Вся теория для задания №2 ЕГЭ по профильной математике

Влад Вуль

Игорь Уколов

В данном файле представлена **вся теория, необходимая для задания №2** из ЕГЭ по профильной математике.

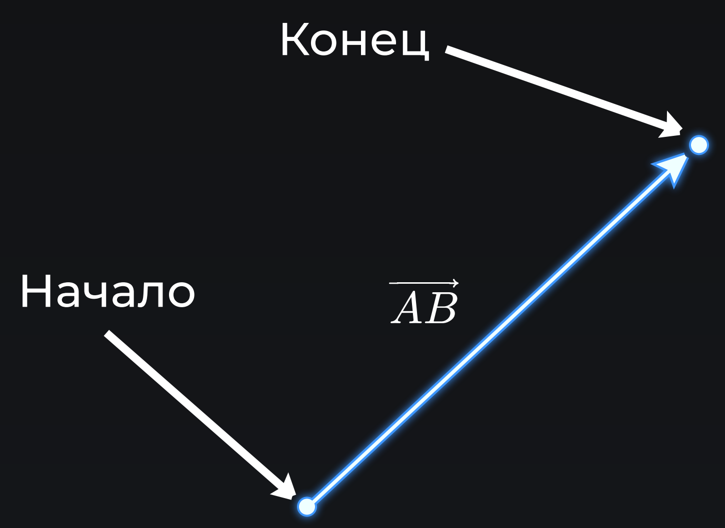
Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по ссылке или QR коду:

Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

Задание 2

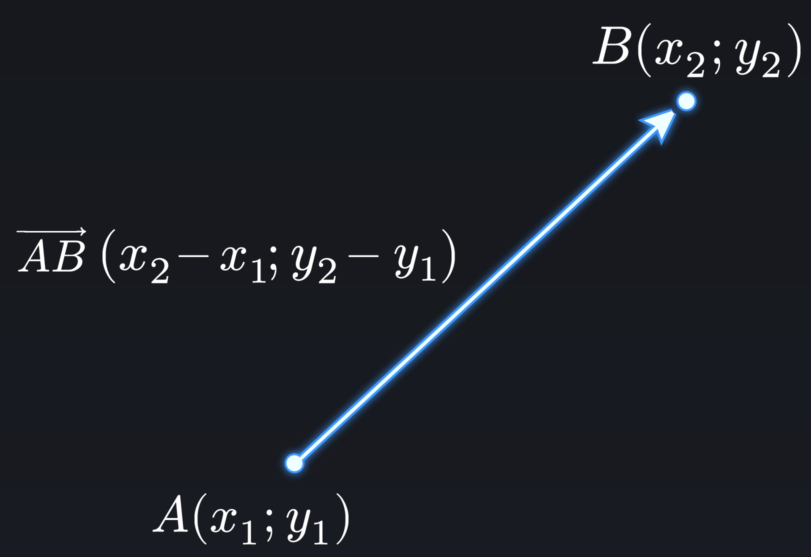
Определение. Вектор — направленный отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.



Нахождение координат вектора

Для того, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала.

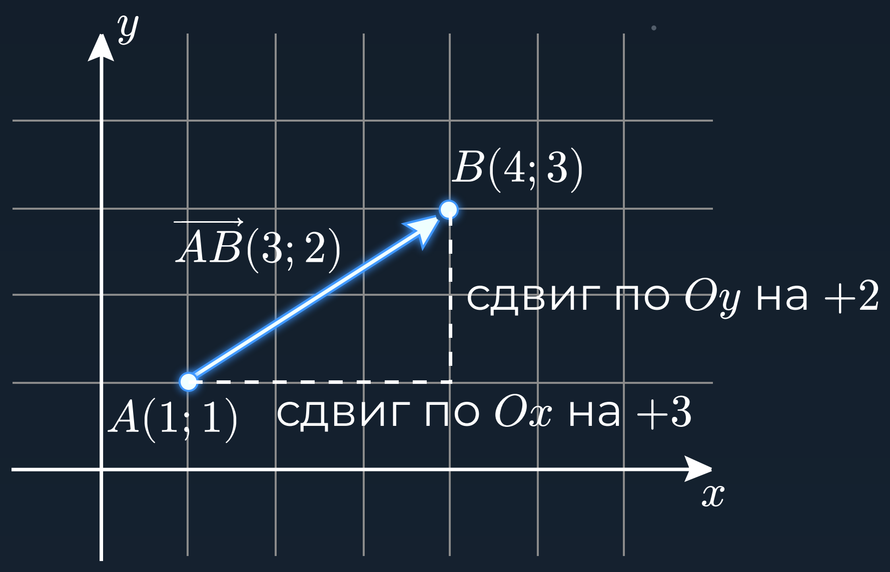
Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то:



Смысл координат вектора

Если считать, что мы двигаемся от начала вектора к концу, то координаты вектора показывают, насколько мы сдвинулись по осям x и y.

Пример 1. Возьмём вектор $\overrightarrow{AB}$, изображенный на рисунке, и найдём его координаты.

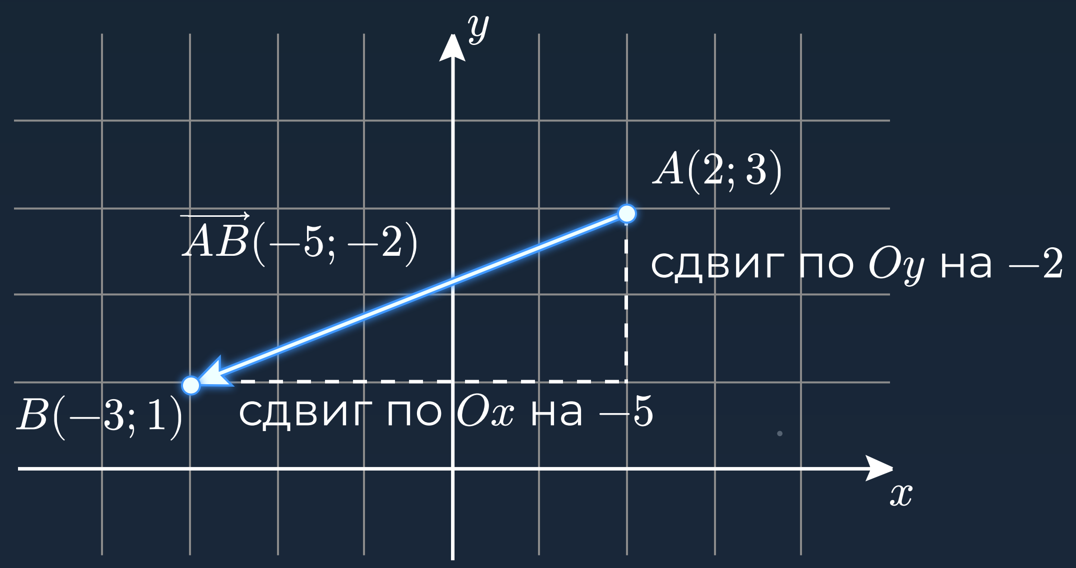


$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A);$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1; 3-1) = (3;2).$$

Действительно, двигаясь по этому вектору от начала к концу, вдоль оси x мы сместились на 3 клетки вправо, а вдоль оси y сместились на 2 клетки вверх. Следовательно, его координаты $(3;2)$.

Пример 2. Возьмём вектор $\overrightarrow{AB}$, изображенный на рисунке, и найдём его координаты.



$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A);$$

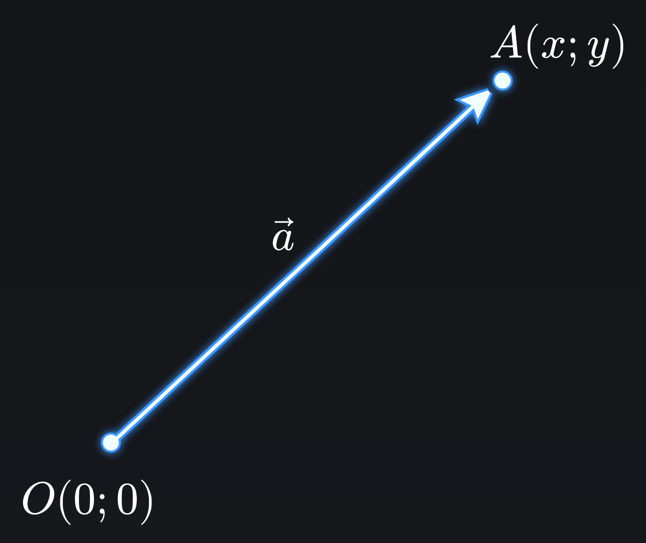
$$\overrightarrow{AB} = (-3-2; 1-3) = (-5;-2).$$

Действительно, двигаясь по этому вектору от начала к концу, вдоль оси x мы сместились на 5 клеток влево, а вдоль оси y сместились на 2 клетки вниз. Следовательно, его координаты $(-5;-2)$.

Так можно узнать координаты вектора, если он нарисован на клеточной бумаге.

< Вычисление длины вектора по его координатам >

Определение. Длина отрезка OA называется **длиной вектора** $\overrightarrow{OA}$ (или **модулем вектора** $\overrightarrow{OA}$) и обозначается $|\overrightarrow{OA}|$. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.



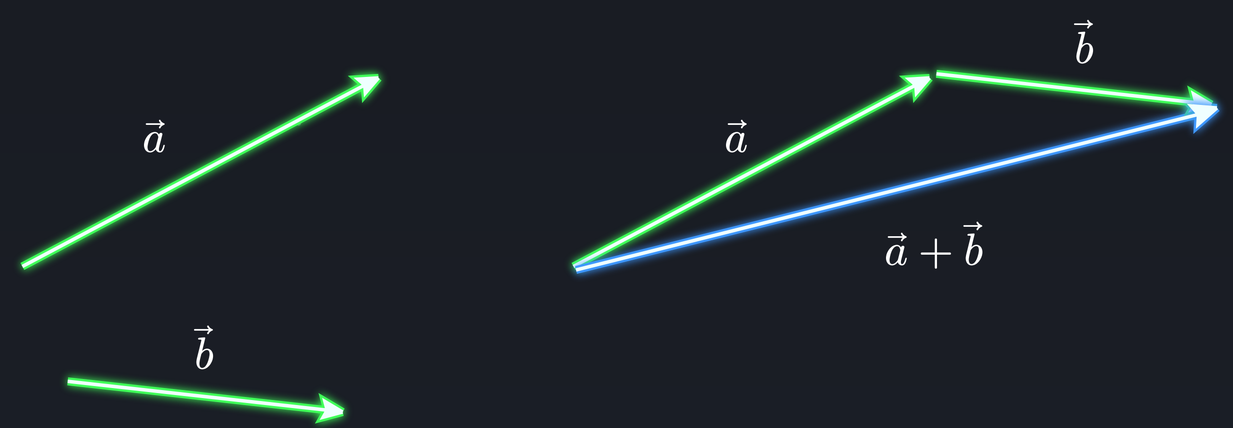
$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}(x;y)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

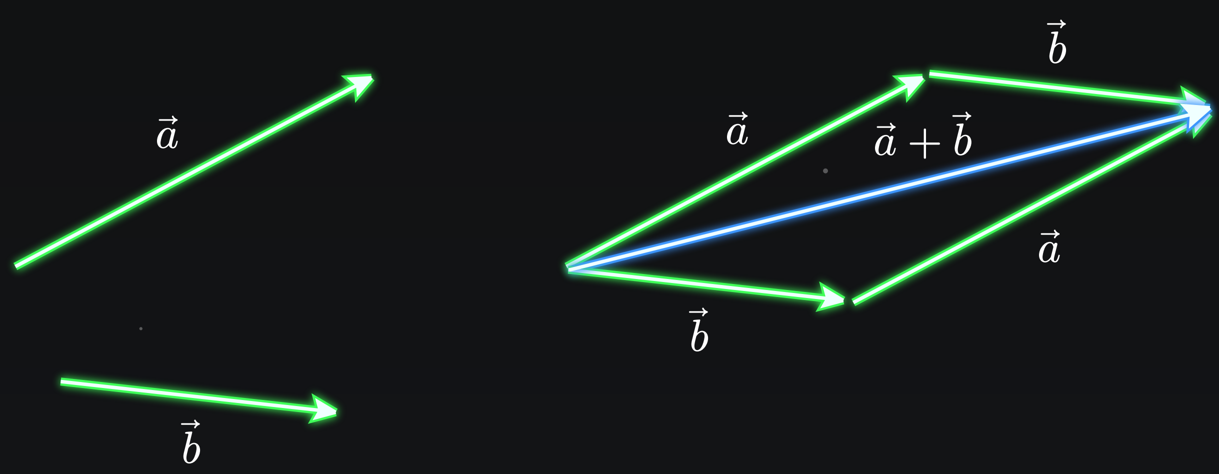
< Сложение и вычитание векторов >

Результатом сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}$. Найти его можно по **правилу треугольника** или по **правилу параллелограмма**.

> Правило треугольника



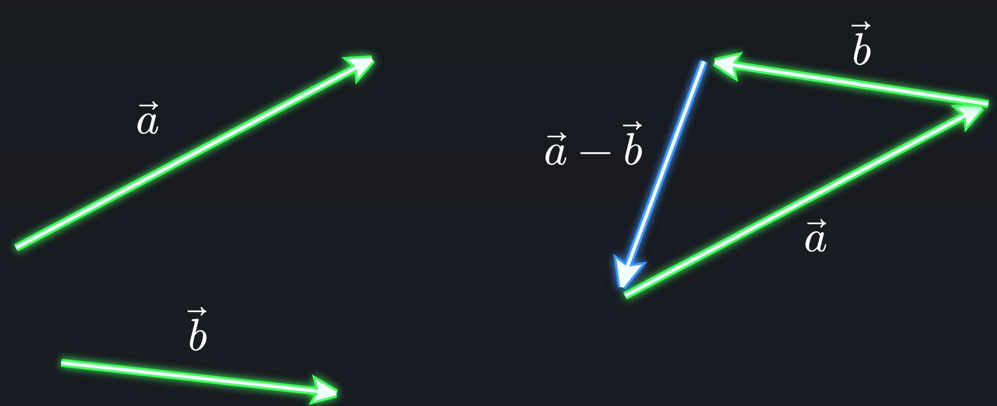
Правило параллелограмма



Для **сложения векторов с известными координатами**, необходимо сложить их соответствующие координаты, то есть если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{d}$. Для того, чтобы найти **разность векторов** $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, нужно сложить векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, получив предварительно вектор $-\vec{b}$ из вектора $\vec{b}$ сменой его направления на противоположное, т.е. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.



Для нахождения **разности векторов с известными координатами** необходимо вычесть их соответствующие координаты, то есть если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

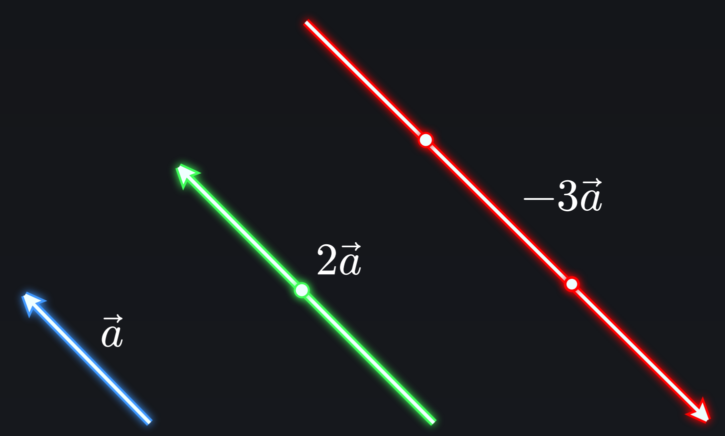
< Умножение вектора на число >

При умножении вектора на положительное число k его длина меняется в k раз, а направление остается прежним. При этом, если $k > 1$, длина увеличивается, если $0 < k < 1$ — уменьшается.

При умножении вектора на отрицательное число k его длина меняется в k раз, а направление меняется на противоположное. При этом, если $k < -1$, длина увеличивается, если $-1 < k < 0$ — уменьшается.

Если умножить вектор $\vec{a}$ на 2, то получим вектор $2\vec{a}$, длина которого в 2 раза больше, чем длина вектора $\vec{a}$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$;

если умножить вектор $\vec{a}$ на -3, получим вектор $-3\vec{a}$, длина которого в 3 раза больше, чем длина вектора $\vec{a}$, а направление противоположно направлению вектора $\vec{a}$.



Если известны координаты вектора $\vec{a}$, то для умножения его на число k необходимо умножить их на это число, то есть если $\vec{a}(x_1; y_1)$, то $k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$.

< Действия над векторами с заданными координатами >

$$\vec{a}(x_1; y_1) \qquad \vec{b}(x_2; y_2)$$

сложение	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$
вычитание	$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$	$\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
умножение	$\vec{q} = k \cdot \vec{a}$	$\vec{q} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$

< Сонаправленные и противоположно направленные векторы >

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** (записывается $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** (совпадают по направлению) и **противоположно направленными** (направлены в противоположные стороны).

1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то их координаты пропорциональны с положительным коэффициентом, т.е. существует такое число $k > 0$, что $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Векторы $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ сонаправлены тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = k > 0.$$

2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то их координаты пропорциональны с отрицательным коэффициентом, т.е. существует такое число $k < 0$, что $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Векторы $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ противоположно направлены тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = k < 0.$$

< Скалярное произведение >

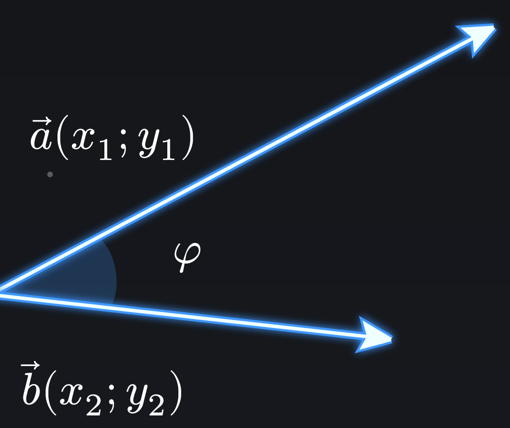
Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если известны координаты векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то вычислить скалярное произведение можно как сумму произведений соответствующих координат.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

< Косинус угла между ненулевыми векторами >

Выразим косинус угла между векторами из формулы скалярного произведения:



$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Математика ОГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.
Среди них есть:

- Физика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Информатика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Русский язык: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: Телеграм | YouTube | ВКонтакте | MAX

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: Телеграм | YouTube | MAX
- Физика: Телеграм
- Информатика: Телеграм
- Русский язык: Телеграм

До встречи!

Команда Профиматики