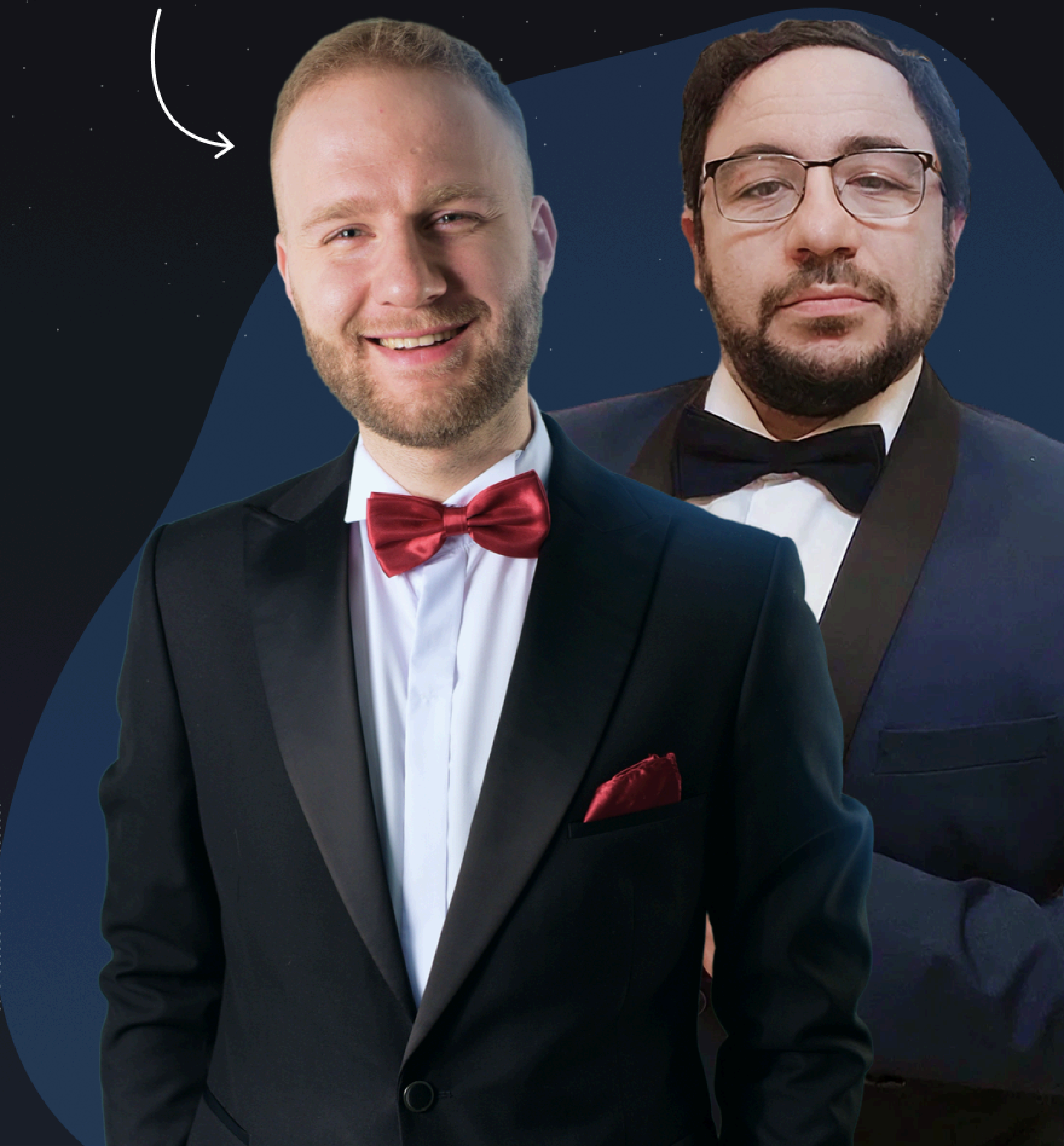
Вся теория для задания №6 ЕГЭ по профильной математике

Влад Вуль

Игорь Уколов



В данном файле представлена **вся теория, необходимая для задания №6** из ЕГЭ по профильной математике.

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по ссылке или QR коду:

Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

«Задание 6»

‹ Формулы сокращенного умножения ›

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

‹ Квадратные уравнения ›

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

При этом коэффициент $a \neq 0$, так как иначе уравнение сведется к линейному.

Определение. Количество решений квадратного уравнения определяет выражение, которое называется **дискриминантом** квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac$$

$D = 0$ → Два решения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D > 0$ → Одно решение

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$D < 0$ → Решений нет

Пример.

$$9x^2 - 8x - 1 = 0.$$

Шаг 1: Вычислим дискриминант квадратного уравнения.

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1) = 64 + 36 = 100.$$

Шаг 2: Сделаем вывод о количестве корней квадратного уравнения.

$$D > 0 \Rightarrow \text{Уравнение имеет } 2 \text{ различных решения.}$$

Шаг 3: Найдем значения корней.

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{8 + 10}{18} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{8 - 10}{18} = -\frac{1}{9}.$$

Определение. Квадратные уравнения, у которых коэффициент b равен 0 или коэффициент c равен 0, называются **неполными**.

Как решать неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$?

Шаг 1: Вынести общий множитель x за скобки.

$$ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax + b) = 0.$$

Шаг 2: Каждый из множителей приравнять к нулю.

$$x(ax + b) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ , \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$$

Пример.

$$5x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(5x-2) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ , \\ 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0{,}4. \end{array}\right.$$

Как решать неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

Шаг 1: Перенести коэффициент c в правую часть с противоположным знаком и обе части уравнения поделить на a.

$$ax^2 + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Шаг 2: Если правая часть отрицательна, то решений нет. Если правая часть неотрицательна, то корни вычисляются следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Пример.

$$x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{4} = 2\ , \\ x = -\sqrt{4} = -2. \end{array}\right.$$

< Теорема Виета для приведённого квадратного уравнения >

Определение. Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведённым**.

Теорема Виета: Если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Обратная теорема Виета: Если числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

На практике мы чаще будем пользоваться обратной теоремой Виета.

Рассмотрим пример:

Пример. Найдём корни уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ с помощью обратной теоремы Виета.

Мы будем искать два числа x_1 и x_2 такие, что:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = 8. \end{cases}$$

Выпишем всевозможные варианты разложения числа 8 в произведение двух целых чисел:

$$\begin{array}{cc} 1 \cdot 8 & 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot (-8) & -2 \cdot (-4) \end{array}$$

Заметим, что $2 + 4 = 6$, значит, корнями уравнения будут $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Примечание: На самом деле, не всегда обязательно выписывать всевозможные разложения q в произведение целых чисел, обычно нужные числа можно подобрать в уме.

< Кубические уравнения >

Определение. Кубическим уравнением называется уравнение вида $f^3(x) = a$

Пример.

$$(x+2)^3 = 27.$$

Шаг 1: Извлечем корень третьей степени из обеих частей уравнения. Он извлекается из любых чисел, в отличие от квадратного корня, поэтому никакие ограничения нам не нужны.

$$(x+2)^3 = 27;$$

$$x+2 = 3.$$

Шаг 2: Решим получившееся линейное уравнение:

$$x+2 = 3;$$

$$x = 1.$$

Примечание: с большой вероятностью формулы (4-7) в этом задании нам не понадобятся.

< Рациональные уравнения >

Определение. Рациональным уравнением называется уравнение вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

$P(x)$, $Q(x)$ являются многочленами.

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Поэтому для решения рационального уравнения мы будем использовать следующий равносильный переход:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример.

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = 0 \iff \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x + 3 \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2\,, \\ x=-3\,, \end{array} \right. \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Мы видим, что из-за условия, накладываемого на знаменатель, $x = -3$ является посторонним корнем и нам надо его отбросить. Таким образом, $x = 2$ — единственный корень нашего уравнения.

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = a$

Если правая часть отрицательная, то уравнение решений не имеет. Если правая часть неотрицательная, то для решения уравнения мы возводим обе части уравнения в квадрат, избавляясь от иррациональности.

$$\sqrt{f(x)} = a$$

$a < 0$ → Решений нет

$a \geqslant 0$ → $f(x) = a^2$

Пример 1.

$$\sqrt{2x^2 + 3x} = -1$$

Уравнение не имеет решений, поскольку правая часть уравнения отрицательная.

Пример 2.

$$\sqrt{2x+5}=3$$

Уравнение $\sqrt{2x+5}=3$ имеет решения, поскольку правая часть уравнения положительная. Для его решения возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{2x+5}=3 \Longleftrightarrow 2x+5=9 \Longleftrightarrow 2x=4 \Longleftrightarrow x=2.$$

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

Основная идея решения: Для решения уравнений данного типа мы возводим в квадрат обе части.

Важно! Необходимо учесть ограничения на подкоренные выражения.

Замечание: Ограничения достаточно поставить только на **одну** из частей уравнения. Происходит это потому, что после возведения в квадрат у нас подкоренные выражения приравниваются $(f(x)=g(x))$. Если одно из них было неотрицательным, то поскольку они равны, второе тоже будет автоматически неотрицательным.

Таким образом, получаются следующие равносильные переходы.

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$$

Пример.

$$\sqrt{5x-3}=\sqrt{x+2}.$$

Шаг 1: Возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корней. Не забудем ограничения: здесь удобнее их ставить на подкоренное выражение в правой части уравнения ($x+2\geq 0$).

$$\sqrt{5x-3}=\sqrt{x+2} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-3=x+2, \\ x+2\geq 0. \end{cases}$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение с учетом ограничений.

$$\begin{cases} 5x-3=x+2, \\ x+2\geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x=5, \\ x\geq -2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1{,}25, \\ x\geq -2, \end{cases} \Longleftrightarrow x=1{,}25.$$

Выводы: Найденный корень $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию, полученному из ограничений ($x \geq -2$). Значит, он является корнем исходного уравнения.

3. Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Основная идея решения: Как и в предыдущих двух типах иррациональных уравнений, мы будем возводить в квадрат обе части. Важно понимать, что это не является равносильным переходом и нам нужно будет это учитывать.

Почему переход не является равносильным?

Рассмотрим неверное равенство:

$$\sqrt{9} = -3.$$

Теперь возведем обе части уравнения в квадрат.

$$9 = 9.$$

Мы видим, что равенство стало верным. Переход не является равносильным.

Как так получилось?

Левая и правая части исходного равенства равны по модулю, но противоположны по знаку. После возведения в квадрат пропадает различие в знаках и равенство становится верным. У нас есть два пути, что с этим делать.

Способ 1: Использование равносильного перехода

Суть: Хотим учесть ограничения сразу, чтобы переход от исходного уравнения был равносильным.

Важно!!! После возведения в квадрат обеих частей уравнения надо ставить ограничения именно на правую часть уравнения.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример.

$$\sqrt{2x+5}=x+1.$$

Шаг 1: Возводим в квадрат обе части уравнения и учитываем ограничения на правую часть для реализации равносильного перехода.

$$\sqrt{2x+5}=x+1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+5=x^2+2x+1, \\ x+1\geq 0. \end{cases}$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнения с учетом ограничений.

$$\begin{cases} 2x+5=x^2+2x+1, \\ x+1\geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ x\geq -1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x\geq -1. \end{cases} \Longleftrightarrow x=2.$$

Выводы: Первый найденный корень $x=2$ удовлетворяет условию, полученному из ограничений ($x\geq -1$), а второй корень $x=-2$ не удовлетворяет этому условию. Значит, корнем исходного уравнения является только $x=2$.

Почему нет ограничений на левую часть?

Заметим, что после возведения в квадрат подкоренное выражение в левой части исходного уравнения будет равно квадрату правой. Так как квадрат правой части — это всегда неотрицательное число, то и подкоренное выражение в левой части не может быть отрицательным.

Способ 2: Проверка в конце.

При возведении в квадрат не ставим никаких ограничений, но проверяем в конце все получившиеся корни на выполнение исходного уравнения.

Пример.

$$\sqrt{x+2}=x$$

Шаг 1: Возводим в квадрат обе части уравнения, не учитывая ограничения на правую часть.

$$\sqrt{x+2}=x;$$

$$x+2=x^2;$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9;$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Шаг 3: Мы получили два корня. Выполним проверку полученных корней, подставив в исходное уравнение вместо x сначала -1, а затем 2:

$$x = -1 : \sqrt{-1+2} \neq -1 \text{ — корень не подходит},$$

$$x = 2 : \sqrt{2+2} = 2 \text{ — корень подходит}.$$

Мы получили, что $x = 2$ является корнем, а $x = -1$ не является корнем.

Ответ: $x = 2$.

< Показательные уравнения >

Определение. Выражение вида a^b называется **степенным**. При этом, число a называется **основанием** степени, а число b - **показателем** степени.

Пример.

$$7^{x+1}$$

Число 7 является основанием степени, выражение $x + 1$ — показателем степени.

Свойства степеней $(a > 0, b > 0)$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Определение. Уравнение, в котором есть выражение с переменной в показателе степени, называется **показательным**.

Пример.

$$5^{x+3} = 125.$$

В левой части уравнения стоит выражение, где $x + 3$ — показатель степени. Поэтому данное уравнение является показательным.

1. Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a \neq 1)$

Уравнение такого вида решается с помощью равносильного перехода:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Пример.

$$3^{x+5} = 3^7.$$

Заметим, что основания степеней одинаковы, значит можно приравнивать показатели:

$$3^{x+5} = 3^7;$$

$$x + 5 = 7;$$

$$x = 2.$$

2. Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = c \cdot b^{f(x)}$

Уравнение такого вида решается с помощью равносильного перехода:

$$a^{f(x)} = c \cdot b^{f(x)} \iff \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = c$$

Пример.

$$30^{x+1} = 9 \cdot 10^{x+1}.$$

Шаг 1: Перекинем все степени в одну часть.

$$30^{x+1} = 9 \cdot 10^{x+1};$$

$$\left(\frac{30}{10}\right)^{x+1} = 9;$$

$$3^{x+1} = 9.$$

Шаг 2: Представим правую часть в виде степени с таким же основанием, как в левой части.

$$3^{x+1} = 9;$$

$$3^{x+1} = 3^2.$$

Шаг 3: Заметим, что уравнение свелось к уравнению первого типа. Применим равносильный переход.

$$3^{x+1} = 3^2;$$

$$x + 1 = 2;$$

$$x = 1.$$

< Логарифмические уравнения >

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется такое число c, что выполняется равенство:

$$a^c = b.$$

Запись $\log_a b = c$ означает: $a^c = b$.

Пример 1.

$$\log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9.$$

Пример 2.

$$\log_4 2 = 0{,}5 \iff 4^{0{,}5} = 2.$$

Ограничения на логарифмы

Выражение $\log_a b$ имеет смысл, только если:

1) $a > 0$; 2) $a \neq 1$; 3) $b > 0$.

Почему такие ограничения?

1) Возводить в произвольную степень мы можем только положительные числа. Поэтому основание логарифма a положительно: $a > 0$.

2) Если $a = 1$, то выражение теряет смысл, так как 1 в любой степени равно 1. Например, $\log_1 2$ - это степень в которую нужно возвести 1, чтобы получить 2. Такой степени не существует. Поэтому логарифмы по основанию 1 не рассматриваются.

3) Так как из нашего определения b — это результат возведения положительного числа a в степень c ($b = a^c$), то этот результат может быть только положительным. Поэтому $b > 0$.

Свойства логарифмов

Примечание: Во всех свойствах $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a \neq 1$.

$$a^{\log_a b} = b$$

$$k = \log_a a^k$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

1. Логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Основная идея решения:

Избавиться от логарифмов, возведя число a в степени, которые стоят в левой и правой частях исходного уравнения. Это даст нам равенство вида $f(x) = g(x)$

Важно! Необходимо учесть ограничения на логарифмы.

Замечание: Ограничения достаточно поставить только на **одну** из частей уравнения. Происходит это потому, что после избавления от логарифмов мы получаем равенство $f(x) = g(x)$. Если $f(x) > 0$, то и $g(x) > 0$ вследствие их равенства.

В результате получаем следующие равносильные переходы:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример.

$$\log_2(x-1)=\log_2(3x-7).$$

Шаг 1: Избавимся от логарифмов. Не забудем ограничения: здесь удобнее их ставить на логарифм в левой части уравнения ($x-1>0$):

$$\log_2(x-1)=\log_2(3x-7);$$

$$\begin{cases} x-1=3x-7, \\ x-1>0. \end{cases}$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение с учетом ограничений.

$$\begin{cases} x-1=3x-7, \\ x-1>0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=6, \\ x>1, \end{cases} \iff \begin{cases} x=3, \\ x>1, \end{cases} \iff x=3.$$

Выводы: Найденный корень $x=3$ удовлетворяет условию, полученному из ограничений ($x>1$). Значит, он является корнем исходного уравнения.

2. Логарифмическое уравнение $\log_a f(x)=b$

Основная идея решения:

Воспользоваться равносильным переходом $\log_a f(x)=b \iff f(x)=a^b$.

Пример.

$$\log_5(2x-9)=3.$$

Шаг 1: Воспользуемся равносильным переходом

$$\log_5(2x-9)=3;$$

$$2x-9=5^3.$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение.

$$2x - 9 = 5^3;$$

$$2x - 9 = 125;$$

$$2x = 134;$$

$$x = 67.$$

< Простейшие показательные и логарифмические уравнения >

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$ <u>Частный случай</u>: $a^{f(x)} = 1 \Longleftrightarrow f(x) = 0$

$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Longleftrightarrow f(x) = 0$ (при $b > 0$, $b \neq 1$)

$$\log_a f(x) = b \Longleftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0\ , \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0\ , \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Математика ОГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.
Среди них есть:

- Физика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Информатика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Русский язык: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: Телеграм | YouTube | ВКонтакте | MAX

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: Телеграм | YouTube | MAX
- Физика: Телеграм
- Информатика: Телеграм
- Русский язык: Телеграм

До встречи!

Команда Профиматики