

Вся теория для задания №9 ЕГЭ по профильной математике



Влад Вуль

Игорь Уколов



В данном файле представлена **вся теория, необходимая для задания №9** из ЕГЭ по профильной математике.

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь шпоры не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по [ссылке](#) или QR коду:



Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

<< Задание 9 >>

< Квадратные неравенства >

Важные напоминания перед решением неравенства

1. Проверить единицы измерения (км/ч, м/с, часы, минуты).
2. Привести всё к одним единицам (умножить/разделить на 3,6 для скорости).
3. Проверить ОДЗ (знаменатель $\neq 0$, подкоренное ≥ 0).
4. Ответ: целое число или конечная десятичная дробь.

Ед. измерения	Действие	Пример
Из м/с в км/ч	Умножить на 3,6	10 м/с = 36 км/ч
Из км/ч в м/с	Разделить на 3,6	72 км/ч = 20 м/с
Из минут в часы	Разделить на 60	15 мин = 0,25 ч
Из часов в минуты	Умножить на 60	0,5 ч = 30 мин

< Общий алгоритм решения квадратных неравенств >

Алгоритм решения $ax^2 + bx + c > 0$ (или $< 0, \geq 0, \leq 0$):

1. Привести неравенство к виду $ax^2 + bx + c \vee 0$ (где \vee — знак неравенства).
2. Найти дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.
3. Найти корни: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
4. Построить числовую прямую и отметить корни.
5. Определить знак a (направление ветвей параболы).
6. Методом интервалов определить знаки на промежутках.
7. Выбрать нужный промежуток по знаку неравенства.
8. Записать ответ в требуемом формате (целое число или десятичная дробь).

Важное напоминание: При умножении/делении неравенства на отрицательное число мы меняем знак неравенства на противоположный.

✧ **Пример 1.** При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

1. Запишем условие:

$$d \sin \varphi = k\lambda;$$

$$k = 2 \quad (\text{второй максимум}), \quad \lambda = 400 \text{ нм};$$

$$d \leq 1600 \text{ нм.}$$

2. Выразим $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d};$$

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 400}{d};$$

$$\sin \varphi = \frac{800}{d}.$$

3. Учитываем ограничение на d :

$$\sin \varphi \geq \frac{800}{1600};$$

$$\sin \varphi \geq 0,5;$$

$$\varphi \geq 30^\circ.$$

4. Минимальный угол:

$$\varphi_{\min} = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

✧ **Пример 2.** Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше $600\,000$ руб.

1. Запишем неравенство:

$$\pi(q) \geq 600\,000;$$

$$q(p - v) - f \geq 600\,000;$$

2. Подставим значения:

$$q(500 - 200) - 900\,000 \geq 600\,000;$$

$$300q - 900\,000 \geq 600\,000;$$

$$300q \geq 1\,500\,000;$$

$$q \geq \frac{1\,500\,000}{300};$$

$$q \geq 5\,000.$$

3. Наименьший объём производства:

$$q_{\min} = 5\,000 \text{ единиц.}$$

Ответ: 5000.

✧ **Пример 3.** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

1. Составим неравенство:

$$h(t) \geq 3;$$



$$1,4 + 9t - 5t^2 \geq 3;$$

$$-5t^2 + 9t + 1,4 - 3 \geq 0;$$

$$-5t^2 + 9t - 1,6 \geq 0;$$

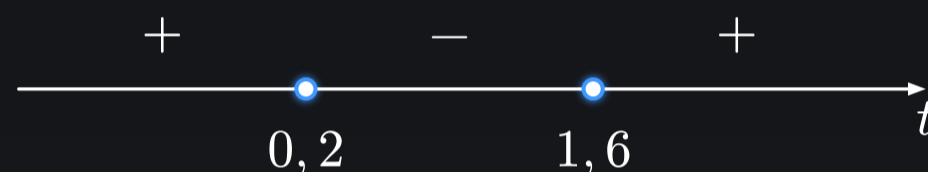
$$5t^2 - 9t + 1,6 \leq 0;$$

$$D = 81 - 4 \cdot 5 \cdot 1,6 = 81 - 32 = 49;$$

$$t_1 = \frac{9 + 7}{10} = 1,6, \quad t_2 = \frac{9 - 7}{10} = 0,2;$$

$$(t - 1,6)(t - 0,2) \leq 0$$

2. Построим числовую прямую:



3. Решение неравенства (знак \leq):

$$t \in [0,2; 1,6]$$

4. Сколько секунд мяч на высоте ≥ 3 м:

$$\Delta t = 1,6 - 0,2;$$

$$\Delta t = 1,4 \text{ секунды.}$$

Ответ: 1,4.

✧ Пример 4. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время (в мин.), $T_0 = 1600$ К, $a = -5$ К/мин², $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1870 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

$$T(t) = 1600 + 105t - 5t^2;$$

$$T(t) \leq 1870;$$

$$1600 + 105t - 5t^2 \leq 1870;$$

$$5t^2 - 105t + 270 \geq 0;$$

$$t^2 - 21t + 54 \geq 0.$$

Разложим на множители, для этого решим уравнение $t^2 - 21t + 54 = 0$.

$$D = 441 - 216 = 225 = 15^2;$$

$$t_1 = \frac{21 + 15}{2} = 18, \quad t_2 = \frac{21 - 15}{2} = 3.$$

$$(t - 3)(t - 18) \geq 0; \Leftrightarrow t \in (-\infty; 3] \cup [18; +\infty).$$

Спустя 3 минуты после включения прибор уже нагреется до 1870 К.

Ответ: 3.

✧ Пример 5. Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Подставим числовые данные из условия:

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2};$$

$$t^2 - 16t + 60 = 0;$$

$$D = 256 - 240 = 16 = 4^2;$$

$$t_1 = \frac{16 + 4}{2} = 10, \quad t_2 = \frac{16 - 4}{2} = 6.$$

Рассмотрим функцию движения автомобиля $S(t) = 24t - \frac{3t^2}{2}$. Случаю полной остановки соответствует её максимальное значение. Графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, своё наибольшее значение она принимает при

$$t = t_B = -\frac{24}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = 8.$$

Таким образом, при $t = 8$ автомобиль остановится, и решение $t_1 = 10$ отбрасывается.

Ответ: 6.

✧ **Пример 6.** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Выразим $\frac{1}{d_1}$ из формулы и подставим числовые данные:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

d_1 должно быть минимальным, значит дробь $\frac{1}{d_1}$ должна быть максимальной. Значит, выражение $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ тоже должно быть максимальным. Тогда дробь $\frac{1}{d_2}$ должна быть минимальной, а значит, d_2 должно быть максимальным. Подставим $d_2 = 180$:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180};$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{6 - 1}{180} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36};$$

$$d_1 = 36.$$

Ответ: 36.

Подписывайся на наши соцсети по математике:

- Математика ЕГЭ: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)
- Математика ОГЭ: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)

В Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые могут пригодиться тебе при подготовке к ЕГЭ.

Среди них есть:

- Физика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)
- Информатика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)
- Русский язык: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть **во всех вузах страны**. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в вузе и подписаться на наш канал по Вышмате:

- Вышмат: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#) | [MAX](#)

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей.

- Математика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [MAX](#)
- Физика: [Телеграм](#)
- Информатика: [Телеграм](#)
- Русский язык: [Телеграм](#)

До встречи!

Команда Профиматики