Вся теория для задания №8 ЕГЭ по профильной математике

Влад Вуль

Игорь Уколов

В данном файле представлена **вся теория, необходимая для задания №8** из ЕГЭ по профильной математике.

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

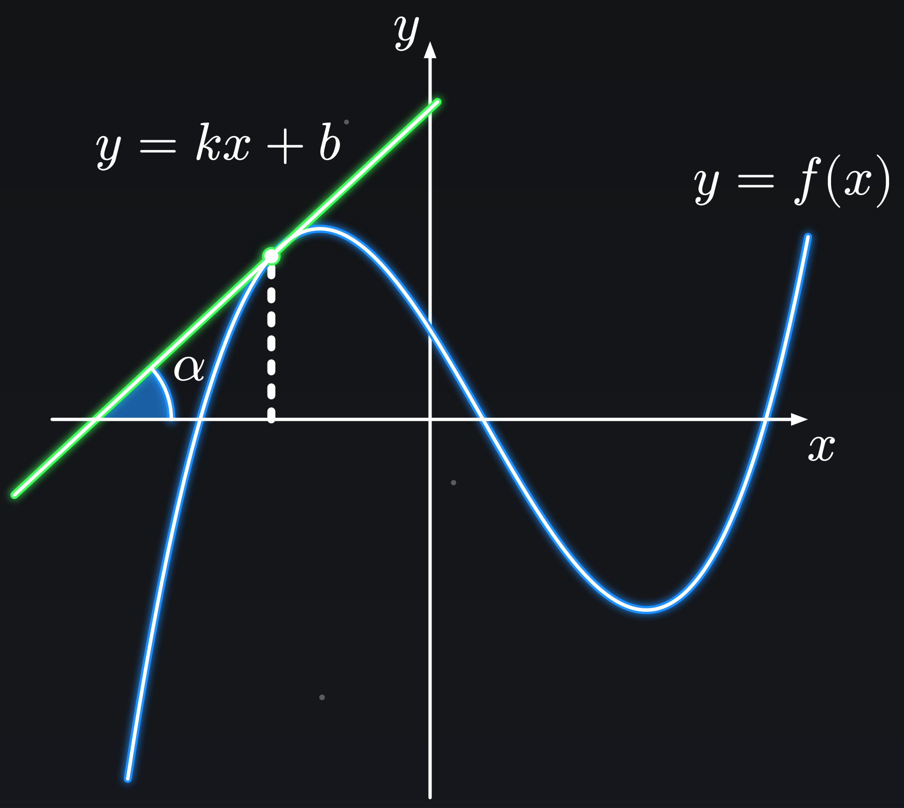
Записаться на курс можно по ссылке или QR коду:

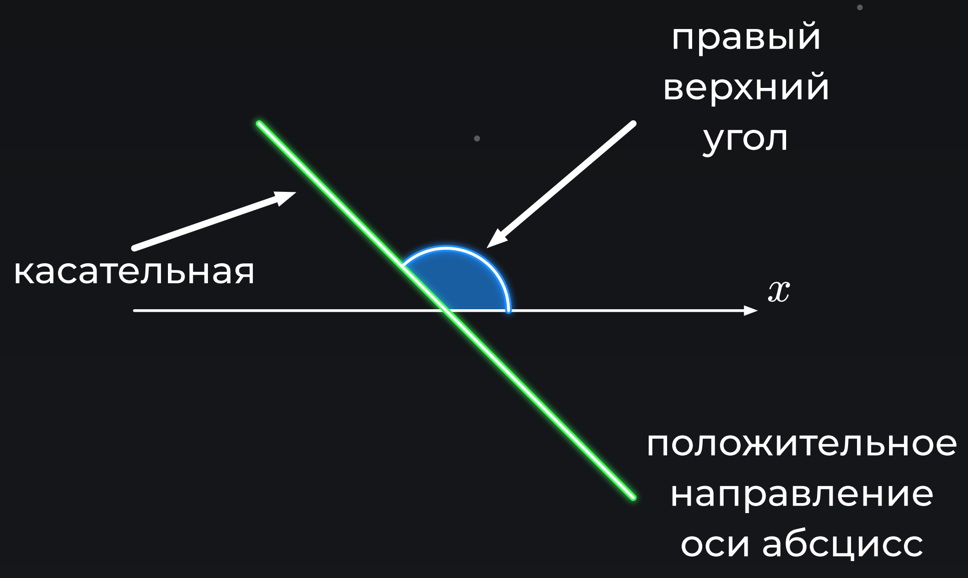
Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

« Задание 8 »

< Геометрический смысл производной >

Геометрический смысл производной в точке - это тангенс угла наклона между положительным направлением оси абсцисс (OX) и касательной к графику функции. Отсчет угла идет в положительном направлении (против часовой стрелки).

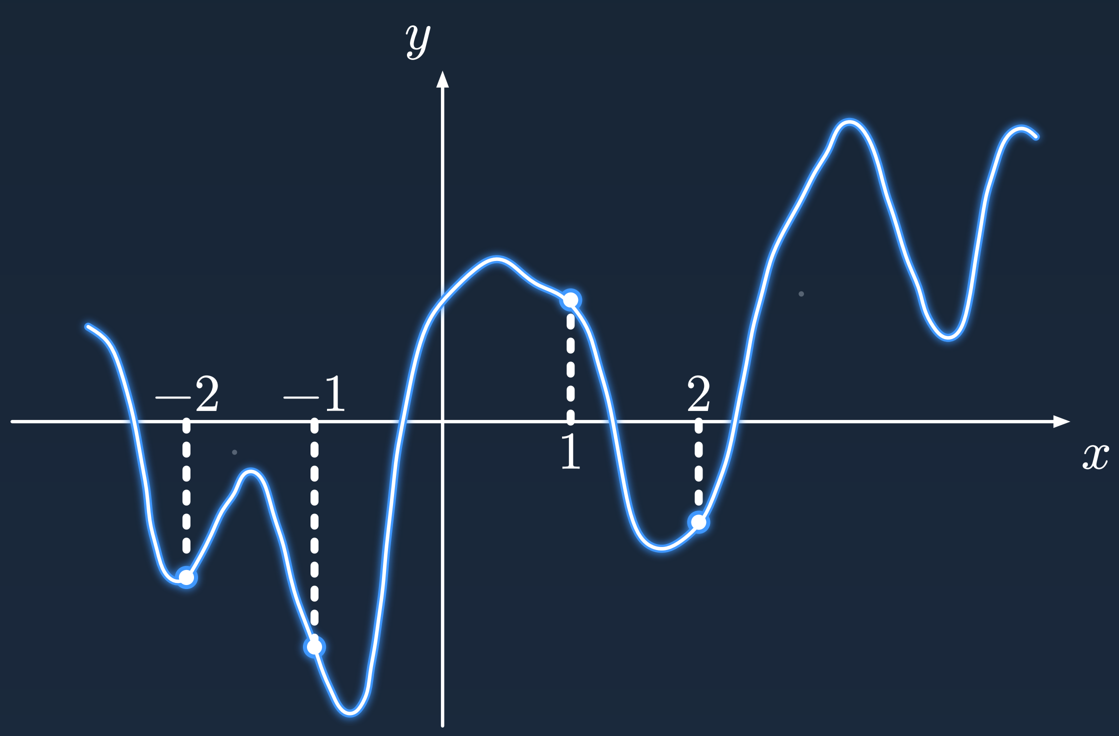




$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

< Сравнение тангенсов угла наклона по графику >

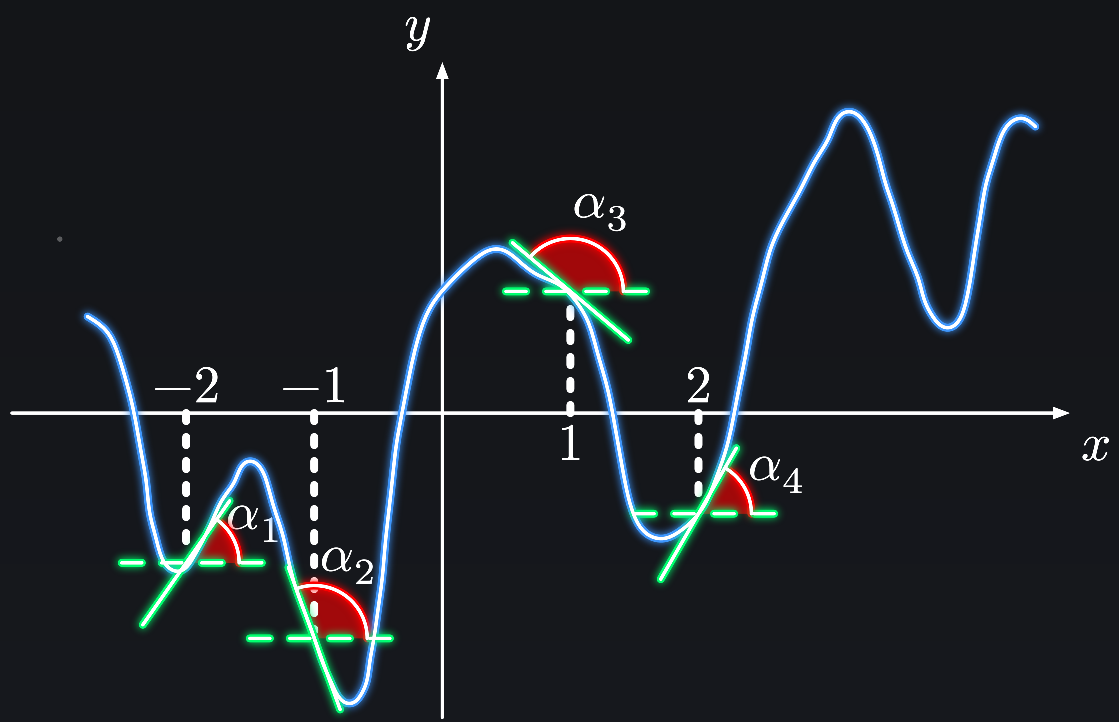
Пример. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 1, 2$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Нарисуем отрезки, касающиеся графика в точках с отмеченными абсциссами $-2, -1, 1, 2$. Поведение такого отрезка при движении по графику очень похоже на движение лыжника по склонам гор в направлении Ox.

Когда лыжник взбирается в гору, его лыжи наклонены к положительному направлению оси Ox под острым углом, а когда спускается - под тупым. А мы знаем, что производная функции в точке касания равна тангенсу угла наклона касательной. Таким образом, если угол острый, то тангенс положителен, а значит и производная функции положительна. Причём, чем ближе угол к $90°$, тем больше тангенс, а значит больше и производная. Поэтому нам требуется выбрать ту точку, в которой угол наклона острый и ближе всего к $90°$.

Проведём касательные/лыжи в заданных точках.



В точке -2 угол острый. $\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 > 0 \Longrightarrow f'(-2) > 0$.

В точке -1 угол тупой. $\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_2 < 0 \Longrightarrow f'(-1) < 0$.

В точке 1 угол тупой. $\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_3 < 0 \Longrightarrow f'(1) < 0$.

В точке 2 угол острый. $\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_4 > 0 \Longrightarrow f'(2) > 0$.

Нам нужно **наибольшее** значение, значит, угол должен быть острымю

Таких угла два — соответствующих точкам 2 и -2.

Нам нужен тот, где угол наклона ближе к $90°$. $\alpha_4 < \alpha_1 < 90° \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_4 < \operatorname{tg}\alpha_1 \Longrightarrow f'(2) < f'(-2)$. Поэтому ответ -2.

< Касательные к графикам >

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$, если выполнены 2 условия:

1) В точке x_0 прямая $y = kx + b$ и график функции $y = f(x)$ пересекаются, то есть при $x = x_0$ получаем, что

$$f(x_0) = kx_0 + b.$$

2) Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 должно совпадать с коэффициентом k прямой $y = kx + b$, то есть:

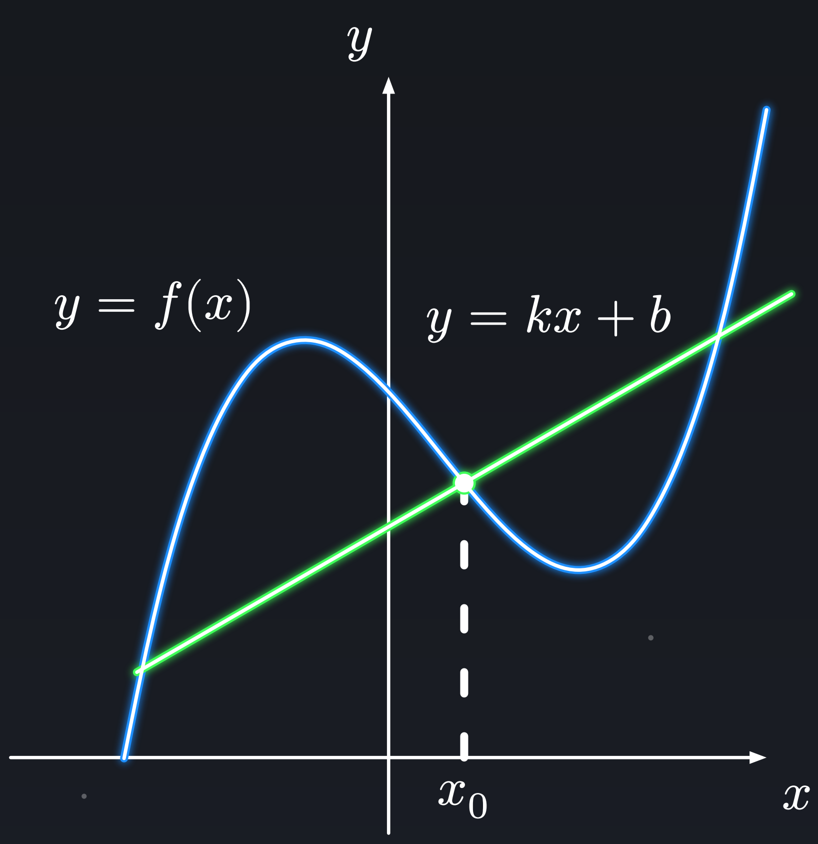
$$f'(x_0) = k.$$

В итоге получаем систему:

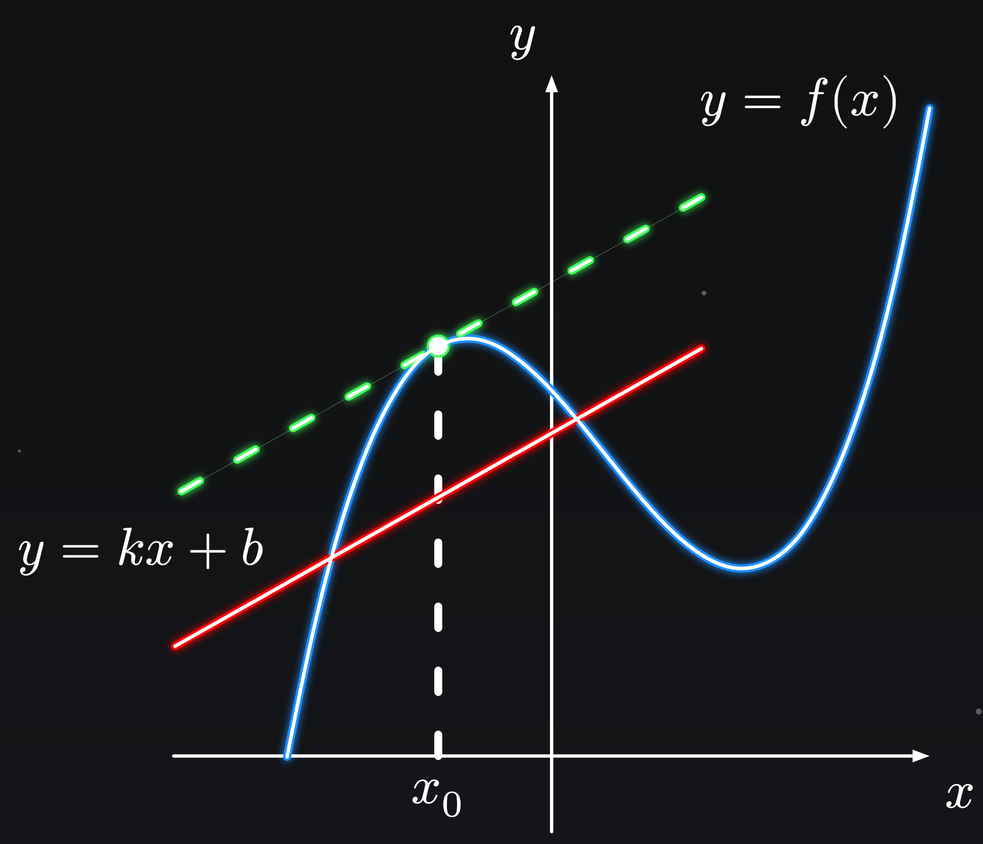
$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f'(x_0) = k. \end{cases}$$

Есть три ситуации:

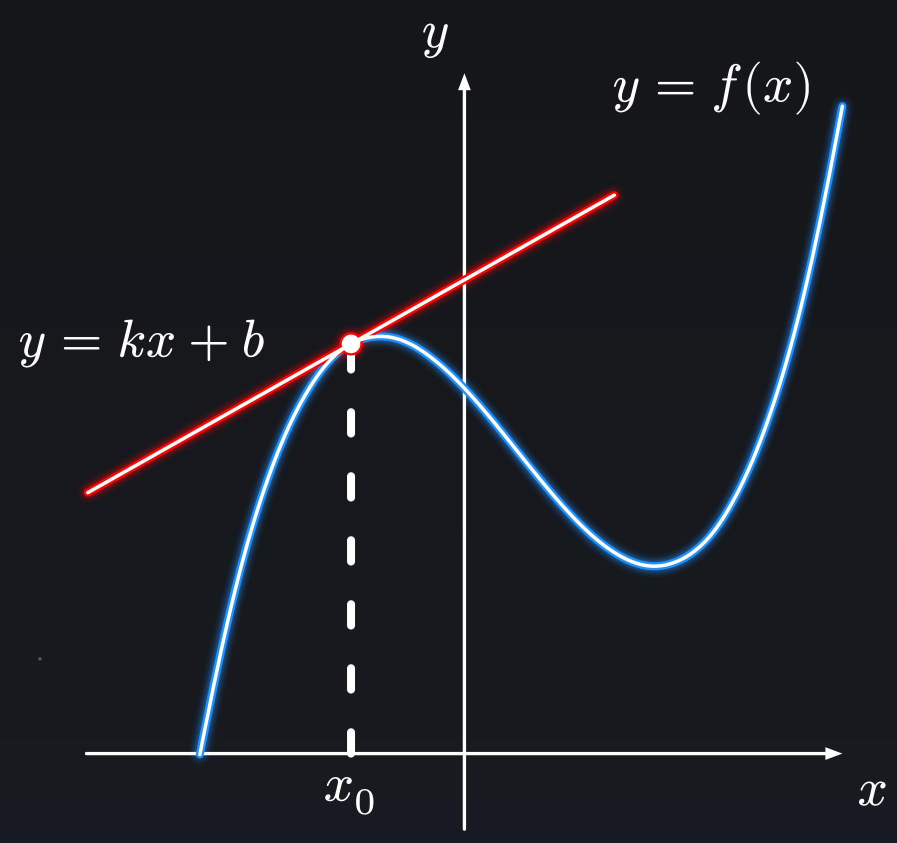
1. В точке x_0 совпадает значение функции $y = f(x)$ и значение функции $y = kx + b$, то есть $f(x_0) = kx_0 + b$, но не совпадают значения производных $f'(x_0) \neq k$. В этом случае прямая пересекает график, но не будет касаться графика.



2. В точке x_0 значение функции $y = f(x)$ и значение функции $y = kx + b$ — не совпадают, т.е. $f(x_0) \neq kx_0 + b$, но в точке x_0 совпадают их производные: $f'(x_0) = k$. В этом случае прямая $y = kx + b$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.



3. В точке x_0 совпадают значения функции $y = f(x)$ и функции $y = kx + b$, а также совпадают значения их производных:



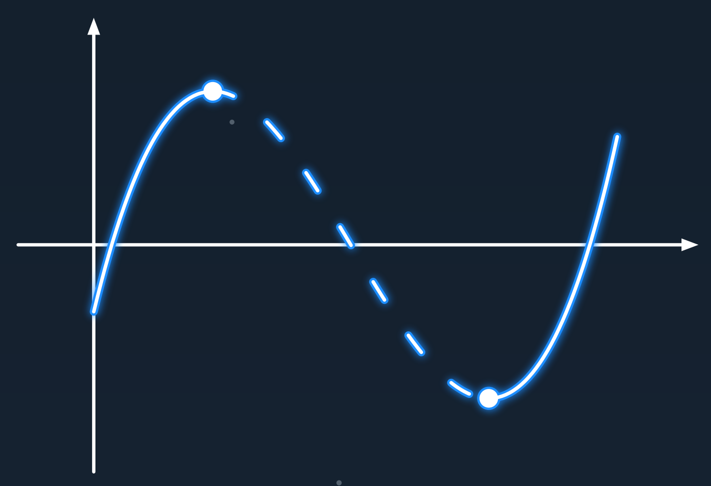
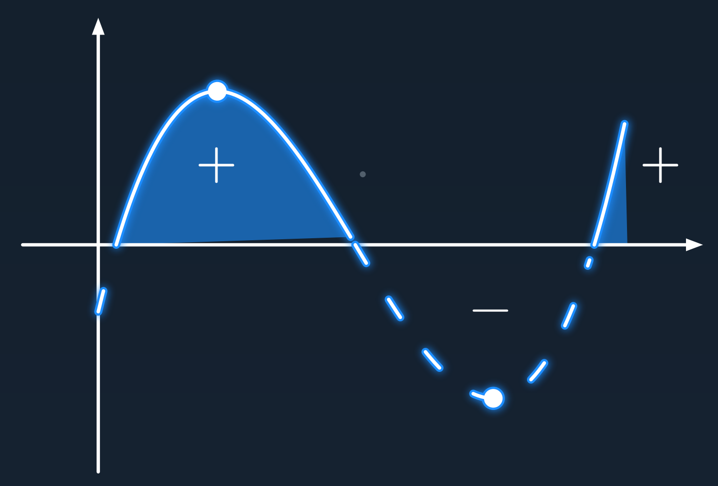
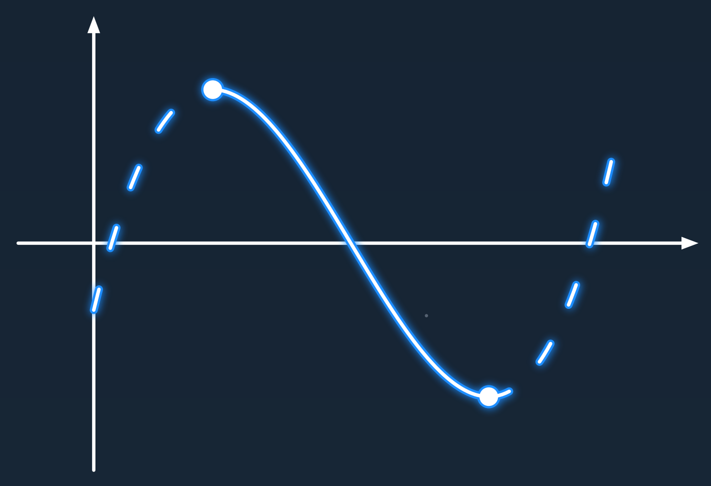
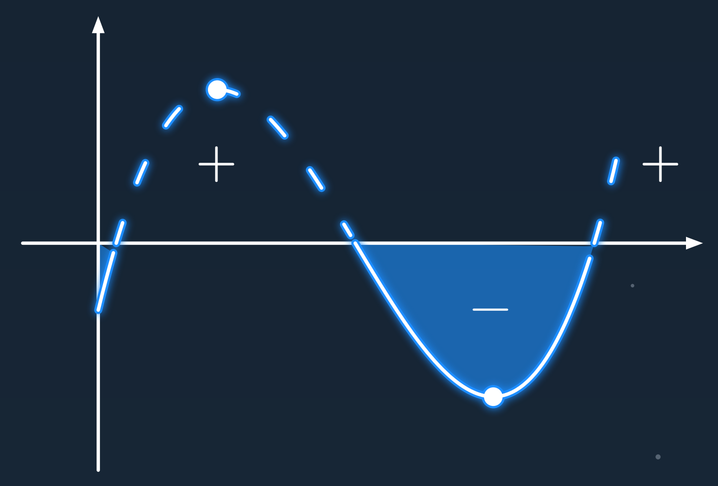
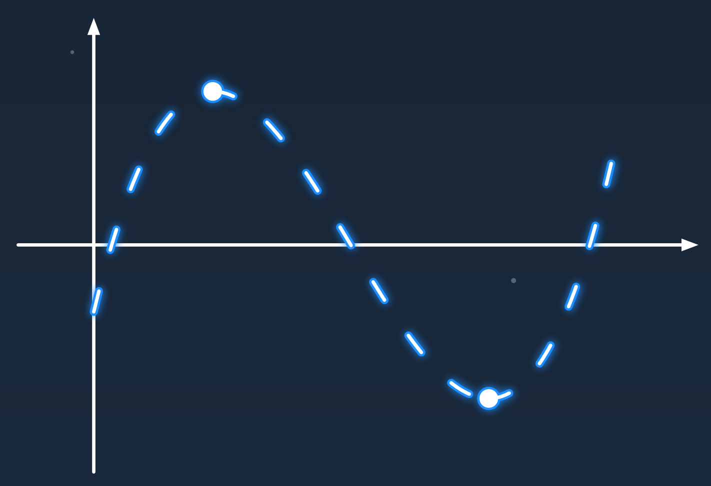
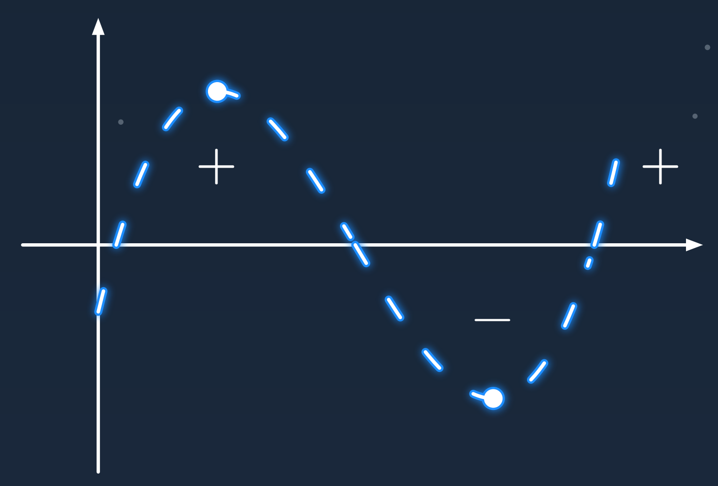
В этом случае прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

< Связь функции и производной >

Достаточное условие монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Дан график функции $y = f(x)$	**Дан график производной функции $y = f'(x)$**
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ возрастает.	Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится выше оси Ox или, иначе говоря, точки графика с положительной координатой по оси Oy.
	
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ убывает.	Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится ниже оси Ox или, иначе говоря, точки графика с отрицательной координатой по оси Oy.
	
Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки минимума или максимума функции $y = f(x)$.	Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки, в которых график производной пересекает ось Ox.
	

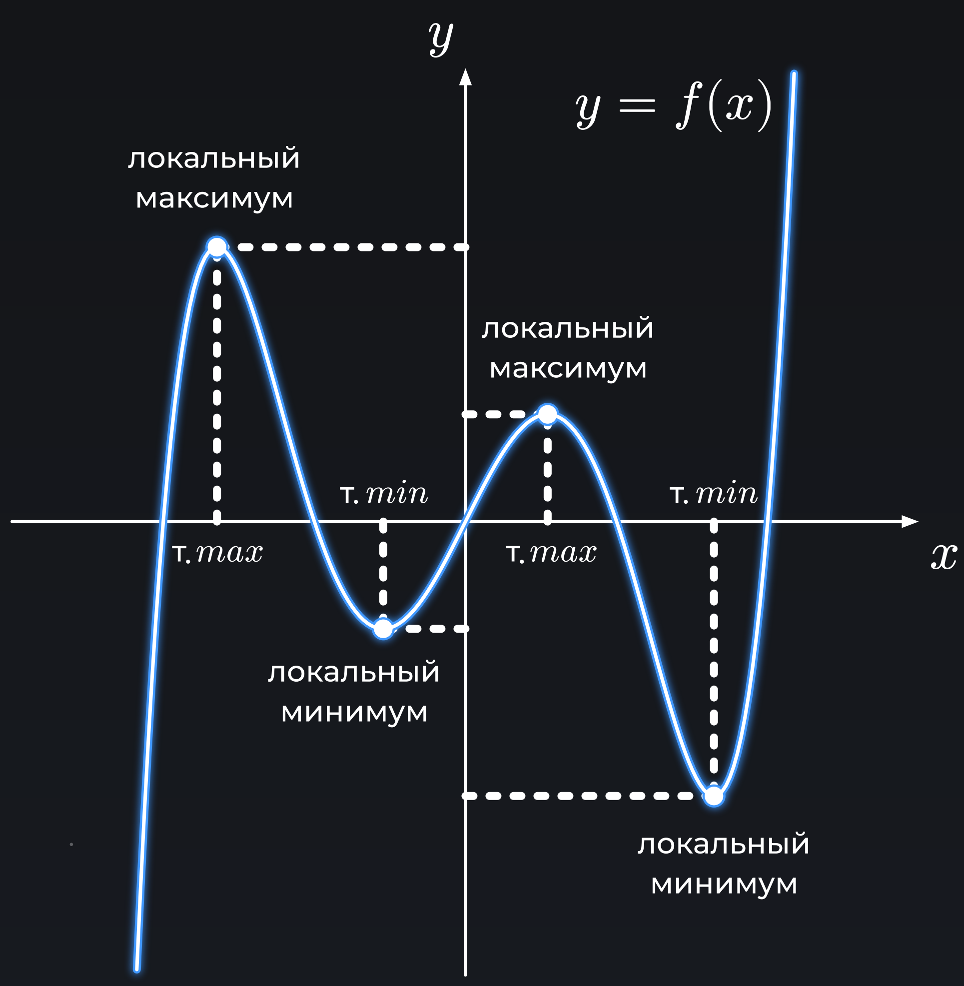
< Точки экстремума функции >

Определение. Точки, в которых производная $f'(x)$ равна 0 или не существует, называются критическими точками функции $f(x)$.

Экстремум функции — минимум или максимум этой функции.

Точка экстремума x_0 — точка, в которой функция достигает минимума или максимума.

Важное замечание. Значение в точке минимума может быть больше, чем значение в точке максимума.



Необходимое условие экстремума:

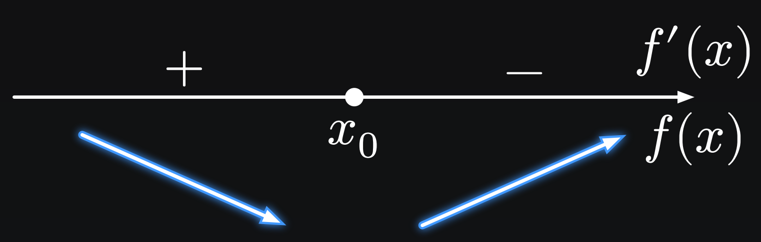
Если x_0 — точка экстремума функции $f(x) \Longrightarrow f'(x) = 0.$

То есть, во всех точках, где $f(x)$ достигает локального $\min / \max$, производная равна 0.

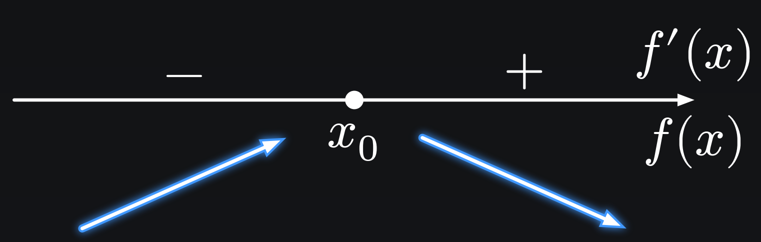
Достаточное условие экстремума:

Пусть x_0 — точка, в которой $f'(x) = 0.$

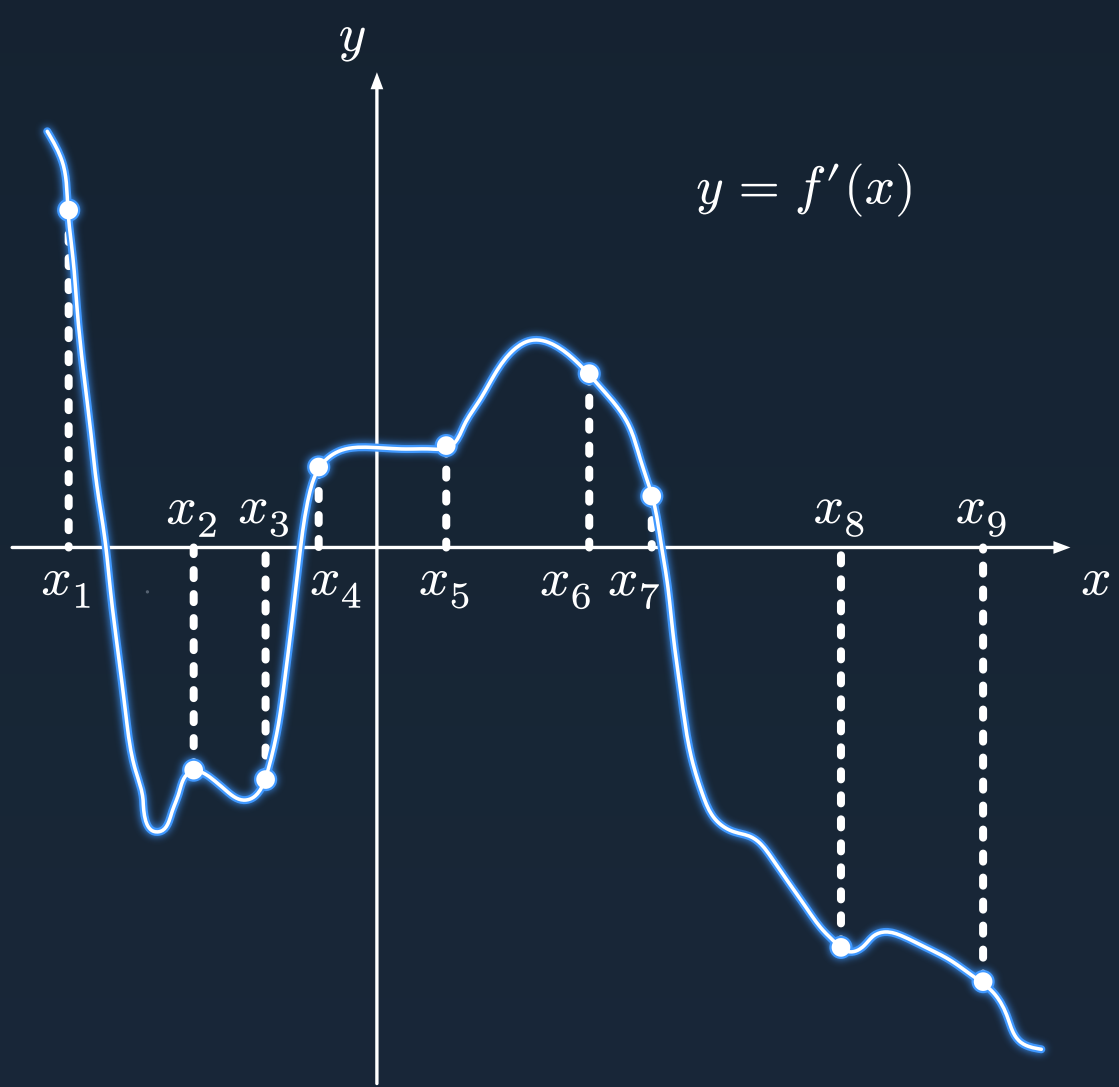
Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума.



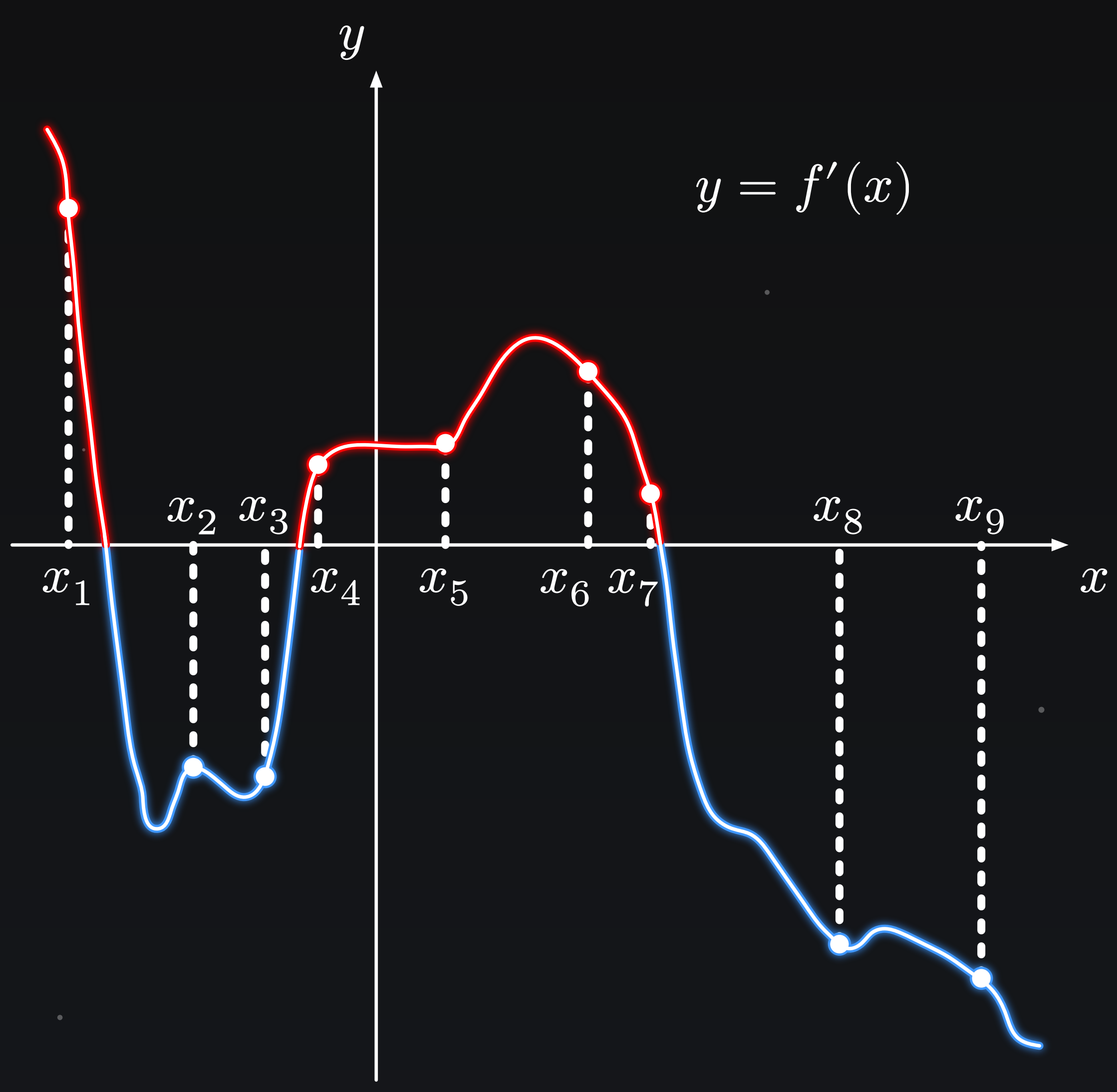
Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.



Пример. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Нам дан график производной. Нас интересуют точки на промежутках возрастания. В этих точках производная функции положительна. Значит, график производной находится выше оси Ox. Выделим промежутки, где график производной $y = f'(x)$ находится выше оси.



Видим, что точки x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 лежат в выделенных промежутках.

Ответ: 5 точек.

Важное напоминание: Внимательно читайте, какой дали график — функции или её производной.

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Математика ОГЭ: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.
Среди них есть:

- Физика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Информатика: Телеграм | YouTube | ВКонтакте
- Русский язык: Телеграм | YouTube | ВКонтакте

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: Телеграм | YouTube | ВКонтакте | MAX

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: Телеграм | YouTube | MAX
- Физика: Телеграм
- Информатика: Телеграм
- Русский язык: Телеграм

До встречи!

Команда Профиматики