Вся теория для заданий №4-5 ЕГЭ по профильной математике

Влад Вуль

Игорь Уколов

В данном файле представлена **вся теория, необходимая для заданий №4-5** из ЕГЭ по профильной математике.

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по ссылке или QR коду:

Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

« Задания 4-5 »

Определение. Вероятность события – это числовая характеристика, которая отражает степень уверенности в том, что это событие произойдёт.

В общем случае мы проводим серию одинаковых ***экспериментов***, в каждом из которых может произойти один из N ***исходов*** (при этом все исходы встречаются примерно поровну). Обозначим за A некоторый исход (мы также будем называть его ***элементарным событием***) эксперимента. Вероятностью элементарного события A будем называть число

$$P(A) = \frac{1}{N}.$$

Например, в эксперименте по бросанию монетки есть всего два элементарных исхода (либо выпадет орёл, либо выпадет решка), поэтому вероятность каждого из исходов равна $\frac{1}{2}$. В эксперименте с бросанием кубика у нас уже может быть 6 исходов (выпало число от 1 до 6), поэтому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$.

Мы можем искать вероятность не одного элементарного события, а сразу нескольких. Пусть у нас есть N возможных исходов и мы выбираем из них $N(A)$, которые будем называть ***благоприятными***. Событие A будет состоять в том, что в случайном эксперименте произошёл один из $N(A)$ благоприятных исходов. Тогда вероятностью события A будем называть число.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Пример. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра окажется чётной?

Всего у нас 10 возможных элементарных исходов (нажата цифра от 0 до 9). Вероятности этих исходов равны. Благоприятных у нас 5 исходов (нажата цифра $0, 2, 4, 6, 8$). Значит, вероятность того, что случайно нажатая цифра окажется чётной, равна

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Свойства вероятности

- Вероятность – это число в промежутке от 0 до 1 $(0 \leqslant P \leqslant 1)$.
- Сумма вероятностей всех элементарных исходов эксперимента равна 1.
- Пусть у нас есть событие A. За $\overline{A}$ обозначим событие «событие A не произошло». Тогда верно следующее равенство

  $$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

  События A и $\overline{A}$ называют ***противоположными***.
- Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно наступит в результате данного опыта. Его вероятность равна 1.
- Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдёт в результате проведения опыта, обозначается через $\varnothing$.
  Его вероятность равна 0.

< Задачи на монеты >

Подбросим обычную монету. Элементарными исходами являются выпадение каждой из сторон. Всего их $N = 2$.

$P_{\text{О}}$ – вероятность выпадения орла

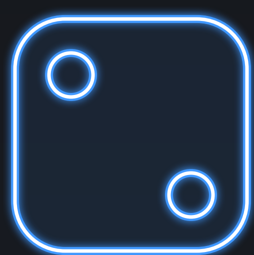
$P_{\text{Р}}$ – вероятность выпадения решки

$$P_{\text{О}} = P_{\text{Р}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

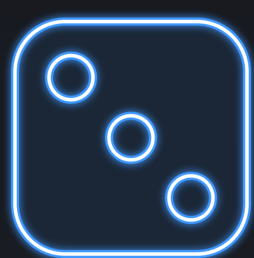
< Задачи на кубики >

Бросаем игральный кубик. Элементарными исходами являются выпадения граней кубика. Всего их $N = 6$. Они равновероятны.

P_2 – вероятность выпадения двойки
P_3 – вероятность выпадения тройки



$$P_2 = \frac{1}{6}$$



$$P_3 = \frac{1}{6}$$

Благоприятных событий $N(A) = 1$ (выпадение двух/трёх).

< Независимые события >

Если вероятность события A не зависит от события B (то есть $P(A|B) = P(A)$), и вероятность события B не зависит от события A (то есть $P(B|A) = P(B)$), то события A и B называются ***независимыми***. Событие $A \cap B = A \cdot B$, состоящее в том, что одновременно произошли события A и B, будем называть ***произведением*** событий A и B. Тогда, если события A и B независимы, то верна следующая формула:

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Если у нас больше чем 2 независимых события и если они все попарно независимы, то вероятность того, что все эти события произойдут одновременно, равна произведению вероятностей этих событий. Например, если у нас есть три события A, B и C, причём A и B независимы, A и C независимы, B и C независимы. Тогда

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

вероятность произведения трёх попарно независимых событий равна произведению их вероятностей.

< Зависимые события >

События являются ***зависимыми***, если либо $P(A|B) \neq P(A)$, либо $P(B|A) \neq P(B)$. В этом случае мы будем использовать более общую формулу:

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность второго при условии, что первое событие произошло.

Несовместные события

Пусть события А и В не могут происходить одновременно, они называются ***несовместными***. Событие $A \cup B = A + B$, состоящее в том, что произошло либо событие A, либо событие B, либо сразу оба, назовём *суммой* событий A и B. Тогда верна следующая формула:

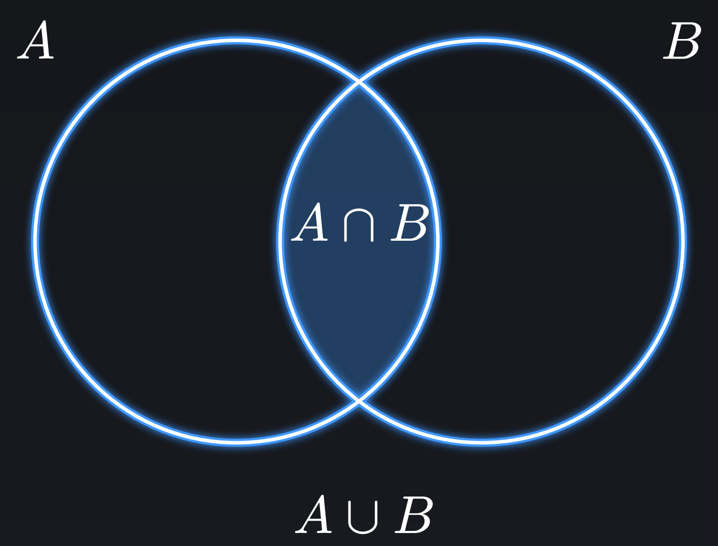
$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B),$$

вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Совместные события

Если события A и B могут происходить одновременно, то они являются ***совместными***. Если события A и B являются совместными, то событие $A \cap B$ непусто, поэтому $P(A \cap B) \neq 0$. Следовательно, в случае совместных событий A и B верна следующая общая формула:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$



вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления.

Условная вероятность

$P(B|A)$ – это вероятность события B при условии, что событие A произошло. Для её нахождения можно использовать следующую формулу:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)},$$

условная вероятность $P(B|A)$ равна отношению вероятности совместного появления событий A и B к вероятности произошедшего события A.

< Формула Бернулли >

Пусть мы проводим испытание, в котором могут быть два исхода (успех или неудача), при этом вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи $q = 1 - p$. Тогда если мы проводим n испытаний, то вероятность того, что k раз будет успех, равна

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

< Задачи, в которых ошибаются >

Задача на фломастеры

В коробке 5 синих, 9 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Благоприятными являются две ситуации:

1. Первым выбрали синий фломастер, а вторым красный.
2. Первым выбрали красный фломастер, а вторым синий.

Всего у нас $5 + 9 + 11 = 25$ фломастеров.

В первом случае вероятность выбрать первым синий фломастер равна $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$. После этого всего осталось 24 фломастера, из которых 9 красных, значит, вероятность выбрать вторым красный фломастер равна $\frac{9}{24}$. Следовательно, вероятность выбрать первым синий, а вторым красный фломастеры равна $\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24}$.

Теперь считаем вероятность второй ситуации.

Вероятность выбрать первым красный фломастер равна $\frac{9}{25}$. После этого всего осталось 24 фломастера, из которых 5 синих, значит, вероятность выбрать вторым синий фломастер равна $\frac{5}{24}$. Следовательно, вероятность выбрать первым красный, а вторым синий фломастеры, равна:

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{24}.$$

Итоговая вероятность – сумма вероятностей этих случаев:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{24} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24} = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{12} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

Ответ: $0{,}15$.

Задача на кофейные автоматы

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

У нас есть два события:

1. кофе закончится в первом автомате
2. кофе закончится во втором автомате.

Вероятность каждого события по условию равна 0,1. Данные события являются совместными. Вероятность их пересечения (т.е. кофе закончится в обоих автоматах) по условию равна 0,03. Соответственно мы можем найти вероятность события: «кофе закончится хотя бы в одном автомате» по формуле для совместных событий. Имеем: $0{,}1 + 0{,}1 - 0{,}03 = 0{,}17$. А событие «кофе останется в двух автоматах» противоположно событию «кофе закончится хотя бы в одном автомате». Соответственно, искомая вероятность: $1 - 0{,}17 = 0{,}83$.

Ответ: $0{,}83$.

Задача про артиллерийскую стрельбу

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,8?

Вероятность уничтожения цели с первого выстрела равна $0{,}4 < 0{,}8$, значит, нужны ещё выстрелы.

Вероятность уничтожить цель со второго выстрела: $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$. Т.е. нам нужно промахнуться первым выстрелом (это артиллерист делает с вероятностью $1 - 0{,}4 = 0{,}6$), а вторым выстрелом попасть (это артиллерист делает по условию с вероятностью 0,6).

Значит, поразить цель за два выстрела можно с вероятностью: $0{,}4 + 0{,}36 = 0{,}76 < 0{,}8$, значит, нужны ещё выстрелы.

Вероятность уничтожить цель с третьего выстрела: $0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$. Т.е. нам нужно первые два раза промахнуться (вероятность промаха при первом выстреле: $1 - 0{,}4 = 0{,}6$, при втором: $1 - 0{,}6 = 0{,}4$) и третий раз попасть (вероятность этого по условию равна $0{,}6$).

Вероятность уничтожить цель за 3 выстрела: $0{,}76 + 0{,}144 = 0{,}904 > 0{,}8$. Значит, нам нужно 3 выстрела.

Ответ: 3.

Задача про круглый стол

За круглый стол на 41 стул в случайном порядке рассаживаются 39 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Пусть первая девочка займёт произвольное место. Тогда для второй девочки остаётся 40 свободных стульев, из которых ей подходят 2 (т.к. нужно чтобы между двумя девочками сидел один мальчик, то получается, что подходят два места «через одного» относительно первой девочки).

Соответственно имеем:

$$\frac{2}{40} = 0{,}05.$$

Ответ: 0,05.

Задача про монету

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

С помощью формулы Бернулли найдём вероятности событий «выпадет ровно 5 орлов» и «выпадет ровно 4 орла».
Вероятность того, что выпадет ровно 5 орлов, равна

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Вероятность того, что выпадет ровно 4 орла, равна

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Найдём отношение вероятностей:

$$\frac{252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{252}{210} = 1{,}2.$$

Ответ: 1,2.

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Математика ОГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.
Среди них есть:

- Физика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Информатика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Русский язык: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: Телеграм | YouTube | ВКонтакте | MAX

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: Телеграм | YouTube | MAX
- Физика: Телеграм
- Информатика: Телеграм
- Русский язык: Телеграм

До встречи!

Команда Профиматики