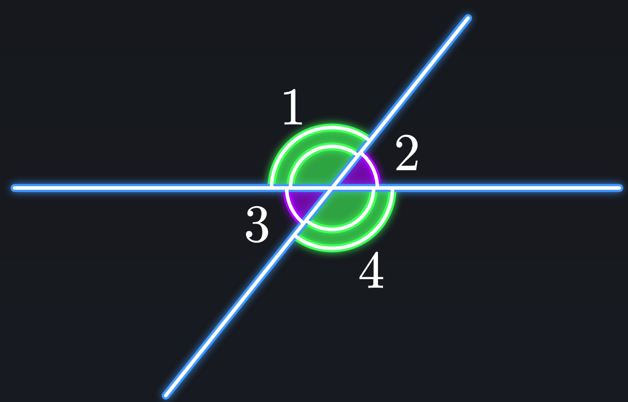
Смежные и вертикальные углы

Определение. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**. Сумма смежных углов равна $180°$.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180°$$



Определение. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

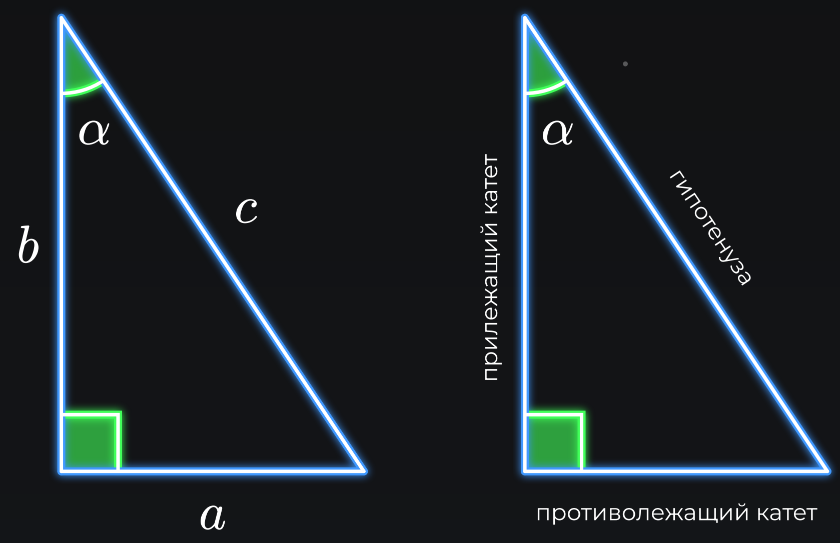


$$\angle 1 = \angle 4$$

$$\angle 2 = \angle 3$$

< Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике >

Для острых углов sin, cos, tg, ctg определяются следующим образом:



Синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс — это отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенс — это отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

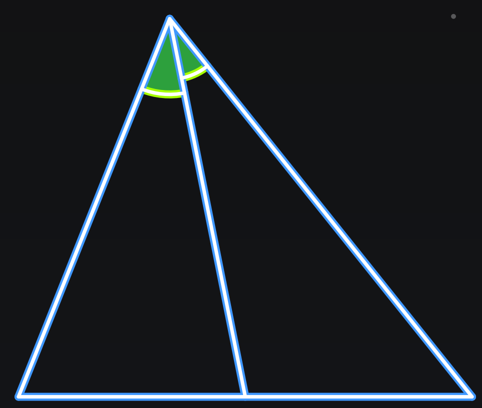
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Таблица значений основных тригонометрических углов:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

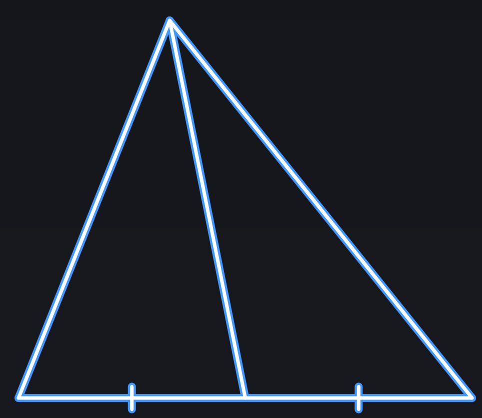
< Биссектриса, медиана и высота >

Биссектриса — луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

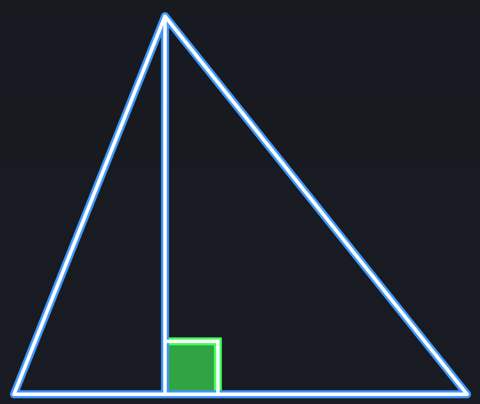


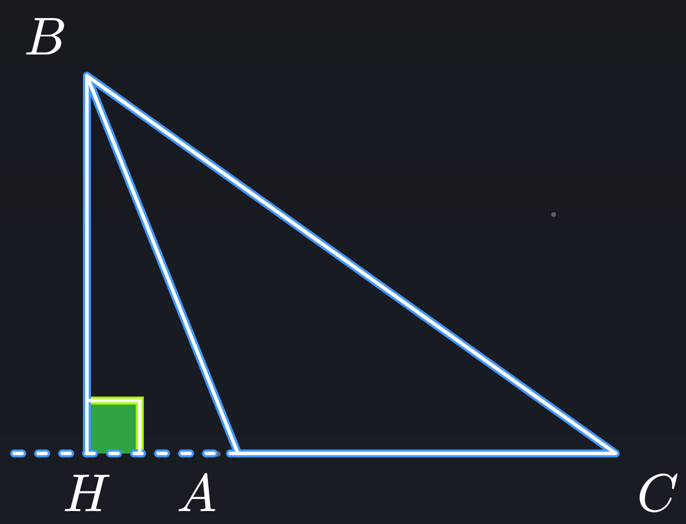
Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Высота — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.





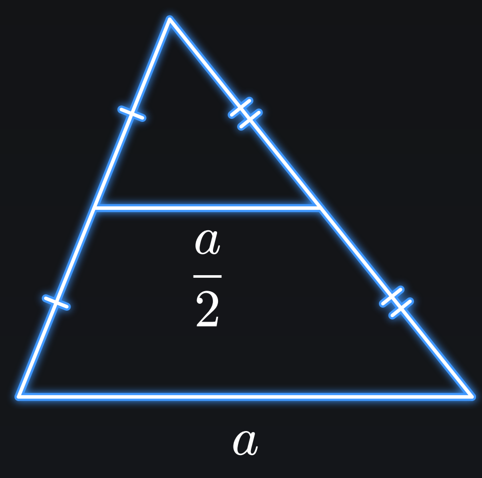
Если треугольник тупоугольный, то две его высоты лежат вне треугольника.

Если треугольник прямоугольный, то две его высоты совпадают с его катетами.

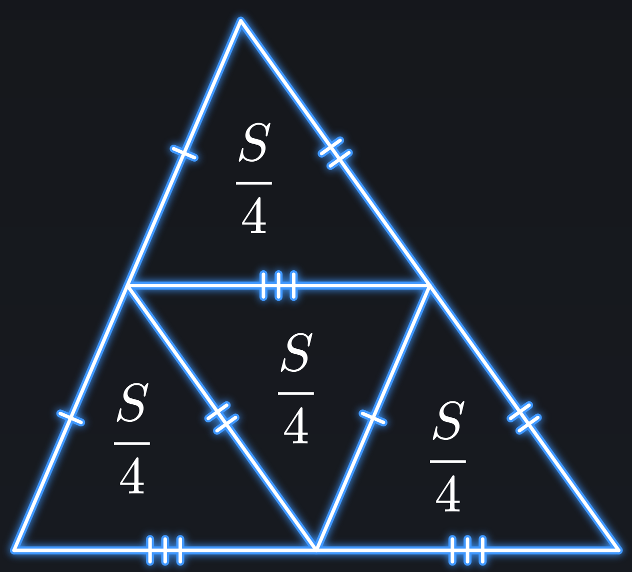
< Средняя линия треугольника >

Определение. Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Свойство средней линии: средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



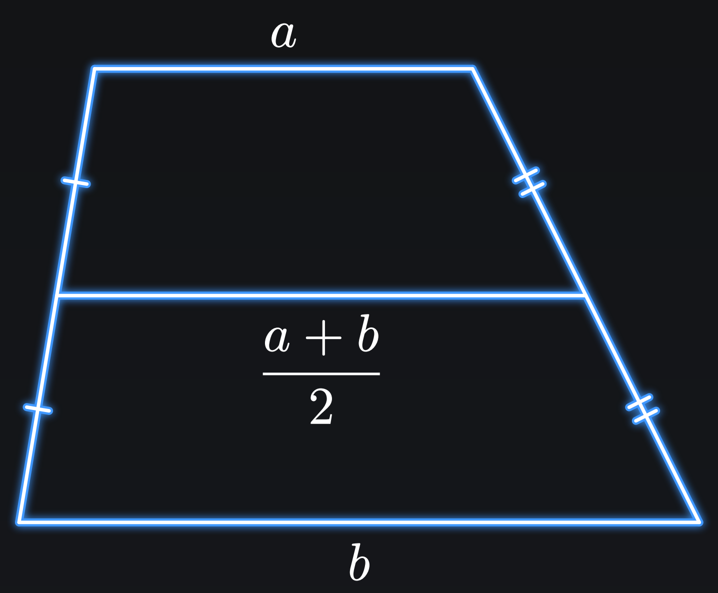
Каждая средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, периметр которого в два раза меньше, а площадь в четыре раза меньше исходного.



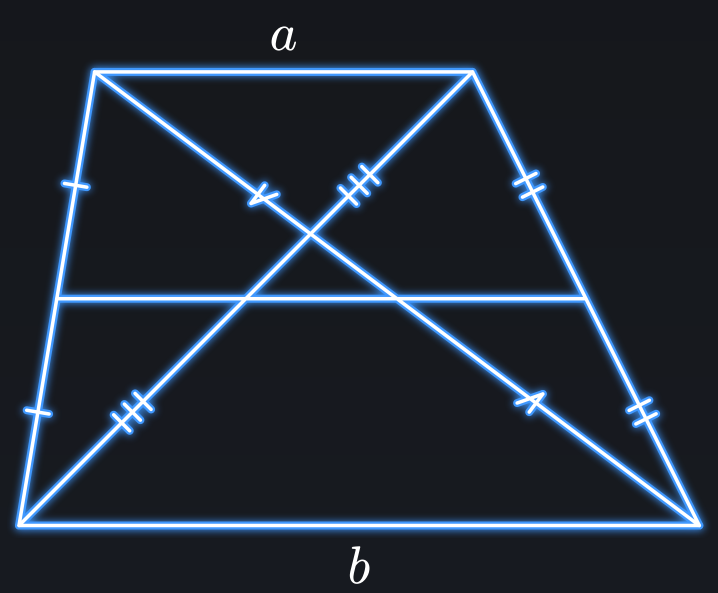
< Средняя линия трапеции и её свойства >

Определение. Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

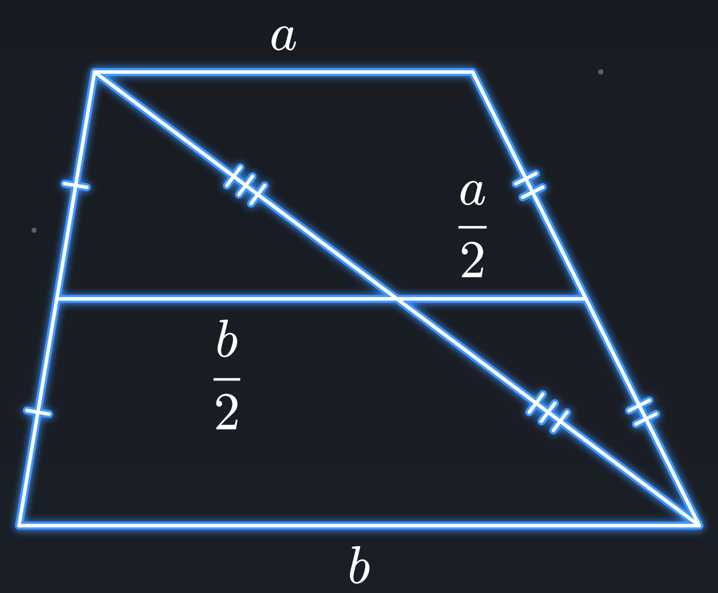
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



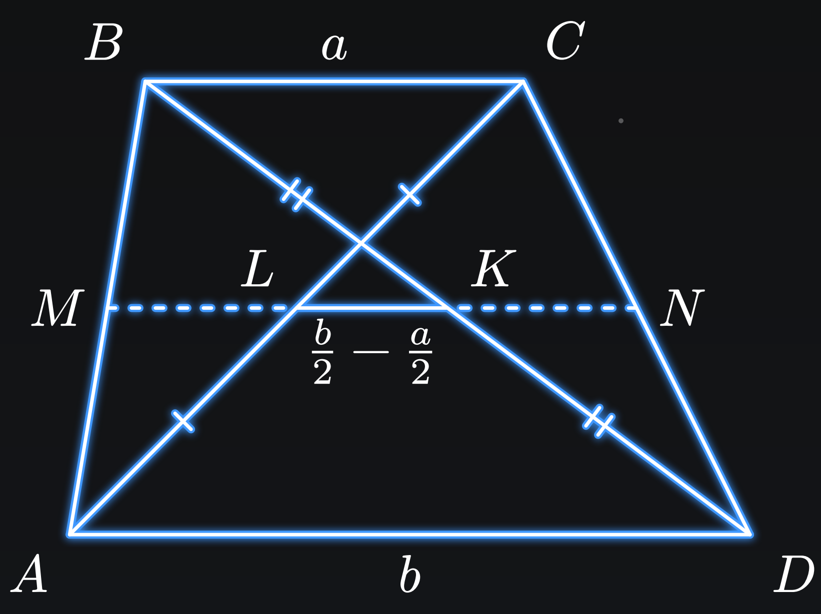
Средняя линия делит каждую диагональ трапеции пополам.



При этом отрезки, на которые средняя линия делится диагональю, равны половинам оснований.



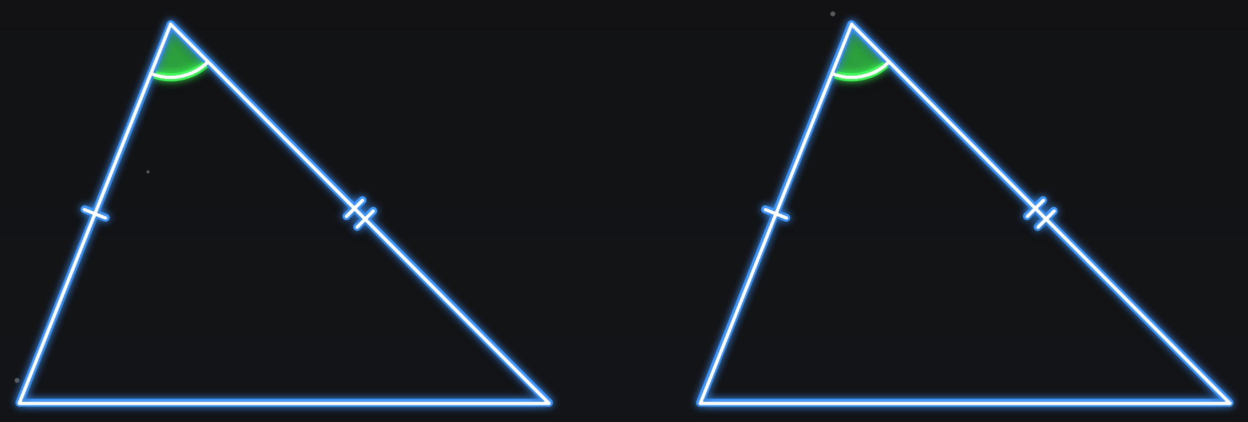
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.



$$KL = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

< Признаки равенства треугольников >

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.

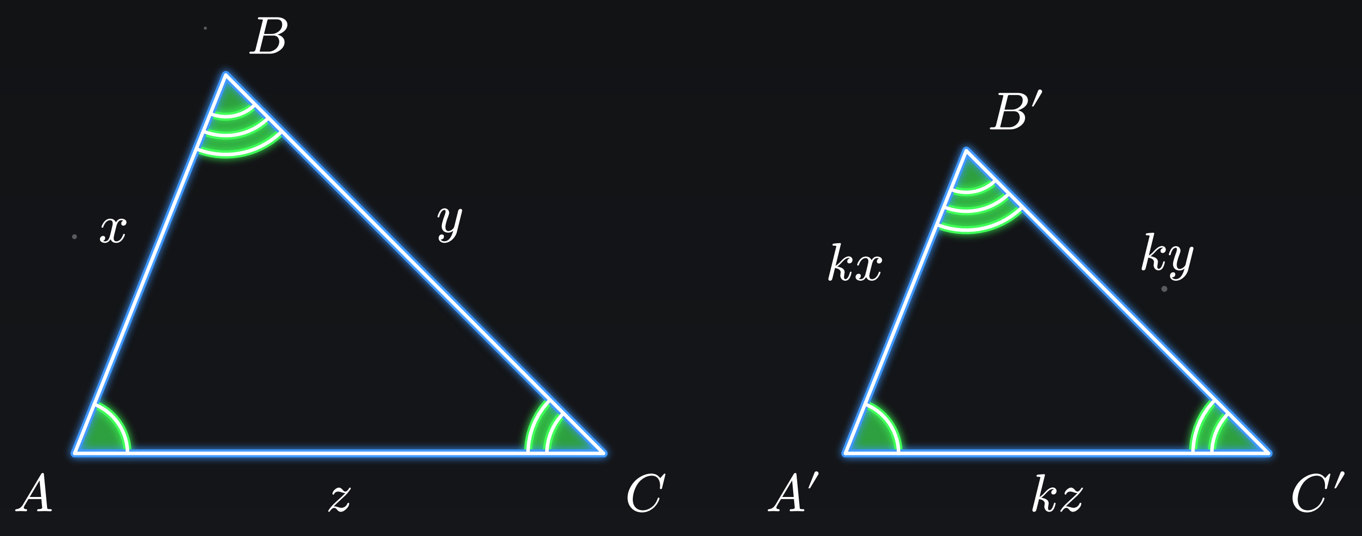


Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.

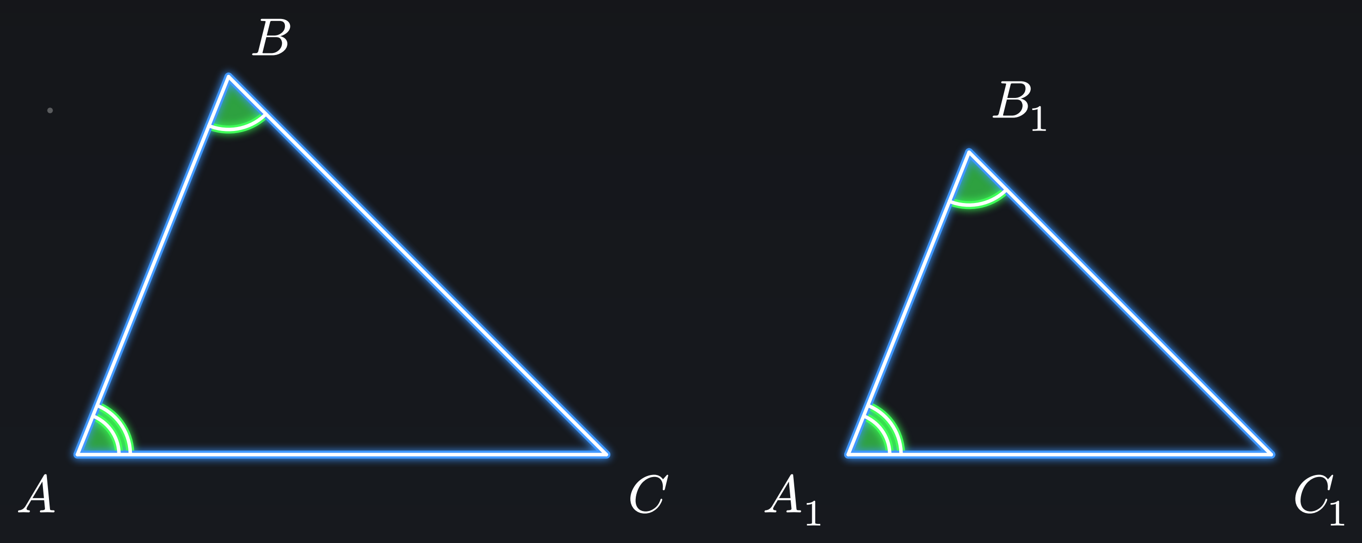
Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

< Признаки подобия треугольников >

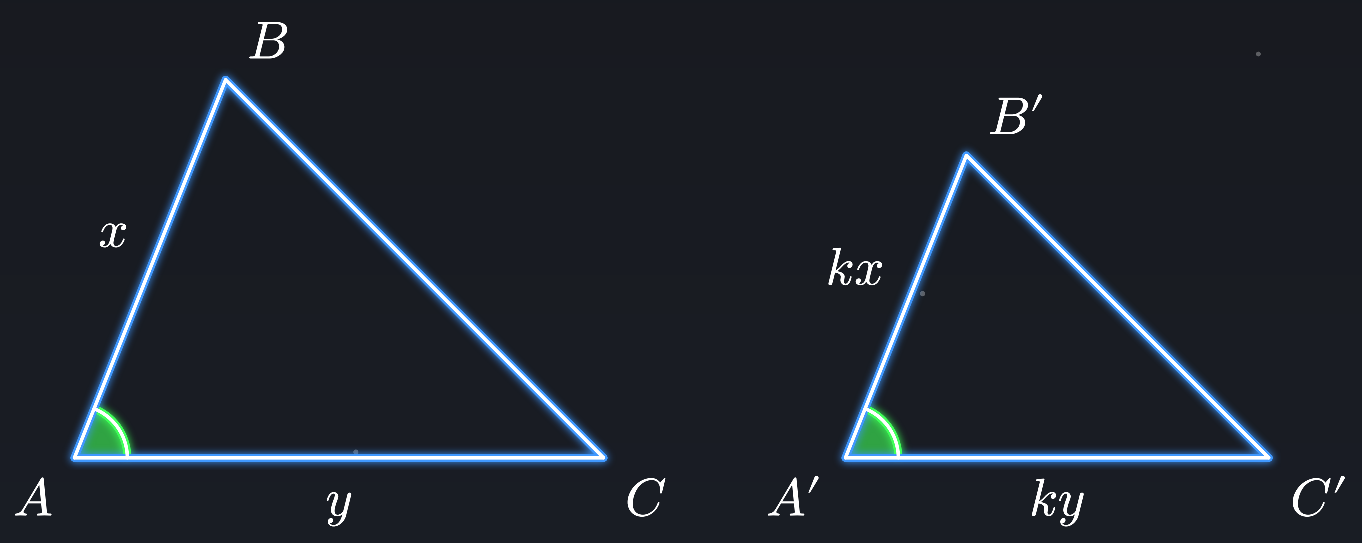
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого. Отношение k соответственных сторон подобных треугольников называется **коэффициентом подобия**.



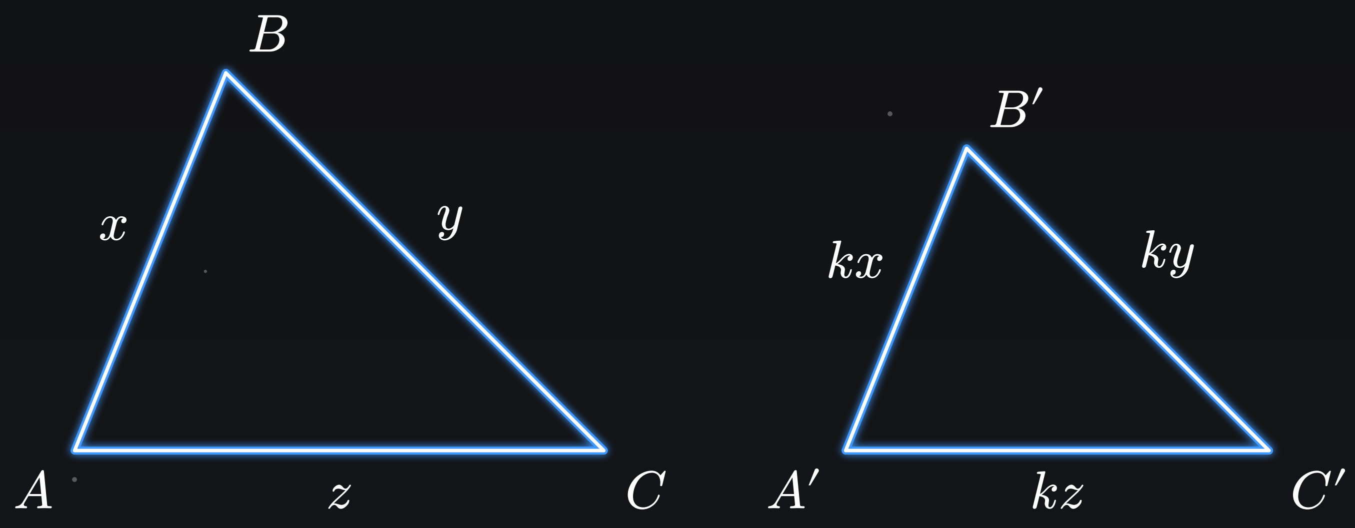
Первый признак подобия двух треугольников: по двум углам.



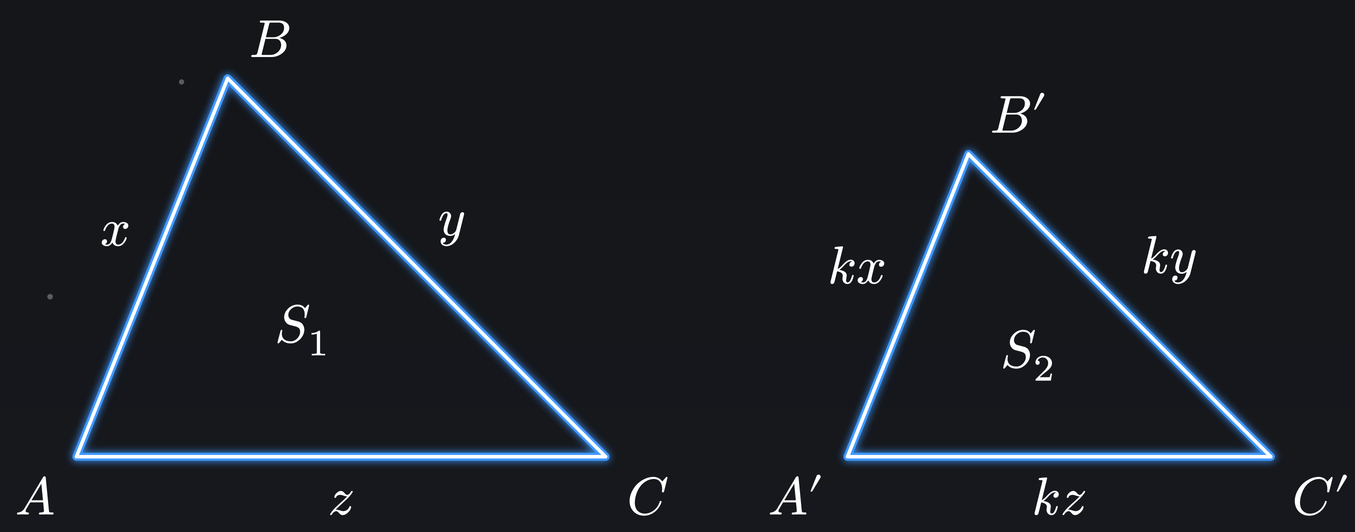
Второй признак подобия двух треугольников: по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.



Третий признак подобия двух треугольников: по трём пропорциональным сторонам.



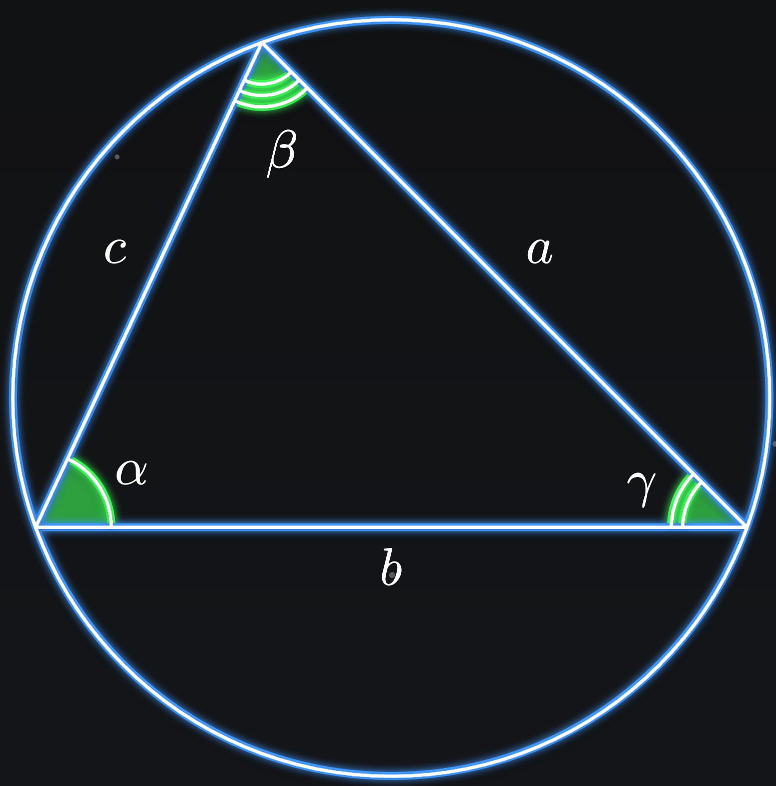
Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.



$$\frac{S_{\triangle \mathrm{A'B'C'}}}{S_{\triangle \mathrm{ABC}}} = k^2$$

< Теорема синусов >

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



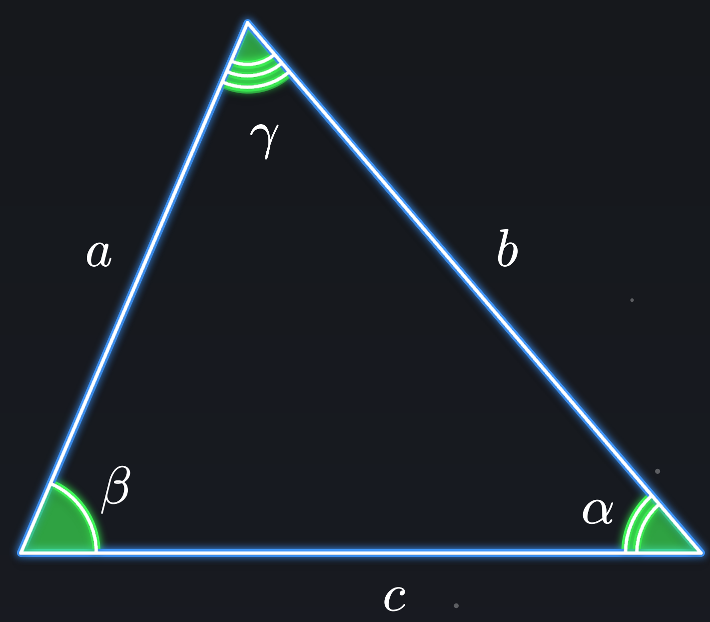
< Теорема косинусов >

Теорема косинусов поможет в случае, если нам известны три стороны треугольника и требуется найти какой-нибудь из углов, или если известны две стороны и угол и необходимо найти третью сторону.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

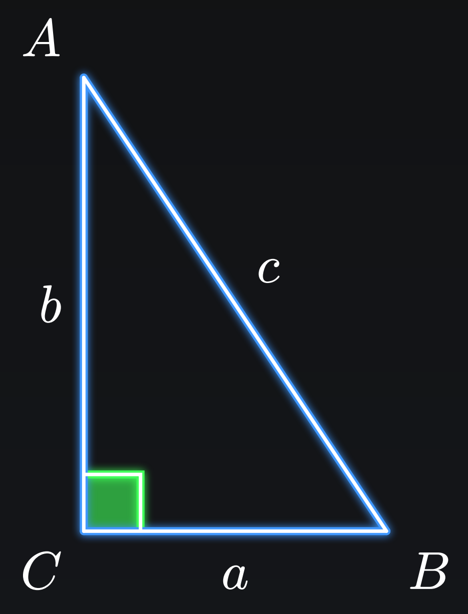


Теорема косинусов — она как теорема Пифагора, только в теореме Пифагора нет $-2bc\cos\alpha$*, ведь* $\cos 90^\circ = 0$.

< Теорема Пифагора >

Теорема Пифагора — в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c верно, что $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, лежащий напротив стороны c, равен $90°$ (Обратная теорема Пифагора).

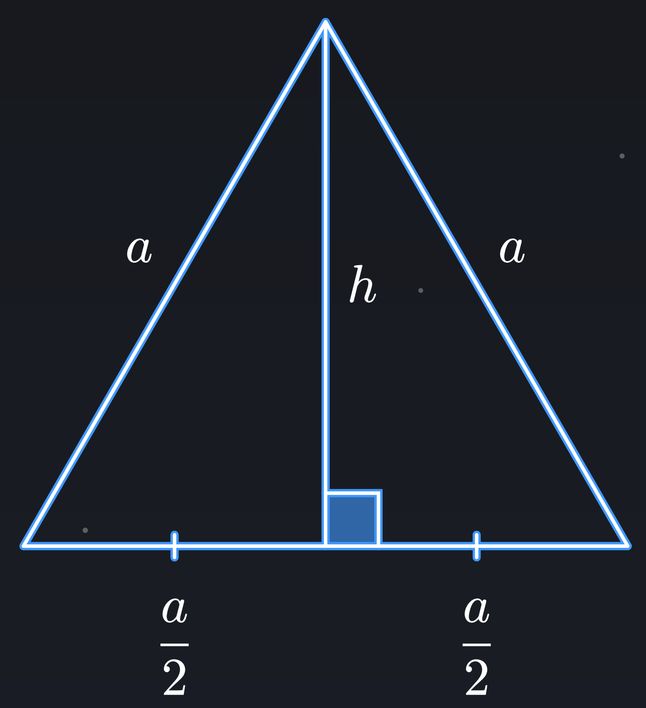
< Элементы равностороннего треугольника >

В равностороннем треугольнике каждая высота совпадает с медианой и биссектрисой, проведенными из той же вершины.

Точки пересечения высот, медиан и биссектрис совпадают. Также эта точка является центром вписанной и описанной окружностей.

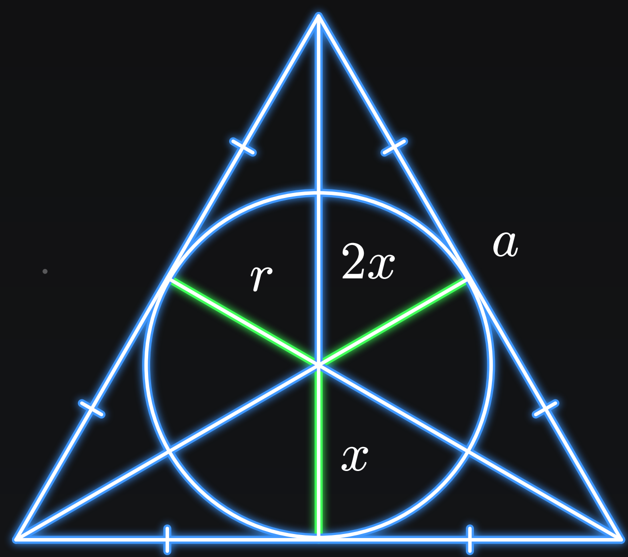
Высота равностороннего треугольника:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



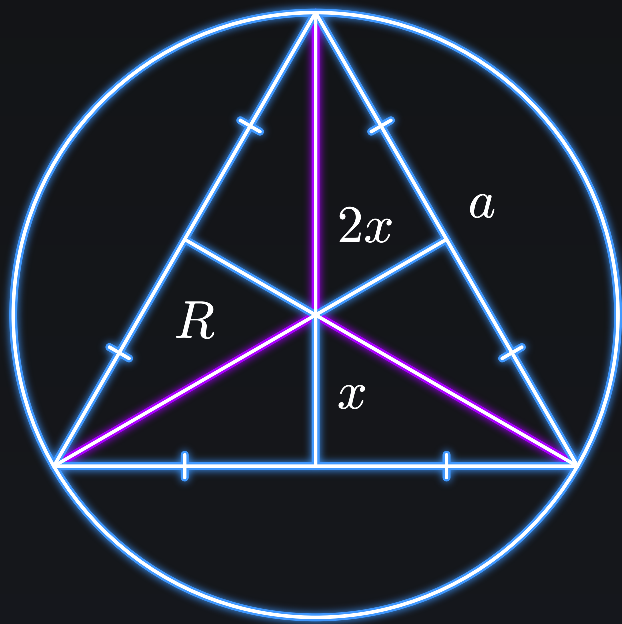
Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$



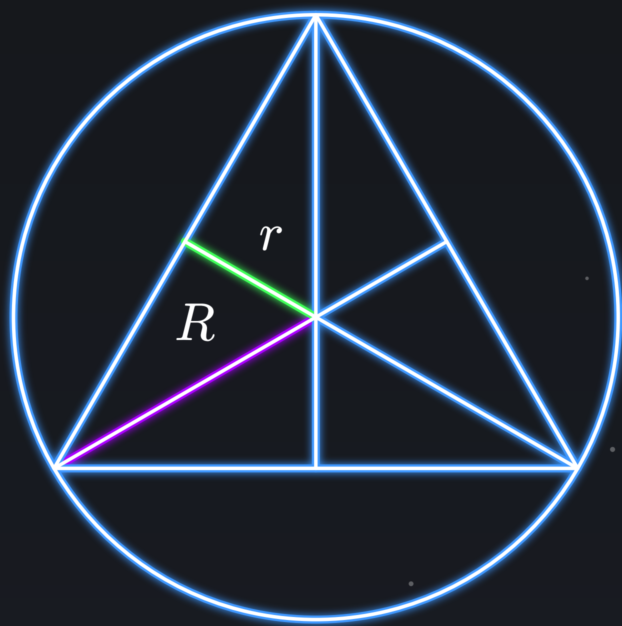
Радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



Радиус описанной окружности равен двум радиусам вписанной окружности:

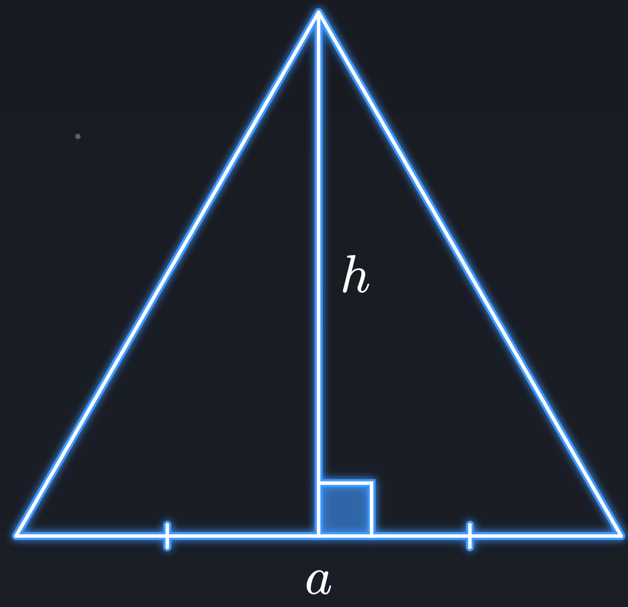
$$R = 2r$$



Также площадь равностороннего треугольника можно найти по формуле

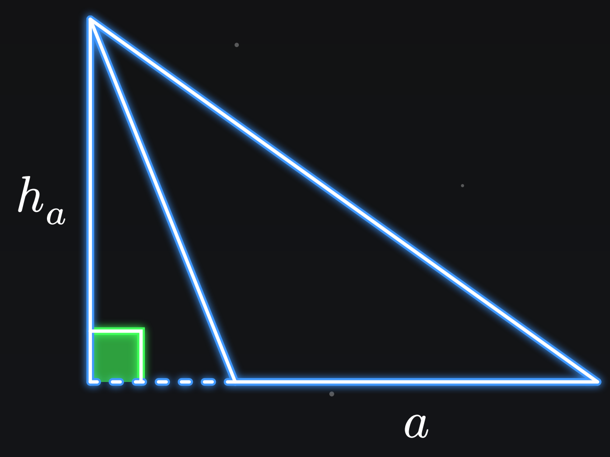
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

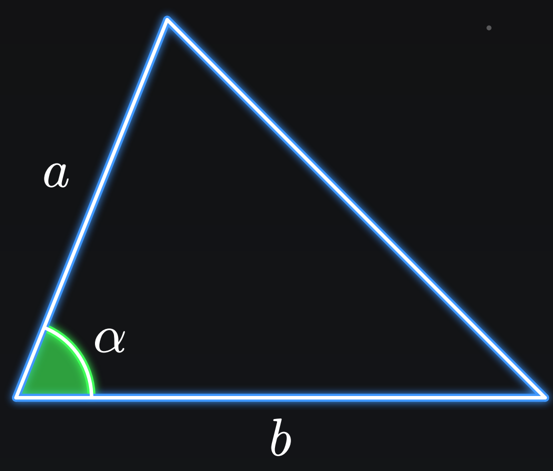


< Формулы площадей >

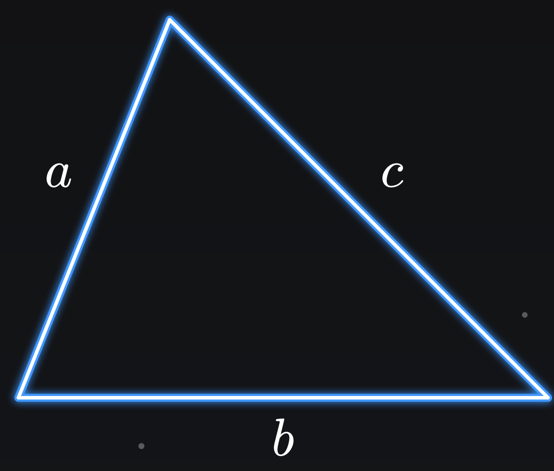
Площадь треугольника



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

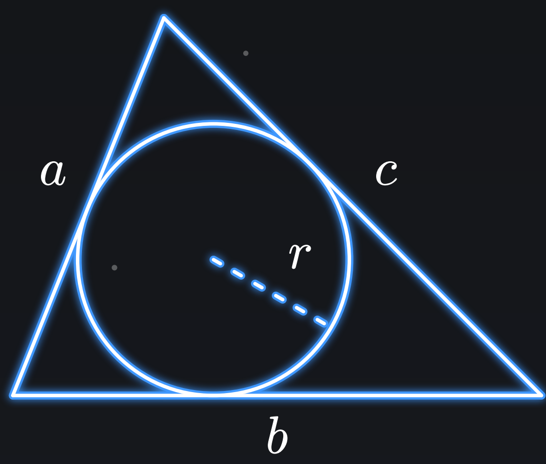


$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



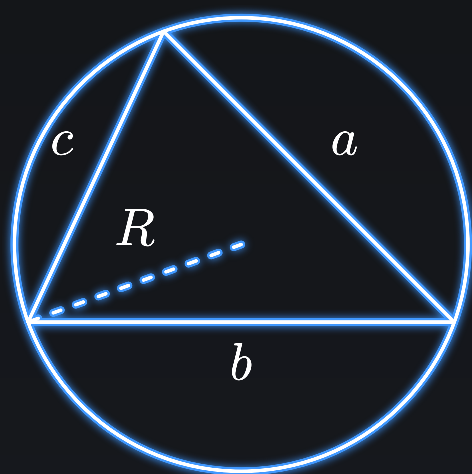
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p — полупериметр



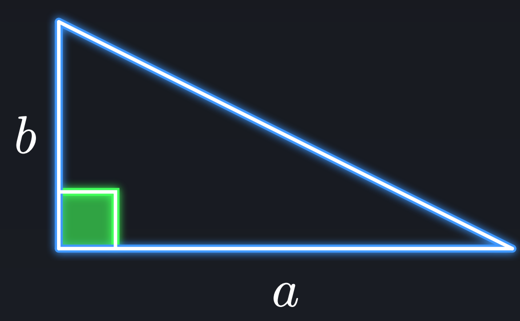
$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr$$

p — полупериметр



$$S = \frac{abc}{4R}$$

Площадь прямоугольного треугольника

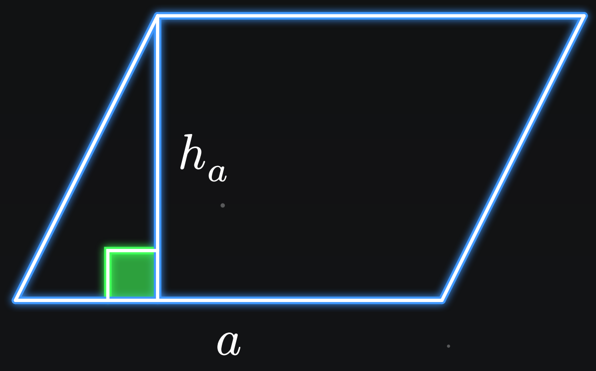


$$S = \frac{1}{2}ab$$

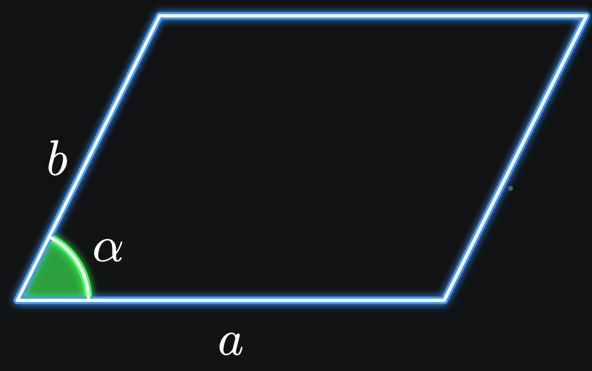
Площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

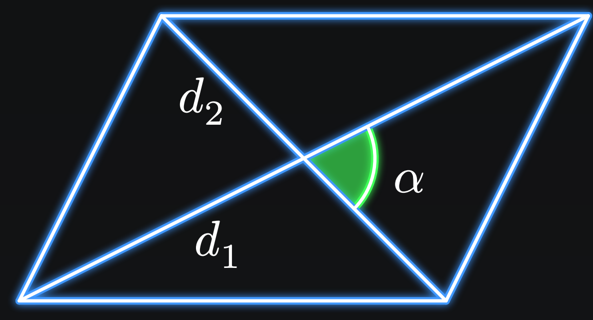
Площадь параллелограмма



$$S = ah_a$$

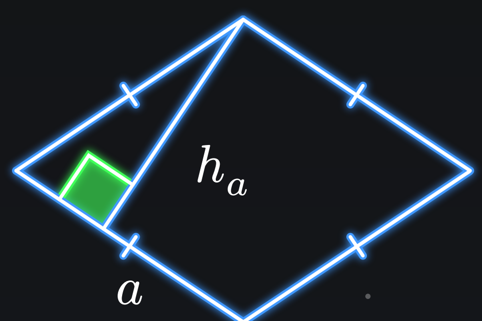


$$S = ab\sin\alpha$$

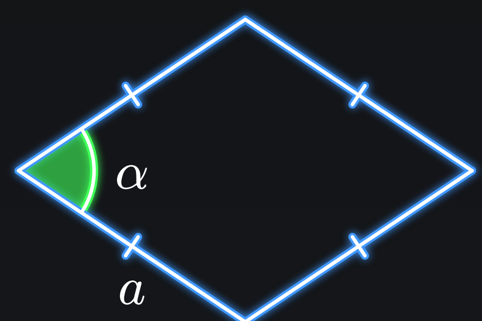


$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$$

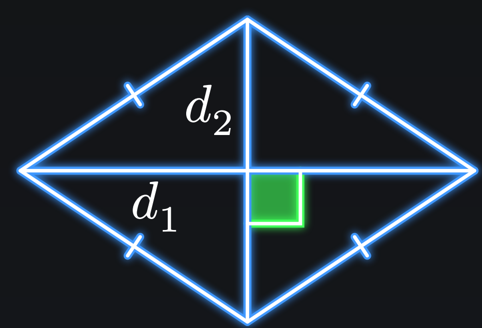
Площадь ромба



$$S = ah$$

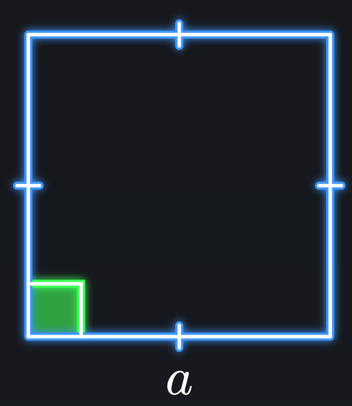


$$S = a^2\sin\alpha$$

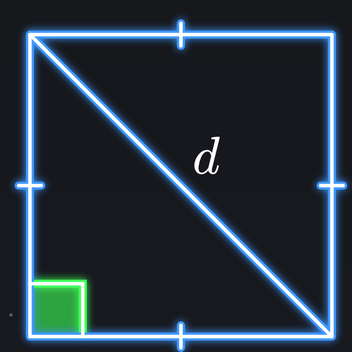


$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Площадь квадрата



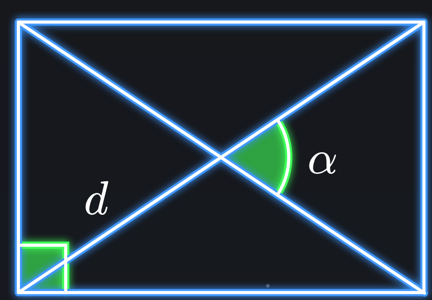
$$S = a^2$$



$$S = \frac{1}{2}d^2$$

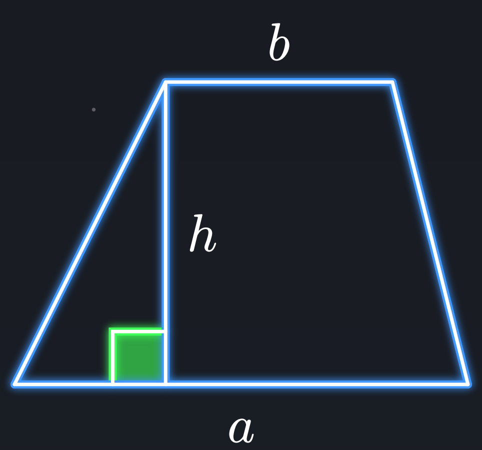
Площадь прямоугольника

$$S = ab$$

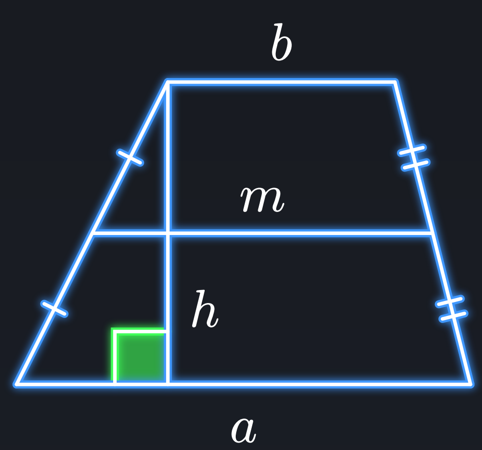


$$S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$$

Площадь трапеции

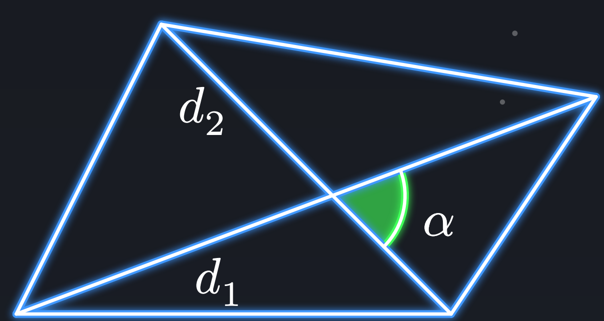


$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$$



$$S = mh, \; m = \frac{a+b}{2}$$

Площадь четырёхугольника



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$$

< Окружность >

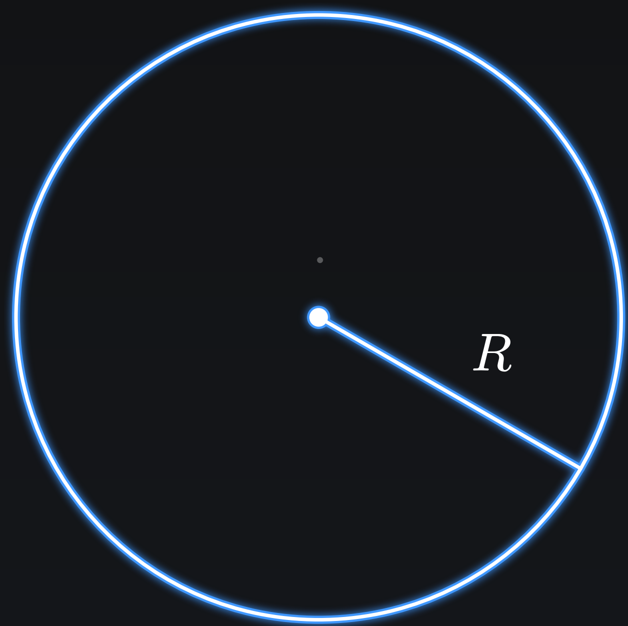
Определение. Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

1. Длина окружности:

$$C = 2\pi R$$

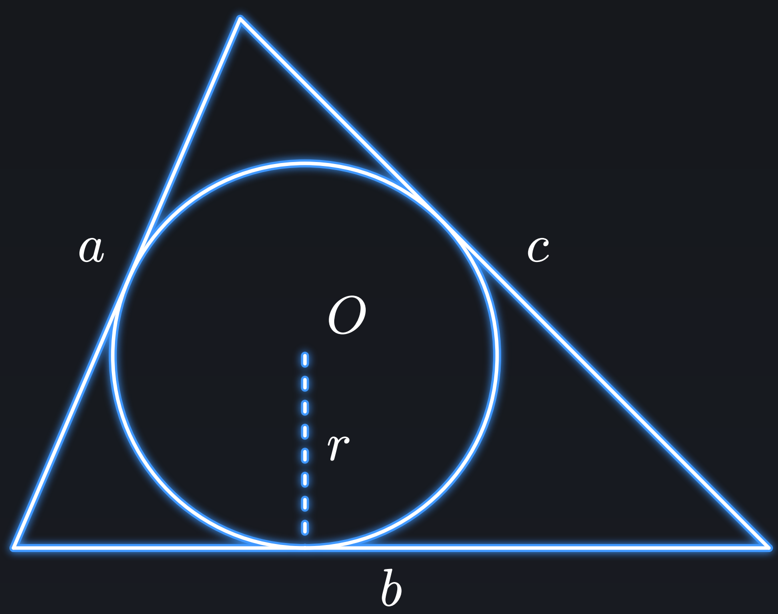
2. Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$



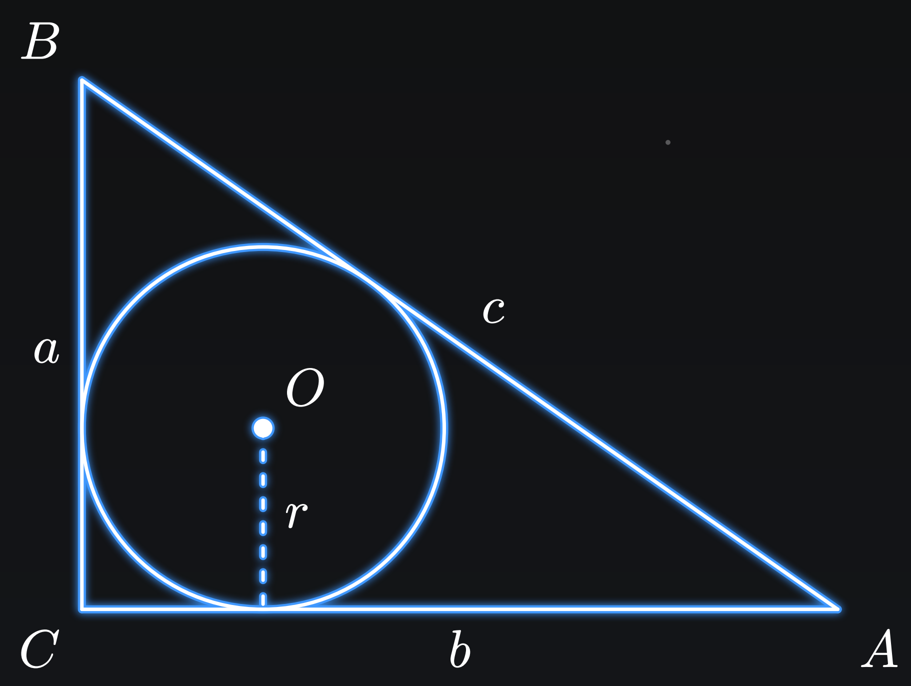
< Вписанная окружность >

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис.



В треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, поэтому в треугольник всегда можно вписать окружность. А в многоугольнике биссектрисы не всегда пересекаются в одной точке, поэтому в многоугольник не всегда можно вписать окружность.

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формулам:

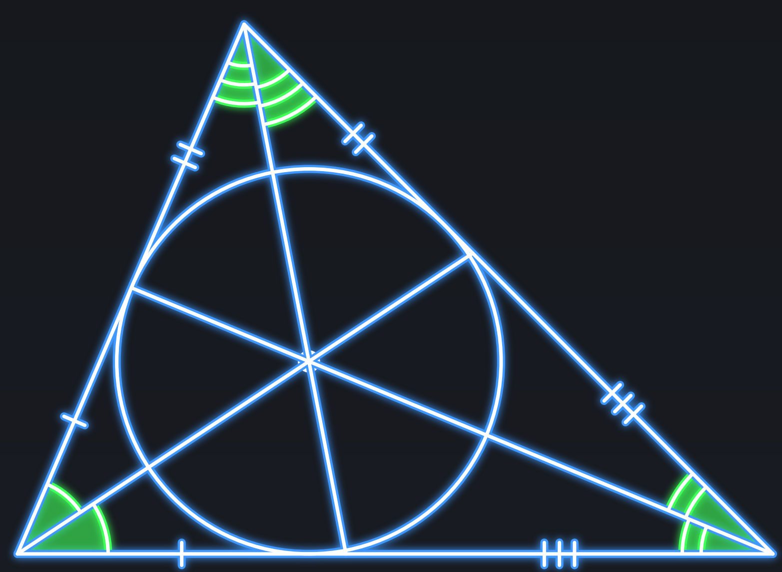


$$r = p - c = \frac{a+b-c}{2}$$

где p — полупериметр $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$S = pr \Longleftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}$$

Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти по формуле:



$$S = pr,$$

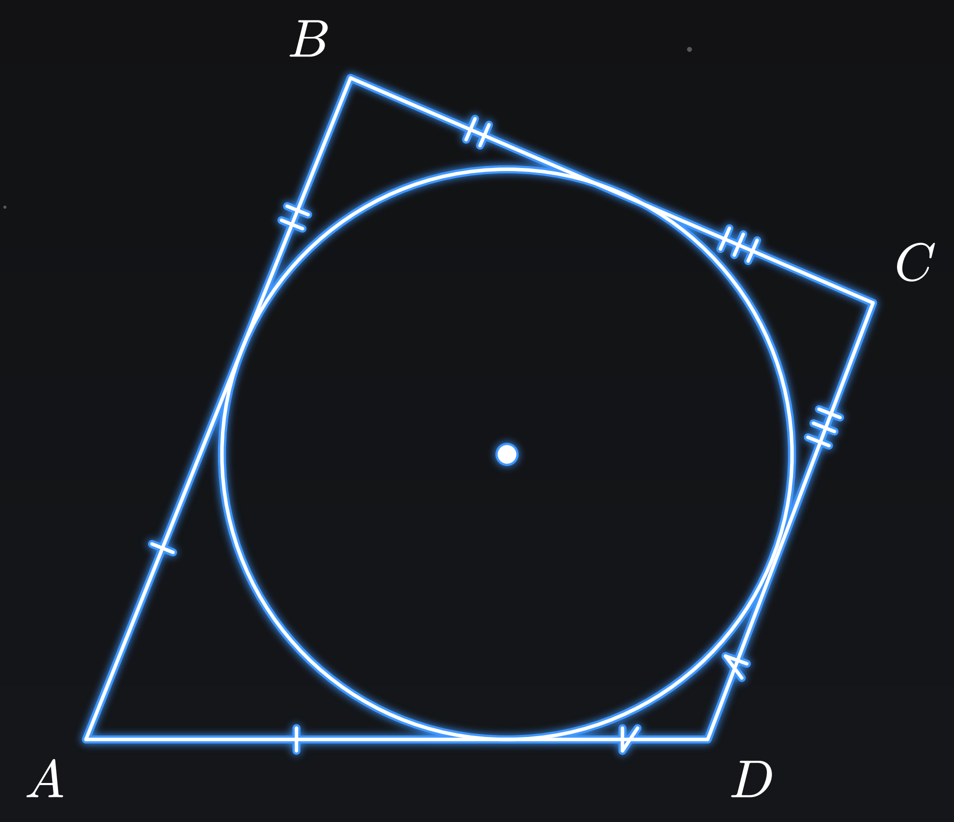
где

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле $S = pr$, где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности.

Если $AB + CD = BC + AD$, то в четырехугольник можно вписать окружность.

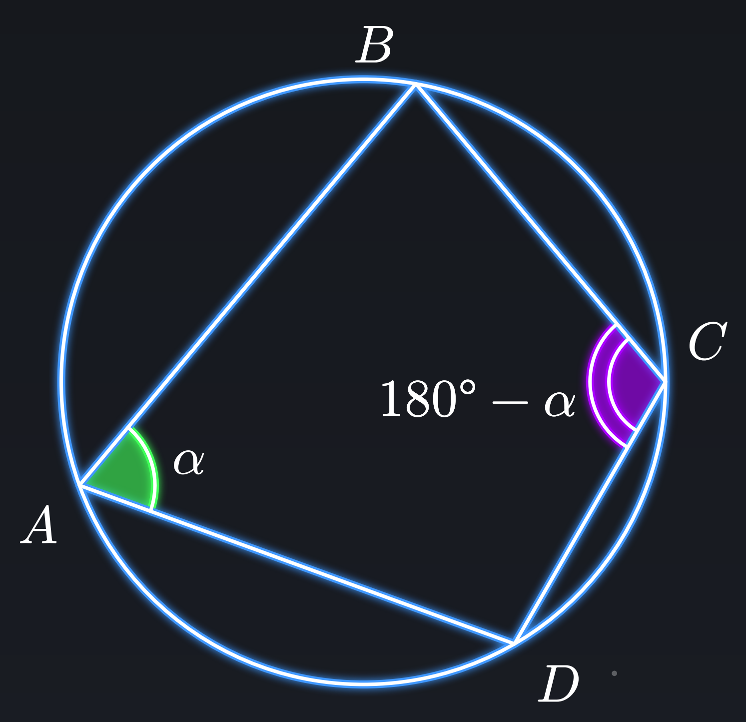
Верно и обратное: если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны.



Описанная окружность

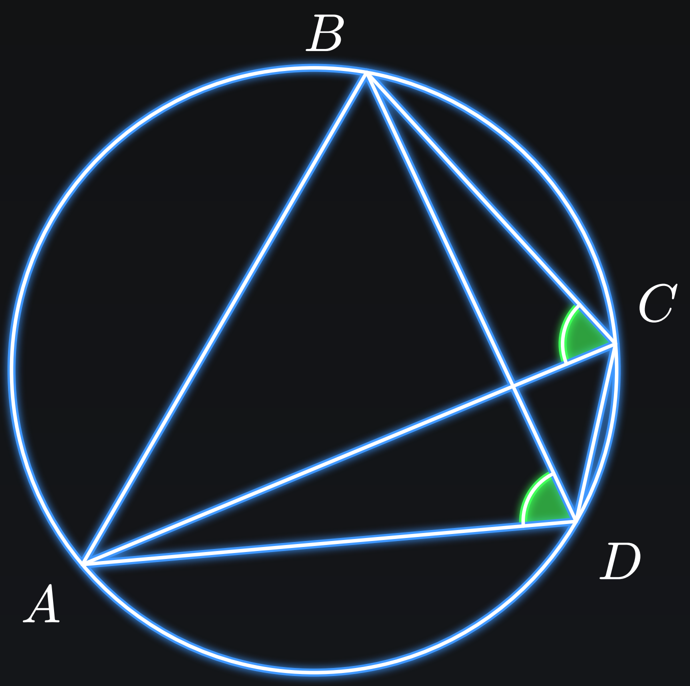
I признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Четыре точки лежат на одной окружности, если два противоположных угла в сумме дают $180°$.



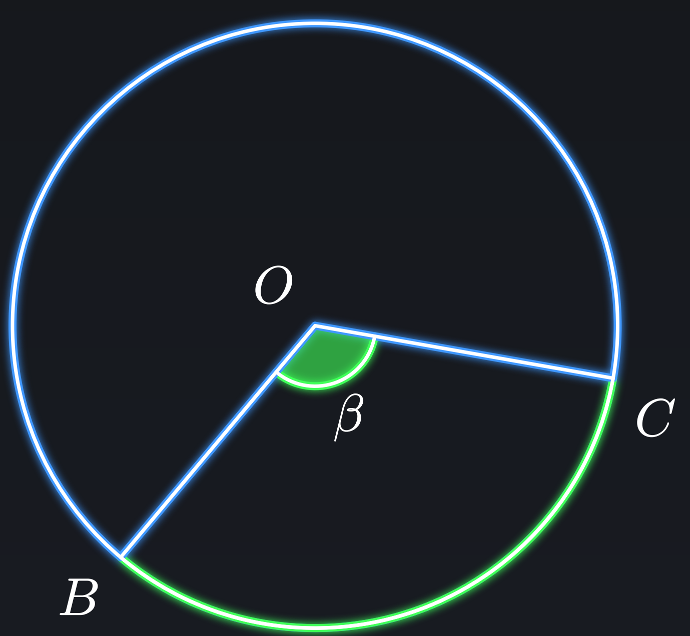
II признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Точки C и D лежат по одну сторону от прямой, содержащей отрезок AB. Углы ACB и BDA равны тогда и только тогда, когда точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



Вписанный и центральный углы

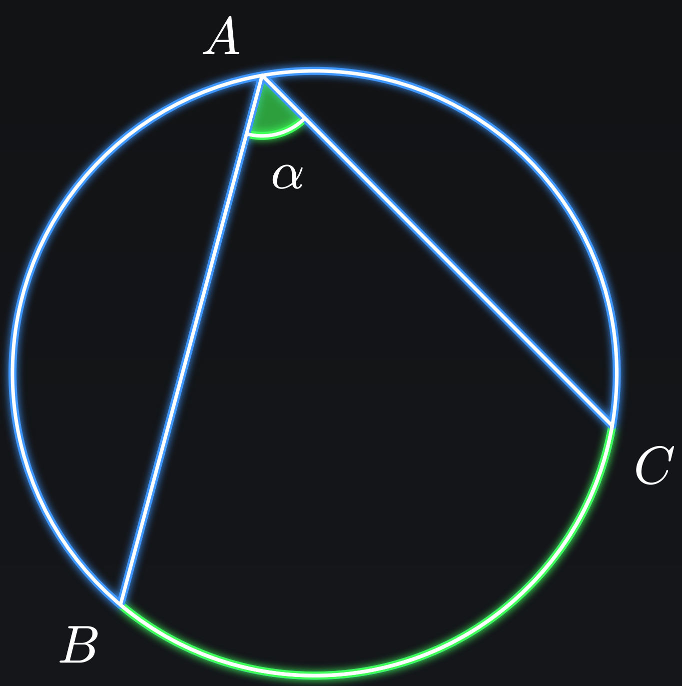
Определение. Центральный угол - угол с вершиной в центре окружности.



$$\angle\beta = \smile{BC}$$

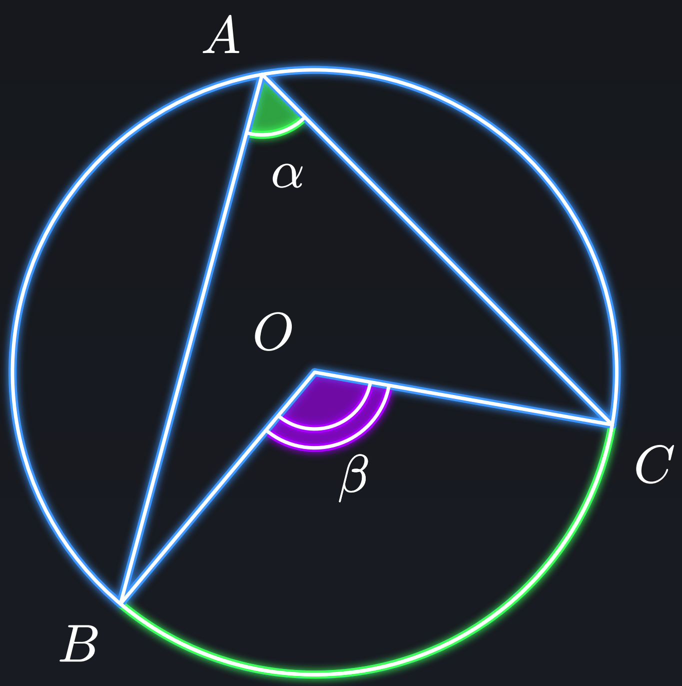
Градусная мера всей дуги окружности равна $360°$.

Определение. Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.



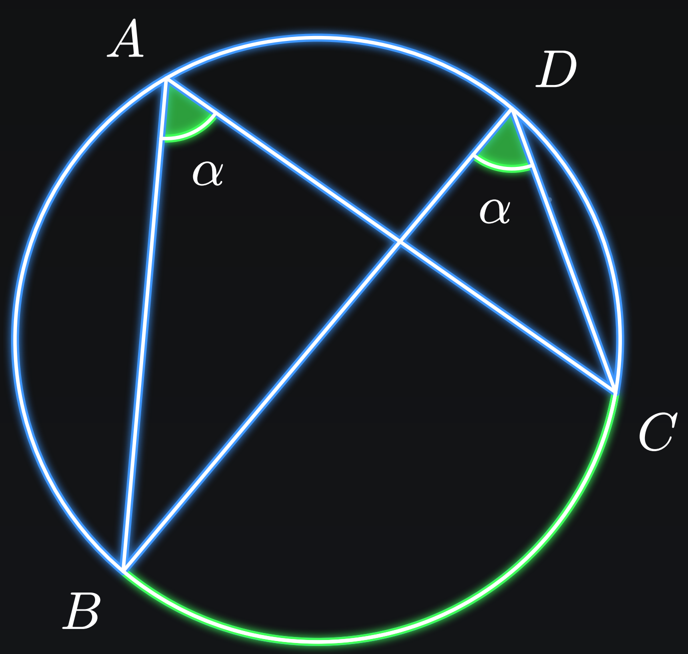
$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$$

Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.



$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\angle\beta$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.



$$\angle BAC = \angle BDC$$

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Математика ОГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.
Среди них есть:

- Физика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Информатика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Русский язык: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: Телеграм | YouTube | ВКонтакте | MAX

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: Телеграм | YouTube | MAX
- Физика: Телеграм
- Информатика: Телеграм
- Русский язык: Телеграм

До встречи!

Команда Профиматики