профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

Задача 19 профильного ЕГЭ по математике

тут можете держать
с нами мной связь, получать
бесплатные матемриалы.
методички и разборы

Содержание

1 Признаки делимости

Начнем с признаков делимости:

- Число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра чётна (то есть если его последняя цифра это 0, 2, 4, 6 или 8).

  Важно отметить, что 0 – чётен.

- Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр делится на 4.

  Например, рассмотрим число 2024, две последние цифры этого числа образуют число 24, оно делится на 4, значит 2024 делится на 4.

- Число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних трёх цифр делится на 8.

  Также рассмотрим число 2024. Из последних его трёх цифр получается число 24 (0 мы можем отбросить), 24 делится на 8, значит и 2024 делится на 8.

- Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра 0 или 5.

- Число делится на 25 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр, делится на 25 (то есть на конце должен стоять один из следующих вариантов 00, 25, 50, 75).

- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

  Например, сумма цифр числа 123 равна $1+2+3=6$, значит число 123 делится на 3.

- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр на нечётных местах минус сумма цифр на чётных местах делится на 11.

► **Пример 1.** Какие из чисел 862, 375, 99832476252, 314567891, 2024, 79255 делятся на 2? 3? 4? 5? 8? 9? 11? 25?

Решение:

1. На 2 делятся числа 862, 99832476252, 2024, так как только они на конце имеют чётную цифру.

2. Посчитаем суммы цифр каждого числа, чтобы выяснить делимость на 3 и 9:

   $862 : 8+6+2=16$. Число 16 не делится на 3 и на 9, значит и 862 не делится на них.

   375: $3+7+5=15$. Число 15 делится на 3, но не делится на 9, значит имеет место только делимость числа 375 на 3.

   99832476252: $9+9+8+3+2+4+7+6+2+5+2=57$. Число 57 делится на 3, но не делится на 9, значит, число 99832476252 делится только на 3.

   314567891: $3+1+4+5+6+7+8+9+1=44$. Число 44 не делится ни на 3, ни на 9. Таким образом и 314567891 не делится на 3 и на 9.

   2024: $2+0+2+4=8$. Очевидно, что и в этом случае число 2024 не делится на 3 и на 9.

79255: $7+9+2+5+5=28$. Также из того, что 28 не делится на 3 и 9 следует, что на них не делится и 79255.

3. Заметим, что только 24 и 52 делятся на 4 (62, 75, 91 и 55 не делятся на 4), поэтому по признаку делимости на 4 среди наших чисел только 2024 и 99832476252 делятся на 4.

4. На 5 или 0 оканчиваются только 375 и 79255, значит только они и делятся на 5.

5. На 8 могут делиться только числа, которые делятся на 4. То есть достаточно рассмотреть числа 2024 и 99832476252. Ранее мы уже выяснили, что 2024 делится на 8. При этом число 252 на 8 не делится, значит и 99832476252 не делится на 8.

6. Для каждого числа найдем разность между суммой цифр на нечётных местах и суммой цифр на чётных местах:

   862: $(2+8)-6=4$. 4 не делится на 11, значит, и 862 не делится на 11.

   375: $(5+3)-7=1$. Также получаем, что 375 не делится на 11.

   99832476252: $(2+2+7+2+8+9)-(5+6+4+3+9)=3$. Значит, 99832476252 не делится на 11.

   314567891: $(1+8+6+4+3)-(9+7+5+1)=0$. Число 0 делится на 11, значит, и 314567891 делится на 11.

   2024: $(4+0)-(2+2)=0$. Аналогично получаем, что 2024 делится на 11.

   79255: $(5+2+7)-(5+9)=0$. Значит, также число 79255 делится на 11.

7. Если число делится на 25, то оно делится и на 5, значит на 25 могут делиться только 375 и 79255. Из этих двух чисел по признаку делимости на 25 нам подходит только 375.

► **Пример 2.** Замените $*$ цифрой так, чтобы число $123*729$ делилось на 9.

Решение: Сумма цифр нашего числа равна $24+*$. Данное число должно делиться на 9, это произойдёт только, если $*=3$.

► **Пример 3.** Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составить число, которое делится на 9? на 11?

Решение: Найдём сумму наших цифр:

$$1+2+3+4+5+6+7=28.$$

Число 28 не делится на 9, значит, любое число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 не делится на 9.
Разобьём наши цифры на две группы так, чтобы сумма цифр в каждой группе была равна 14. Это можно сделать следующим образом:

$$\text{Первая группа: } 1, 6, 7.$$

$$\text{Вторая группа: } 2, 3, 4, 5.$$

Теперь расставим числа из первой группы на четные места, а из второй на нечетные: 2736415. Тогда получаем по признаку делимости на 11, что число 2736415 делится на 11.

► **Пример 4.** Делится ли число $\underbrace{5\ldots5}_{102\text{ раза}}6$ на 3?

Решение: Найдём сумму цифр данного числа:

$$5 \cdot 102 + 6 = 516.$$

Число 516 делится на 3, значит и наше искомое число делится на 3.

► **Пример 5.** Какую цифру надо поставить вместо $*$, чтобы число $314159 * 6$ делилось на 8?

Решение: По признаку делимости на 8 число $9 * 6$ должно делиться на 8. Значит число $9 * 6$ должно делиться на 4, то есть $*6$ должно делиться на 4. Тогда нам потенциально подходят числа 916, 936, 956, 976, 996. Заметим, что число 936 делится на 8, при этом оно отличается на 20 от чисел 916 и 956. Число 20 не делится на 8, значит и числа 916 и 956 не делятся на 8. Числа 976 и 936 отличаются на 40(это число делится на 8), значит число 976 делится на 8. Оставшееся число 996 не делится на 8, так как $996 - 976 = 20$ – не делится на 8. Следовательно, нам подойдет цифра 3, а также цифра 7.

2 Делимость

Определение: Целое число a *делится* на целое число $b \neq 0$, если существует целое число c, такое что $a = b \cdot c$.

Если число a делится на число b, то мы будем использовать следующее обозначение: $a \vdots b$.

Определение: Натуральное число большее 1 называется *простым*, если оно делится на себя и 1. В ином случае число называется *составным*.

Замечание: Число 1 не является ни простым, ни составным.

Определение: Число a и b называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, кроме 1.
Отметим важные свойства делимости, которые нужны при решении задач:

1. Если $a \vdots b$ и с $\vdots$ b, то $a \pm c \vdots b$ и $a \cdot c \vdots b$.

2. Если $a \vdots b$ и $a \vdots c$ и при этом b и c взаимно просты, то $a \vdots bc$.

► **Пример 1.** Какие цифры нужно поставить вместо $*$, чтобы $736 * 241 * 2 \vdots 36$?

Решение: Чтобы число $736 * 241 * 2$ делилось на 36 оно должно одновременно делиться на 4 и на 9.
По признаку делимости на 4 число $*2$ должно делиться на 4, поэтому нам подходят следующие варианты: $736 * 24112$, $736 * 24132$, $736 * 24152$, $736 * 24172$, $736 * 24192$.
Подберём оставшуюся цифру:

- $736 * 24112$: $7 + 3 + 6 + * + 2 + 4 + 1 + 1 + 2 = 26 + *$, значит нам подходит $* = 1$, то есть 736124112;

- $736 * 24132$: $7 + 3 + 6 + * + 2 + 4 + 1 + 3 + 2 = 28 + *$, значит нам подходит $* = 8$, то есть 736824132;

- $736 * 24152$: $7 + 3 + 6 + * + 2 + 4 + 1 + 5 + 2 = 30 + *$, значит нам подходит $* = 6$, то есть 736624152;

- $736 * 24172$: $7 + 3 + 6 + * + 2 + 4 + 1 + 7 + 2 = 32 + *$, значит нам подходит $* = 4$, то есть 736424172;

- $736 * 24172$: $7 + 3 + 6 + * + 2 + 4 + 1 + 9 + 2 = 34 + *$, значит нам подходит $* = 2$, то есть 736224192.

► **Пример 2.** Число делится на 4 и на 6, верно ли, что оно делится на 24?

Решение: Нет, например число 12 делится на 4 $(12 = 4 \cdot 3)$ и на 6 $(12 = 6 \cdot 2)$.
Этот пример показывает, что в свойстве 2 условие взаимной простоты обязательно (в нашем примере числа 4 и 6 не являются взаимно простыми, потому что они одновременно делятся на 2).

► **Пример 3.** Докажите, что число $n(n + 1)(n + 2)$ делится на 6 (n – натуральное число)?

Решение: Мы должны показать, что число $n(n + 1)(n + 2)$ одновременно делится на 2 и на 3. Числа n, $n + 1$, $n + 2$ идут подряд друг за другом, значит среди них есть хотя бы одно чётное число, поэтому и произведение $n(n + 1)(n + 2)$ будет чётным числом.
Три подряд идущих числа будут давать разные остатки при делении на 3, но таких остатков всего может быть 3 (0, 1 и 2). Поэтому среди чисел n, $n+1$, $n+2$ хотя бы одно даёт остаток 0, то есть делится на 3. Отсюда получаем, что и число $n(n + 1)(n + 2)$ делится на 3.

▶ **Пример 4.** Имеет ли уравнение $14x + 7y = 501$ решения в целых числах?

Решение: Мы видим, что $14x \vdots 7$ и $7y \vdots 7$, значит, и $14x + 7y$ делится на 7. При этом число 501 на 7 не делится. Получаем противоречие. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

▶ **Пример 5.** Найдите наименьшее семизначное число, делящееся на 18, цифры которого различны.

Решение: Наше число должно делиться на 2 и на 9. Наименьшее семизначное число, цифры которого различны это 1023456. Сумма цифр этого числа равна 21, то есть это число не делится на 9 (при этом на 2 оно делится). Сумма цифр семизначного числа, все цифры которого различны, не может быть меньше 21, значит нам нужно подобрать число, сумма цифр которого равна 27. Для этого нам нужно совокупно увеличить последние две цифры на 6 так, чтобы на конце стояла четная цифра. Нам подходит число 1023498.

3 Четность

Определение: Целое число *чётно*, если оно делится на 2. Иначе оно *нечётно.*

Заметим, что

- Сумма (или разность) двух чётных чисел – чётное число.
- Сумма (или разность) чётного и нечётного чисел – нечётное число.
- Сумма (или разность) нечётных чисел – чётное число.
- Произведение двух чётных чисел – чётное число.
- Произведение чётного и нечётного чисел – чётное число.
- Произведение двух нечётных чисел – нечётное число.

► **Пример 1.** Чётно или нечётно число $1 + 2 + 3 + \ldots + 2023 + 2024$?

Решение: Заметим, что в нашей сумме всего 2024 числа, причём чётных и нечётных поровну, то есть по 1012 штук. Мы можем разбить все нечётные числа на 506 пар, сумма числе в каждой паре будет чётной, значит и сумма всех нечётных чисел будет чётной. При этом у нас осталось 1012 чётных чисел, сумма которых чётна. Отсюда делаем вывод, что и вся сумма является чётным числом.

Замечание: Решить данную задачу можно и по-другому. По формуле суммы арифметической прогрессии мы получаем, что наша сумма равна $\dfrac{1+2024}{2} \cdot 2024 = 2025 \cdot 1012$ – чётное число.

► **Пример 2.** Чётно или нечётно число $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots - 2023 - 2024$?

Решение: Данную задачу решить явным подсчётом уже труднее. Вернёмся к сумме $1 + 2 + 3 + \ldots + 2023 + 2024$. Если из этой суммы вычесть число $2 \cdot 3$, то мы получим число $1 + 2 - 3 + \ldots + 2023 + 2024$. Так как мы вычли чётное число, то чётность нашего числа не изменилась. Такими вычитаниям мы можем получить из числа $1 + 2 + 3 + \ldots + 2023 + 2024$ число $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots - 2023 - 2024$, причём эти числа будут иметь одинаковую чётность, то есть $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots - 2023 - 2024$ – чётно.

► **Пример 3.** Сколько чётных чисел среди $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots, 1+2+3+\ldots+33$?

Решение: Число 1 является нечётным, число $1 + 2$ является суммой чётного и нечётного, поэтому оно также нечётно, число $1 + 2 + 3$ является чётным, число $1 + 2 + 3 + 4$ также является чётным. Заметим, что далее ситуация повторится: пятая и шестая суммы будут нечётными, а седьмая и восьмая – чётными. То есть числа в нашей последовательности будут иметь следующие чётности:

$$\text{н, н, ч, ч, н, н, ч, ч, } \ldots$$

Легко понять, что 31 и 32 суммы будут чётными, а сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 33$ – нечётной. Отсюда получаем, что в нашей последовательности $\dfrac{32}{2} = 16$ чётных чисел.

► **Пример 4.** Можно ли 100 рублей разменять
а) 23 монетами по 1, 3 и 5 рублей?
б) 24 монетами по 1, 3 и 5 рублей?
в) 19 монетами по 1, 3 и 5 рублей?

Решение: а) Заметим, что 1, 3 и 5 – нечётные числа. Но мы понимаем, что сумма нечётного числа нечётных чисел также будет нечётным числом, при этом в сумме мы

должны получить чётное число 100. Мы получили противоречие, значит так разменять нельзя.
б) Допустим мы смогли разменять, причём у нас x монет по 1 рублю, y монет по 3 рубля и z монет по 5 рублей. Тогда получаем, что

$$x + 3y + 5z = 100,$$

при условии, что $x + y + z = 24$. Тогда получаем:

$$(x + 3y + 5z) - (x + y + z) = 2y + 4z = 76 \iff y + 2z = 38.$$

Возьмём $z = 19$, $y = 0$ и $x = 5$. Тогда мы получаем 24 монеты, которые в сумме дают 100 рублей.
в) Мы не можем произвести такой размен по тем же причинам, что и в пункете а).

▶ **Пример 5.** Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могли ли мы в результате получить число
а) 30?
б) 31?

Решение: Пусть x и y – наши числа. Посмотрим на чётность числа $xy(x + y)$:

- Если хотя бы одно из чисел x и y будет чётным, то и число $xy(x + y)$ будет чётным.
- Если числа x и y будут нечётными, то число $x + y$ будет чётным, а значит число $xy(x + y)$ также будет чётным.

Таким образом число $xy(x + y)$ будет чётным, а значит оно не может быть равно 31.
Для 30 мы можем привести пример. Например, если возьмём числа $x = 2$ и $y = 3$, тогда $2 \cdot 3 \cdot (2 + 3) = 30$.

▶ **Пример 6.** Можем ли мы в выражении _1_2_3_4_5_6_7_8 расставить знаки $+$ и $-$ так, чтобы получить а) 0? б) 1? в) -34? г) 38?

Решение: Заметим, что среди чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ у нас 4 чётных и 4 нечётных числа. Тогда, независимо от того, какие знаки мы поставим, наше числ будет чётным. Тогда ответ на пункт б) нет.
Расставим знаки в сумме следующим образом:

$$+1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8.$$

Получаем:

$$+1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = (1 + 4 + 5 + 8) - (2 + 3 + 6 + 7) = 18 - 18 = 0.$$

Ответ на пункт а) – да.
Найдём какое число получится, если все знаки будут $+$:

$$+1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 \cdot 4 = 36.$$

Заменим $+1$ на -1, тогда получим $-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 34$. Тогда:

$$-(-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = +1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 = -34.$$

Значит на пункт в) можем ответить утвердительно.
Мы поняли, что максимально возможное значение данного выражения – это 36, значит 38 мы никак не можем получить.

4 Десятичная запись

Рассмотрим число 25. Мы его можем представить в следующем виде $25 = 2 \cdot 10 + 5$. В общем случае двузначное число мы можем представить следующим образом $\overline{ab} = 10a + b$.

Трёхзначные числа можно представлять похожим образом: $123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$. В общем виде: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Таким же образом можно действовать с числами любой длины.

Часто в задачах нас будет интересовать только последняя цифра числа. Пусть b – последняя цифра числа x, тогда x можно представить следующим образом: $x = 10a + b$. Например, $1234 = 123 \cdot 10 + 4$.

▶ **Пример 1.** В числе зачеркнули последнюю цифру и полученное число прибавили к исходному числу. Могло ли получиться а) 687? б) 131?

Решение: Запишем наше число в следующем виде: $10a + b$. Зачеркнув последнюю цифру, мы получим число a. Тогда получим число $10a + b + a = 11a + b$.
а) $11a + b = 687 \iff 11a = 687 - b$. Мы видим, что $687 = 11 \cdot 62 + 5$. Тогда нам подойдут $b = 5$ и $a = 62$, то есть исходное число равно 625.
б) $11a = 131 - b$. $131 = 11 \cdot 11 + 10$. Отсюда получаем, что $b = 10$, но такого не может быть, так как b – цифра.

▶ **Пример 2.** В трёхзначном числе последнюю цифру переставили в начало. Может ли разность старого и нового числа равняться а) 81? б) 100?

Решение: Запишем наше число в следующем виде: $10a + b$ (a – двузначное число).После перестановки мы получаем число $100b + a$. Тогда:

$$(10a + b) - (100b + a) = 9a - 99b.$$

а) $9a - 99b = 81 \iff a - 11b = 9$. Возьмем $b = 1$ и $a = 20$, тогда наше исходное число равнялось 201.
б) 100 мы не могли получить, так как число $9a - 99b$ делится на 9, 100 – нет.

▶ **Пример 3.** Может ли сумма трёхзначного числа и удвоенной суммы его цифр равняться а) 153? б) 152?

Решение: Запишем наше число в виде $100a + 10b + c$. Тогда сумма из условия будет равна:

$$(100a + 10b + c) + 2(a + b + c) = 102a + 12b + 3c.$$

Заметим, что 102, 12 и 3 делятся на 3, поэтому и число $102a + 12b + 3c$ делится на 3.
а) $102a + 12b + 3c = 153 \iff 34a + 4b + c = 51$. Возьмем числа $a = 1$, $b = 4$, $c = 1$. То есть наше исходное число равнялось 141.
б) 152 мы получить не могли, так как 152 не делится на 3.

▶ **Пример 4.** Трёхзначное число поделили на сумму цифр. Могло ли в результате получиться а) 90? б) 88?

Решение: Запишем наше число в виде $100a + 10b + c$.
а)

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 90 \iff 100a + 10b + c = 90a + 90b + 90c \iff 10a = 80b + 89c.$$

Числа $10a$ и $80b$ оканчиваются на 0, поэтому и число $89c$ должно оканчиваться на 0, это возможно, если $c = 0$. Тогда можем взять $a = 8$ и $b = 1$. Получаем число 810.

б)

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=88 \iff 100a+10b+c=88a+88b+88c \iff 12a=78b+87c.$$

Получаем $4a=26b+29c$. a – цифра, поэтому $4a \leq 36$, значит $c \leq 1$ и $b \leq 1$. Рассмотрим случаи:

- $b=1$ и $c=0$, тогда $a=\dfrac{13}{2}$ – не подходит.
- $b=0$ и $c=1$, тогда $a=\dfrac{29}{4}$ – не подходит.
- $b=1$ и $c=1$, тогда $4a=55 \geq 36$ – не подходит.

То есть 88 мы получить не можем.

► **Пример 5.** Трёхзначное число поделили на произведение цифр. Могло ли в результате получиться а) 8? б) 1?

Решение: Запишем наше число в виде $100a+10b+c$.
а)

$$\frac{100a+10b+c}{abc}=8.$$

Очевидно, что число $100a+10b+c$ должно делиться на 8. Из этого соображения перебором легко строится пример $100a+10b+c=128$, $abc=16$.
б)

$$\frac{100a+10b+c}{abc}=1 \iff \frac{100}{bc}+\frac{10}{ac}+\frac{1}{ab}=1$$

Так как b и c – цифры, то $bc \leq 81$, значит $\dfrac{100}{bc} \geq \dfrac{100}{81} > 1$. Значит

$$\frac{100}{bc}+\frac{10}{ac}+\frac{1}{ab} > 1.$$

Получили противоречие.

► **Пример 6.** Существуют ли попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d такие, что

а) $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=198$?

б) $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495$, если среди наших цифр есть 5?

Решение: а) Имеем:

$$(10a+b)(10c+d)-(10b+a)(10d+c)=100ac+10ad+10bc+bd-100bd-10ad-10bc-ac$$

$$=99(ac-bd)=198 \iff ac-bd=2.$$

Возьмём следующие числа $a=8$, $c=1$, $b=2$ и $d=3$, для них наше условие выполняется.
б) Проводя аналогичные преобразования, мы приходим к следующему соотношению:

$$99(ac-bd)=495 \iff ac-bd=5.$$

Пусть $a=5$ или $c=5$, тогда $ac \vdots 5$, при этом в силу попарной различности цифр bd на 5 не делится. Значит и $ac-bd$ на 5 не делится. Противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда $b=5$ или $d=5$.

► **Пример 7.** На доске написали несколько двузначных чисел. В десятичной записи которых нет 0. Сумма чисел равна 165. Затем во всех числах переставили первую и вторую цифры местами. Могла ли сумма возрасти в а) 4 раза? б) в 5 раз?

Решение: Пусть у нас n чисел. Запишем все их в следующем виде:

$$10a_1 + b_1, 10a_2 + b_2, \ldots, 10a_n + b_n.$$

Их сумма равна

$$10a_1 + b_1 + 10a_2 + b_2 + \ldots + 10a_n + b_n = 10(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

После перестановки цифр местами мы получаем следующую сумму:

$$10b_1 + a_1 + 10b_2 + a_2 + \ldots + 10b_n + a_n = 10(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Пусть $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Тогда мы получили, что число $10A + B$ перешло в число $10B + A$.

а) $10A + B = 165$ и пусть $10B + A = 660$. Мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 10A + B = 165, \\ 10B + A = 660. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $9B - 9A = 495$, то есть $B - A = 55$. Тогда из первого уравнения получаем:

$$10A + (55 + A) = 165 \iff 11A = 110 \iff A = 10.$$

Тогда $B = 65$. Построим подходящий пример: в качестве чисел на доске возьмём 16 – 5 раз и 17 – 5 раз. Нетрудно убедиться, что такие числа нам подходят.

б) В данном случае нам нужно решить систему

$$\begin{cases} 10A + B = 165, \\ 10B + A = 825. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $9B - 9A = 660$, но 660 не делится на 9, значит в целых числах наша система не решается и ответ на данный пункт – нет.

► **Пример 8.** Каждое из 4 подряд идущих натуральных чисел разделили на их первые цифры и результаты сложили. Могло ли получиться а) $41\frac{11}{24}$? б) $569\frac{29}{72}$?

Решение: а) Пусть $10a + b$ – двузначное число, тогда $\frac{10a + b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$. Мы видим, что знаменатель числа $41\frac{11}{24}$ – это 24, чтобы получить такой знаменатель первые цифры наших чисел должны быть 8 и 9 (при этом после приведения общего знаменателя должно произойти сокращение на 3). Имеем 3 возможных варианта:

$$87, 88, 89, 90;$$

$$88, 89, 90, 91;$$

$$89, 90, 91, 92.$$

Имеем:

$$\frac{87}{8} = 10 + \frac{7}{8};\ \frac{88}{8} = 11;\ \frac{89}{8} = 11 + \frac{1}{8};\ \frac{90}{9} = 10;\ \frac{91}{9} = 10 + \frac{1}{9};\ \frac{92}{9} = 10 + \frac{2}{9}.$$

Заметим, что нам может подходить только вариант $89, 90, 91, 92$, так как в других вариантах сумма будет не меньше 42. Проверим этот вариант:

$$\frac{89}{8}+\frac{90}{9}+\frac{91}{9}+\frac{92}{9}=41+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}=41\frac{11}{24}.$$

То есть этот случай нам подходит.
б) В данном случае числа могут быть только трёхзначными. Так как знаменатель числа $569\frac{29}{72}$ – это 72 мы должны работать на стыке восьмой и девятой сотен. Пусть $100a+10b+c$ – трёхзначное число и $a = 8$, тогда:

$$\frac{100a+10b+c}{a}=100+\frac{10b}{8}+\frac{c}{8}<100+\frac{99}{8}<113.$$

Если $a = 9$, то

$$\frac{100a+10b+c}{a}=100+\frac{10b}{9}+\frac{c}{9}<100+\frac{99}{9}\leqslant 111.$$

Таким образом наша сумма не превосходит $113\cdot 3+111=450<569$. Значит мы не можем получить сумму $569\frac{29}{72}$.

► **Пример 9.** Из трёхзначного числа вычли сумму цифр и результат поделили на 3. Могло ли получиться а) 99? б) 100? в) 96?

Решение: $100a + 10b + c$ – наше трёхзначное число. Вычтем из него сумму его цифр и разделим на 3, получим:

$$\frac{100a+10b+c-(a+b+c)}{3}=\frac{99a+9b}{3}=33a+3b.$$

а) $33a + 3b = 99 \iff 11a + b = 33$. Возьмем $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$. То есть нам подходит число 300.
б) 100 мы не можем получить, так как $33a + 3b$ делится на 3, а 100 – нет.
в) $33a + 3b = 96 \iff 11a + b = 32$. Для a есть два варианта: 1 и 2 (при $a > 2$ имеем $11a + b \geqslant 33$). При $a = 1$ получаем $b = 21$, но b – цифра и, значит, этот вариант нам не подходит. При $a = 2$ получаем $b = 10$ и, значит, этот случай нам также не подходит.

5 Простые и составные числа

Определение: Натуральное число большее 1 называется *простым*, если оно делится только на себя и на 1. Иначе число называется *составным*.

Число 1, простым не является.

Основная теорема арифметики: Любое натуральное число единственным (с точностью до перестановки множителей) образом представимо в виде произведения простых чисел.

▶ **Пример 1.** Разложите число 888888 на произведение простых чисел.

Решение: Мы можем представить наше число в следующем виде:

$$888888 = 8 \cdot 111111 = 2^3 \cdot 111111.$$

Очевидно, что $111111 \vdots 111$, поэтому получаем:

$$888888 = 2^3 \cdot 111 \cdot 1001.$$

Число 111 делится на 3, тогда:

$$888888 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 1001.$$

По признаку делимости на 11 получаем, что $1001 \vdots 11$:

$$888888 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 91 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13.$$

Представим полученное произведение в следующем виде:

$$888888 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

▶ **Пример 2.** Простое ли число 101?

Решение: Пусть $101 = n \cdot k$ (n и k – натуральные числа больше 1). Тогда или $n \leq \sqrt{101}$ или $k \leq \sqrt{101}$. Действительно, если $n > \sqrt{101}$ и $k > \sqrt{101}$, то $nk > \sqrt{101} \cdot \sqrt{101} = 101$. Таким образом, если у числа 101 есть делители, то хотя бы один из них не превосходит 10 (так как $10 < \sqrt{101} < 11$). Значит для проверки на простоту нам нужно проверить делимость числа 101 на простые числа в промежутке от 2 до 10 (это числа 2, 3, 5, 7).
101 – нечётное число, поэтому оно не делится на 2, сумма цифр этого числа равна 2, значит также нет делимости на 3. На 5 наше число не делится, потому что не оканчивается на 0 или на 5. Прямая проверка показывает, что 101 не делится на 7. Таким образом, наше число является простым.

Замечание: Чтобы проверить число n на простоту нужно проверить его делимость на простые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Если ни на одно из них число n не делится, то оно является простым.

▶ **Пример 3.** Может ли произведение цифр числа равняться а) 2000? б) 2024?

Решение: а) Разложим число 2000 на простые:

$$2000 = 2 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 5^3.$$

Тогда, например, число 2222555 нам подходит.
б) Разложим 2024 на простые:

$$2024 = 8 \cdot 253 = 8 \cdot 11 \cdot 23.$$

Число $11 > 9$ является простым, значит оно не может разложится на произведение меньших чисел, то есть нет такого числа, произведение цифр которого даст нам 2024.

▶ **Пример 4.** Может ли $n!$ оканчиваться на а) 4 нуля? б) 5 нулей?

Решение: Вспомним, что $n!$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Например, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.
а) Число имеет в своей записи ровно 4 нуля, если оно делится на 10^4 и не делится на 10^5. Число делится на 10^4 и не делится на 10^5, если в его разложении на простые множители есть хотя бы 4 раза по 2 и по 5, причём либо 2, либо 5 встречается ровно 4 раза.
Число $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ имеет в своём разложении 4 раза по 2 и 1 раз по 5. Далее нам надо следить за количеством пятёрок в разложении. Число $10!$ имеет в разложении 2 раза по 5, число $15!$ – 3 раза, число $20!$ – ровно 4 раза. Таким образом, число $20!$ делится на 10^4 и не делится на 10^5
б) Число имеет в своей записи ровно 5 нулей, если оно делится на 10^5 и не делится на 10^6 Числа 21, 22, 23, 24 не делятся на 5, поэтому факториалы $21!$, $22!$, $23!$, $24!$ также имеют в своём разложении 4 пятёрки. А вот число $25!$ сразу делится на 5^6, то есть оно имеет в своей записи 6 нулей на конце. Таким образом, ни один факториал не оканчивается пятью нулями.

▶ **Пример 5.** Может ли произведение трёхзначного числа и суммы его цифр равняться а) 28000? б) 2491? в) 6061?

Решение: Пусть $x = 100a + 10b + c$ – наше число. Тогда:

$$x \cdot (a+b+c) \leq 999 \cdot 27 = 26973 < 28000.$$

Значит на пункт а) ответ – нет.
б) Разложим число 2491 на простые множители:

$$2491 = 2500 - 9 = 50^2 - 3^2 = (50-3) \cdot (50+3) = 47 \cdot 53.$$

Так как $a + b + c \leq 27$, $47 > 27$, $53 > 27$ и 47, 53 – простые, то на пункт б) также ответ нет.
в)

$$6061 = 11 \cdot 551, 11 = 5 + 5 + 1.$$

Таким образом, число $x = 551$ нам подходит.

6 НОД и НОК

Определение: *Наибольшим общим делителем* группы чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое число из группы.

Наибольший общий делитель двух чисел a и b будем обозначать НОД(a, b).

Определение: Если НОД$(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Определение: *Наименьшим общим кратным* группы чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое число из группы.

Наименьшее общее кратное двух чисел a и b будем обозначать НОК(a, b).

► **Пример 1.** Найти а) НОД$(72, 24)$; б) НОД$(2, 1831)$; в) НОД$(384, 288)$; г) НОК$(12, 36)$; д) НОК$(4, 2023)$; е) НОК$(384, 288)$; ж) НОД$(20, 36, 18)$; з) НОК$(20, 15, 12)$.

Решение:

а) Число 72 делится на 24, поэтому НОД$(72, 24) = 24$.

б) Число 1831 не является чётным, поэтому единственным число, на которое делятся 2 и 1831 является число 1, значит НОД$(2, 1831) = 1$.

в) Одним из способов нахождения НОД является разложение чисел на простые множители. Например, найдём таким образом НОД$(384, 288)$:

$$384 = 2^7 \cdot 3; \quad 288 = 2^5 \cdot 3^2.$$

Далее мы видим, что оба числа делятся на 2^5 (но 288 не делится на 2^6) и на 3 (но 384 не делится на 3^2), поэтому НОД$(384, 288) = 2^5 \cdot 3 = 96$.

г) Очевидно, что $36 \vdots 12$, поэтому НОК$(12, 36) = 36$.

д) Числа 4 и 2023 взаимно просты, поэтому наименьшим числом, которое делится на 4 и 2023 является число $4 \cdot 2023 = 8092$, то есть НОК$(4, 2023) = 8092$.

е) НОК также можно найти с помощью разложения чисел на простые множители. Мы уже выяснили, что $384 = 2^7 \cdot 3$ и $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Мы видим, что НОК должен обязательно делиться на 2^7 (иначе НОК не будет делиться на 384) и на 3^2 (иначе НОК не будет делиться на 288), поэтому НОК$(384, 288) = 2^7 \cdot 3^2 = 1152$.
Заметим, что выполнено равенство НОД$(384, 288) \cdot$ НОК$(384, 288) = 384 \cdot 288$. На самом деле это выполнено и в общем случае:

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b.$$

ж) Далее найдём НОД$(20, 36, 18)$. НОД$(20, 36) = 4$, поэтому НОД$(20, 36, 18) =$ НОД$(4, 18) = 2$.

з) Для начала найдём НОК$(20, 15)$. $20 = 2^2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, поэтому НОК$(20, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Значит НОК$(20, 15, 12) =$ НОК$(60, 12) = 60$.

► **Пример 2.** Пусть НОД$(a, b) = 3$, НОК$(a, b) = 60$ и $a = 12$. Найти b.

Решение: По формуле НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = a \cdot b$ получаем, что

$$b = \frac{\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)}{a} = \frac{3 \cdot 60}{12} = 15.$$

► **Пример 3.** Шесть различных натуральных чисел такие, что НОД любых двух равен 1. Может ли их сумма равняться а) 34? б) 39?

Решение: Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ – наши числа.
а) Число 34 является чётным, поэтому если $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 34$, то среди наших чисел чётно число чётных чисел (соответственно нечётных чисел также чётное количество), при этом если чётных чисел хотя бы 2, то НОД этих чётных чисел не равен 1, значит такого быть не может. Остаётся случай, когда все числа являются нечётными. Рассмотрим первые 6 нечётных натуральных числа: 1, 3, 5, 7, 9, 11, их сумма равна $36 > 34$, значит ответ на пункт а) – нет.
б) Среди наших шести чисел должно быть ровно одно число, делящееся на 2 (так как их сумма равна 39 – нечётному числу). Возьмём следующие числа: 1, 2, 11, 5, 7, 13. Каждые два из этих чисел взаимно просты (так как все эти числа являются простыми) и их сумма равна 39.

► **Пример 4.** Каким может быть а) НОД$(n, n+1)$? б) НОД$(n, n+3)$? в) НОД$(n, n+10)$?

Решение: а) Пусть НОД$(n, n+1) = d$, тогда $n = d \cdot k$ и $n+1 = d \cdot t$ (где k и t – натуральные числа). Значит:

$$n + 1 - n = 1 = dt - dk = d(t - k).$$

Так как d и $t - k$ – натуральные числа, то $d = 1$.
Заметим, что верен следующий факт: НОД$(a, b) =$ НОД$(a, a - b)$.
б) Получаем: НОД$(n, n+3) =$ НОД$(n, n+3-n) =$ НОД$(n, 3)$. Тогда НОД$(n, n+3) = 1$ (если взять $n = 1$) или НОД$(n, n+3) = 3$ (если взять $n = 3$).
в) НОД$(n, n+10) =$ НОД$(n, 10)$. Таким образом наш НОД может быть равен 1 (если $n = 1$), 2 (если взять $n = 2$), 5 (если взять $n = 5$) и 10 (если взять $n = 10$).

► **Пример 5.** На какое наибольшее число сократима дробь $\dfrac{3n+4}{2n+5}$ при некотором n?

Решение: Если мы можем сократить данную дробь, то число, на которое мы можем сократить дробь должно одновременно делить $3n + 4$ и $2n + 5$. Значит наибольшее число, на которое мы можем сократить нашу дробь, – это НОД$(3n + 4, 2n + 5)$:

$$\text{НОД}(3n+4, 2n+5) = \text{НОД}(3n+4-2n-5, 2n+5) = \text{НОД}(n-1, 2n+5) =$$

$$= \text{НОД}(n-1, 2n+5-2(n-1)) = \text{НОД}(n-1, 7).$$

Таким образом НОД$(3n+4, 2n+5) = 1$ или НОД$(3n+4, 2n+5) = 7$. При $n = 1$ получаем дробь $\dfrac{7}{7} = 1$, то есть наибольшее число, на которое сократима наша дробь, – это 7.

7 Диофант линейный

▶ **Пример 1.** Решить уравнение $3x + 2y = 7$ в целых числах.

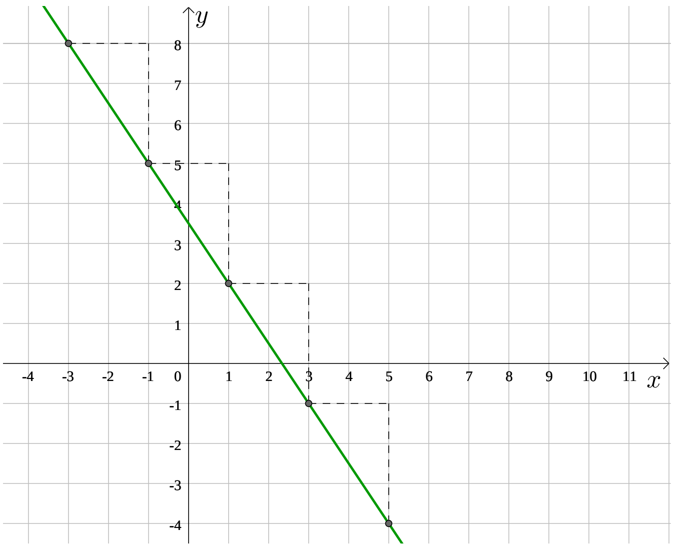
Решение: Заметим, что $x = 1$ и $y = 2$ – решение. Есть ли ещё решения? Да, например, $(3, -1)$, $(5, -4)$ или $(7, -7)$. Как найти все решения? Можно заметить, что решения по x идут с шагом 2 (1, 3, 5, 7), а решения по y идут с шагом 3 (2, -1, -4, -7). Выразим в нашем уравнении y:

$$y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x.$$

Если x – чётное число, $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$ – нецелое число. Если x – нечётное число, тогда $7 - 3x$ – чётное число, а значит $\frac{7-3x}{2}$ – целое. Таким образом, в качестве x нам подходят все нечётные числа, то есть $x = 1 + 2t$ (где t пробегает все целые числа). Тогда можем найти все y:

$$y = \frac{7 - 3(1+2t)}{2} = \frac{4-6t}{2} = 2 - 3t.$$

То есть нам подходят любые пары $(1 + 2t, 2 - 3t)$, где $t \in \mathbb{Z}$.
Дадим геометрическую интерпретацию. $3x + 2y = 7$ – это уравнение некоторой прямой. Возьмём стартовую точку $(1, 2)$ и тогда каждый раз двигаясь либо на 3 единицы вниз и на 2 вправо или на 3 единицы вверх и на 2 влево, мы будем попадать в целочисленные точки нашей прямой.



▶ **Пример 2.** Решить уравнение $3y = 2x + 8$ в целых числах.

Решение: Опять же угадаем один из корней. Для этого подберём такое, число x, что $2x + 8 \vdots 3$. Нам подойдёт $x = 2$, тогда $y = 4$. Выразим y:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Рассмотрим числа вида $x = 3t$ (t – целое) – это числа, которые делятся на 3, в этом случае получаем, что $y = 2t + \frac{8}{3}$, очевидно, что данные числа не могут быть целыми.
Рассмотрим числа, дающие остаток 1 при делении на 3: $x = 3t + 1$. Найдём y:

$$y = 2t + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2t + \frac{10}{3}.$$

Данные числа также не будут целыми.
Осталось посмотреть на числа, которые дают остаток 2 при делении на 3: $x = 3t + 2$. Найдём y:

$$y = 2t + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 2t + 4.$$

Данные числа всегда будут целыми, значит нам подходят только пары $(3t+2, 2t+4)$, где $t \in \mathbb{Z}$.

▶ **Пример 3.** Решить уравнение $3x + 6y = 7$ в целых числах.

Решение: В отличие от первых двух уравнений, это уравнение решений не имеет. Действительно, заметим, что левая часть уравнения делится на 3, а правая – нет, значит данное уравнение не разрешимо в целых числах.

▶ **Пример 4.** Двузначное число разделили на сумму цифр. Частное полученного числа равно 3, остаток – 7. Найти данное число.

Решение: Пусть $x = 10a + b$ – наше число. Тогда:

$$10a + b = 3(a + b) + 7 \iff 7a = 2b + 7 \iff 2b = 7(a - 1).$$

правая часть полученного уравнения делится на 7, поэтому $2b \,\vdots\, 7$, то есть $b \,\vdots\, 7$. Так как b – цифра, то нам подходят только $b = 0$ или $b = 7$. Если $b = 0$, то $a = 1$. Если $b = 7$, то $a = 3$. Число 10 при делении на 1 не даёт в остатке 7, поэтому оно нам не подходит. $37 = 3 \cdot (3 + 7) = 7$, то есть нам подходит число $x = 37$.

▶ **Пример 5.** Двузначное число в шесть раз больше суммы своих цифр. Найти данное число.

Решение: Пусть $x = 10a + b$ – наше число. Тогда:

$$10a + b = 6(a + b) \iff 4a = 5b.$$

$a \neq 0$ и $a \,\vdots\, 5$, значит, $a = 5$, тогда $b = 4$. Следовательно, $x = 54$ нам подходит.

▶ **Пример 6.** Можно ли из 20 монет достоинствами 5, 20 и 50 копеек составить а) 5 рублей? б) 4 рубля?

Решение: Пусть у нас x монет по 5 копеек, y монет по 20 копеек, z монет по 50 копеек.
а) Имеем: $x + y + z = 20$ и $5x + 20y + 50z = 500$. Тогда:

$$5x + 20y + 50z = 500 \iff x + 4y + 10z = 100 \implies 3y + 9z = 80.$$

Левая часть полученного уравнения делится на 3, а правая – нет, значит такое невозможно.
б) Имеем: $x + y + z = 20$ и $5x + 20y + 50z = 400$. Тогда:

$$5x + 20y + 50z = 400 \iff x + 4y + 10z = 80 \implies 3y + 9z = 60 \iff y + 3z = 20.$$

Возьмём $z = 4$, $x = 8$ и $y = 8$. Тогда имеем 20 монет и:

$$5 \cdot 8 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 4 = 40 + 160 + 200 = 400.$$

То есть такой набор монет нам подходит.

8 Диофант квадратичный

▶ **Пример 1.** Решить уравнение $(x-2)(xy+4)=1$ в целых числах.

Решение: Произведение двух целых чисел равно 1, ели эти числа равны одновременно 1 или -1:

$$\begin{cases} x-2=1, \\ xy+4=1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2=-1, \\ xy+4=-1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x-2=1, \\ xy+4=1. \end{cases} \iff \begin{cases} x=3, \\ 3y+4=1. \end{cases} \iff \begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$$

Получаем первое решение $(3,-1)$.
Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x-2=-1, \\ xy+4=-1. \end{cases} \iff \begin{cases} x=1, \\ y+4=-1. \end{cases} \iff \begin{cases} x=1, \\ y=-5. \end{cases}$$

Получаем второе решение $(1,-5)$.

▶ **Пример 2.** Решить уравнение $2x^2+xy=x+7$ в целых числах.

Решение: Перепишем уравнение в следующем виде:

$$2x^2+xy-x=7 \iff x(2x+y-1)=7.$$

7 – простое число, поэтому произведение двух чисел равно 7 только если одно число равно 1, а другое равно 7 или одно число равно -1, а другое -7. Рассмотрим случаи:

- Если $x=7$ и $2x+y-1=1$. Тогда $y=-12$. Получаем решение $(7,-12)$
- Если $x=-7$ и $2x+y-1=-1$. Тогда $y=14$. Получаем решение $(-7,14)$.
- Если $x=1$ и $2x+y-1=7$. Тогда $y=6$. Получаем решение $(1,6)$.
- Если $x=-1$ и $2x+y-1=-7$. Тогда $y=-4$. Получаем решение $(-1,-4)$.

▶ **Пример 3.** Решить уравнение $x+y=xy$ в целых числах.

Решение: Перепишем наше уравнение в следующем виде:

$$xy-x-y=0 \iff xy-x-y+1=1 \iff x(y-1)-(y-1)=1 \iff (x-1)(y-1)=1.$$

Тогда нам подходят пары $(2,2)$ и $(0,0)$.

▶ **Пример 4.** Решить уравнение $3xy+2x+3y=0$ в целых числах.

Решение:

$$3xy+2x+3y=0 \iff 3y(x+1)+2x=0 \iff 3y(x+1)+2(x+1)=2 \iff (3y+2)(x+1)=2.$$

Рассмотрим случаи:

- Если $3y+2=2$ и $x+1=1$. Тогда $x=0$ и $y=0$. Получаем решение $(0,0)$
- Если $3y+2=1$ и $x+1=2$. Тогда $y=-\dfrac{1}{3}$ – не подходит.

- Если $3y+2=-2$ и $x+1=-1$. Тогда $y=-\dfrac{4}{3}$ – не подходит.
- Если $3y+2=-1$ и $x+1=-2$. Тогда $x=-3$ и $y=-1$. Получаем решение $(-3,-1)$.

► **Пример 5.** Решить уравнение $x^2+4xy+13y^2=59$ в целых числах.

Решение: Перепишем уравнение в следующем виде:

$$x^2+4xy+4y^2+9y^2=59 \Longleftrightarrow (x+2y)^2+9y^2=59.$$

Так как $(x+2y)^2 \geq 0$ и $9y^2 \geq 0$, то $9y^2 \leq 59$, то есть $y^2 \leq \dfrac{59}{9} = 6\dfrac{5}{9}$. Значит для y имеем следующие варианты: $0, \pm 1, \pm 2$. Рассмотрим случаи:

- $y=0$, тогда $x^2=59$. Такое невозможно, так как 59 не является полным квадратом.
- $y=\pm 1$, тогда $(x\pm 2)^2=50$. Такое также невозможно, потому что 50 не является полным квадратом.
- Если $y=\pm 2$, то $(x\pm 4)^2=23$. Этот случай также не даёт нам решений.

Таким образом, наше уравнение не имеет решений.

9 Квадратные уравнения в №19

Вспомним теорему Виета:

Теорема Виета: Если x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

► **Пример 1.** Уравнение $x^2-px+q=0$ имеет два натуральных корня.
а) Пусть $q=5$, чему равен p?
б) Может ли быть так, что $p<11$ и $q>30$?
в) Может ли быть так, что $p<13$ и $q>30$?

Решение: а) Пусть x_1, x_2 - корни нашего уравнения. Из теоремы Виета получаем, что

$$x_1+x_2=p, x_1\cdot x_2=5.$$

Так как корнями нашего уравнения являются натуральные числа, то из того, что $x_1\cdot x_2=5$ заключаем, что один из корней равен 1, а другой равен 5, значит их сумма равна 6 и $p=6$.
б) Так как по условию корни уравнения натуральные числа, то ограничения на p и q мы можем записать в следующем виде: $0<p\leqslant 10$ и $q\geqslant 31$. Так как уравнение имеет два корня, то дискриминант должен быть строго больше 0. Запишем дискриминант нашего уравнения:

$$D=p^2-4q>0 \Longleftrightarrow p^2>4q\geqslant 124.$$

При этом $p^2\leqslant 10^2=100$. Значит, неравенство $D>0$ не может быть выполнено.
в) Приведём пример, когда это выполнено. Возьмём $p=12$ и $q=35$. В этом случае получаем уравнение $x^2-12x+35=0$. Его корнями будут $x=5$ и $x=7$.

► **Пример 2.** Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два различных натуральных корня.
а) Пусть $q=34$, чему равен p?
б) $p+q=22$, чему равно q?

Решение: а) Пусть x_1, x_2 - корни нашего уравнения, тогда $x_1\cdot x_2=34$. Тогда либо корнями уравнения являются числа 1 и 34, либо корнями являются числа 2 и 17. В первом случае $p=-35$, во втором: $p=-19$.
б) Рассмотрим равенство $p+q=22$:

$$p+q=x_1x_2-x_1-x_2=22 \Longleftrightarrow x_1(x_2-1)-(x_2-1)=23 \Longleftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=23.$$

Так как 23 – простое число, то корнями уравнения могут быть только 2 и 24, значит, $q=2\cdot 24=48$ $(p=-26)$.

► **Пример 3.** Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a,b,c – натуральные числа $\leqslant 100$, при этом числа a,b и c попарно различаются не менее чем на 2. Может ли корень уравнения быть равен а) -7? б) -53?

Решение:
а) Приведём пример, когда корнями нашего уравнения будут $x=-7$ и $x=-2$. Нам подходит уравнение $x^2+9x+14=0$, оно удовлетворяет всем условиям задачи, поэтому подходит.
б) Пусть наше уравнение имеет корень -53. Тогда:

$$53^2\cdot a-53b+c=0 \Longleftrightarrow 53a-b=-\frac{c}{53}.$$

Число $-\dfrac{c}{53}$ должно быть целым, поэтому имеем только один вариант: $c = 53$ (иначе $c > 100$). Получаем:

$$53a - b = -1 \iff b = 53a + 1.$$

Если $a = 1$, то $b = 54$, этот вариант нам не подходит, так как $54 - 53 = 1 < 2$. Если же $a \geq 2$, то $b \geq 107$. Таким образом, ответ на пункт б) – нет.

► **Пример 4.** Существуют ли натуральные числа m и n такие, что дискриминант уравнения $x^2 + mx + n = 0$ равен а) 17? б) 54?

Решение:
а)

$$D = m^2 - 4n = 17 \iff m^2 = 17 + 4n.$$

Возьмём $n = 2$ и $m = 5$.
б)

$$D = m^2 - 4n = 54 \iff m^2 = 54 + 4n = 2(27 + 2n).$$

Правая часть полученного уравнения делится на 2, значит и $m^2 \vdots 2$, но это значит, что $m \vdots 2$, то есть $m^2 \vdots 4$. При это число $27 + 2n$ является нечётным, значит число $2(27 + 2n)$ не делится на 4. Противоречие.

10 Арифметическая прогрессия

Определение: Последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ называется *арифметической прогрессией*, если каждый её член, начиная со второго, получен из предыдущего добавлением фиксированного числа d, называемого *разностью прогрессии*:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$$

Напишем общую формулу $n-$го члена прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

► **Пример 1.** Вычислить сумму

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.$$

Решение: Разобьём числа в сумме на пары следующим образом: $(1, 100)$, $(2, 99)$, $(3, 98)$, $\ldots$, $(50, 51)$. Заметим, что сумма чисел в каждой паре равна 101, всего таких пар 50, поэтому:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

► **Пример 2.** Вычислить сумму

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 + 101.$$

Решение: В данном случае мы не сможем разбить все числа на пары, так как у нас нечётное количество чисел. Эту проблему можно обойти следующим образом: сгруппируем все числа, кроме числа 51 также, как в предыдущем примере: $(1, 101)$, $(2, 100)$, $(3, 99)$, $\ldots$, $(50, 52)$. Сумма чисел в каждой паре равна $102 = 51 \cdot 2$, всего таких пар 50 штук, тогда получаем:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 + 101 = 51 + 2 \cdot 51 \cdot 50 = 51 \cdot 101 = 5151.$$

Подобное рассуждение в общем случае приводит нас к формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

► **Пример 3.** Второй член прогрессии равен 5. Найдите сумму первых трёх членов.

Решение: $a_2 = 5$, тогда $a_1 = 5 - d$, $a_3 = 5 + d$. Тогда:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5 - d + 5 + 5 + d = 15.$$

Заметим, что в общем случае мы получаем формулу:

$$\frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2} = a_m.$$

Также верна следующая формула:

$$\frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2} = a_m.$$

► **Пример 4.** В арифметической прогрессии известно, что $a_{20} = 30$ и $a_{30} = 20$. Найдите a_{50}.

Решение: $a_{20} = a_1 + 19d$ и $a_{30} = a_1 + 29d$, значит

$$a_{30} - a_{20} = 20 - 30 = -10 = 10d \iff d = -1.$$

$$a_{20} = a_1 - 19 = 30 \iff a_1 = 49.$$

Отсюда получаем:

$$a_{50} = a_1 + 49 \cdot d = 49 - 49 = 0.$$

▶ **Пример 5.** n натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма этих чисел равняться 14?

б) Найти максимальный n такой, что $S_n \leq 400$.

Решение:

а) Построим следующий пример: $2, 3, 4, 5$. Тогда $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

б) Для начала рассмотрим прогрессию $1, 2, \ldots, n$. Сумма членов этой прогрессии равна:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Если $n = 27$, то сумма будет равна $27 \cdot 14 = 378$. Если $n = 28$, то сумма будет равна $29 \cdot 14 = 406$. Мы показали, что есть прогрессия, в которой 27 членов и сумма её членов меньше 400. При этом прогрессия $1, 2, 3, \ldots, 28$ является прогрессией с минимальной суммой членов среди всех прогрессий состоящих минимум из 28 элементов, поэтому $n_{max} = 27$.

▶ **Пример 6.** S_n – сумма n первых членов арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел ($n \geq 3$). Может ли а) $S_n = 8$? б) $S_n = 2$?

Решение: а)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 8 \iff (a_1 + a_n)n = 16.$$

Возьмём $n = 4$, тогда нам подходит прогрессия $-4, 0, 4, 8$.

б)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 2 \iff (a_1 + a_n)n = 4.$$

Пусть $n = 4$, тогда нам подходит прогрессия $-1, 0, 1, 2$.

▶ **Пример 7.** Возрастающие арифметические прогрессии

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

состоят из натуральных чисел. Возможно ли

а) $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

Решение:

а) Рассмотрим прогрессии $1, 3, 5, \ldots$ и $1, 4, 7, \ldots$. Тогда:

$$a_1b_1 + a_3b_3 = 1 + 35 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

б) $a_4 = a_1 + 3d_a$, $b_4 = b_1 + 3d_b$, $a_3 = a_1 + 2d_a$, $b_3 = b_1 + 2d_b$. Получаем равенство:

$$a_1b_1 + 2(a_1 + 3d_a)(b_1 + 3d_b) = 3(a_1 + 2d_a)(b_1 + 2d_b) \iff 3a_1b_1 + 6a_1d_b + 6b_1d_a + 18d_ad_b =$$

$$= 3a_1b_1 + 6b_1d_a + 6a_1d_b + 12d_ad_b \iff 6d_ad_b = 0.$$

Тогда либо $d_a = 0$, либо $d_b = 0$, но этого не может быть, так как наши прогрессии являются возрастающими.

11 Геометрическая прогрессия

Определение: Последовательность $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ называется *геометрической прогрессией*, если каждый её член, начиная со второго, получен из предыдущего умножением на фиксированное ненулевое число q, называемое *знаменателем прогрессии*:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \ldots$$

Напишем общую формулу $n-$го члена прогрессии: $b_n = b_1q^{n-1}$.

▶ **Пример 1.** Вычислить сумму:

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10}.$$

Решение: Нам нужно найти сумму S геометрической прогрессии с начальным членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$. Рассмотрим удвоенную сумму нашей прогрессии:

$$2S = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{11}.$$

Тогда:

$$2S - S = S = (2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{11}) - (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10}) = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Получим формулу суммы произвольной геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ со знаменателем q:

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

$$qS_n = qb_1 + qb_2 + \ldots qb_n = b_2 + b_3 + \ldots b_{n+1}$$

Тогда:

$$qS_n - S_n = (q-1)S_n = (b_2 + b_3 + \ldots + b_{n+1}) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = b_{n+1} - b_1 \Longleftrightarrow$$

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

▶ **Пример 2.** Для геометрической прогрессии известно, что $b_1 = 1$, $b_5 = 16$. Найдите S_{10}.

Решение: $b_5 = q^4 b_1 = q^4$, значит $q^4 = 16$ и тогда $q = \pm 2$.

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(\pm 2)^{10} - 1}{\pm 2 - 1}.$$

Если $q = -2$, то $S_{10} = \dfrac{1 - 2^{10}}{3} = -\dfrac{1023}{3}$.
Если $q = 2$, $S_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$.

▶ **Пример 3.** Для геометрической прогрессии известно, что $b_3 = 4$. Найдите $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$.

Решение: $b_4 = qb_3$, $b_5 = q^2 b_3$, $b_2 = \dfrac{b_3}{q}$ и $b_1 = \dfrac{b_3}{q^2}$. Тогда получаем:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 = \frac{b_3}{q^2} \cdot \frac{b_3}{q} \cdot b_3 \cdot qb_3 \cdot q^2 b_3 = b_3^5 = 4^5 = 1024.$$

В общем случае верна следующая формула:

$$b_{m-k} \cdot b_{m+k} = b_m^2.$$

▶ **Пример 4.** Для геометрической прогрессии известно, что $b_1 + b_4 = 49$ и $b_2 + b_3 = 14$. Найдите b_1.

Решение:

$$b_1 + b_4 = b_1 + q^3 b_1 = b_1(q^3 + 1) = -49.$$
$$b_2 + b_3 = b_1 q + b_1 q^2 = b_1(q + q^2) = 14$$

Тогда

$$\frac{b_1(q^3+1)}{b_1(q+q^2)} = \frac{q^3+1}{q+q^2} = -\frac{7}{2} \iff \frac{(q+1)(q^2-q+1)}{q(q+1)} = -\frac{7}{2} \iff \frac{q^2-q+1}{q} = -\frac{7}{2} \iff$$

$$2q^2 + 5q + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} q = -2; \\ q = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Если $q = -2$, то

$$b_1 = -\frac{49}{(-2)^3 + 1} = 7.$$

Если $q = -\dfrac{1}{2}$, то

$$b_1 = -\frac{49}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 1} = -56.$$

▶ **Пример 5.** Можно ли привести пример 4 натуральных чисел произведение которых 792 и а) 3; б) 4 из них образуют геометрическую прогрессию:

Решение: Разложим 792 на простые множители:

$$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11.$$

а) Возьмём последовательность $1, 2, 4, 99$, первые три члена данной последовательности образуют геометрическую прогрессию, а их произведение равно 792.
б) Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 – натуральные числа, образующие геометрическую прогрессию со знаменателем q. Очевидно, что в этом случае q также является натуральным. Тогда:

$$b_1 b_2 b_3 b_4 = b_1^4 \cdot q^6.$$

Но в разложении числа 792 нет простых чисел в степени больше 3, поэтому ответ на пункт б) – нет.

▶ **Пример 6.** Геометрическая прогрессия состоит из трёхзначных чисел и в ней ≥ 3 членов, причём $b_1 = 272$. Возможно ли, что а) $b_n = 425$? б) $b_n = 680$?

Решение:

$$b_1 = 272 = 2^4 \cdot 17; \quad 425 = 5^2 \cdot 17; \quad 680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 17.$$

а) Пусть $b_n = 425 = 5^2 \cdot 17$. Тогда

$$b_n = q^{n-1} b_1 \iff 2^4 \cdot 17 \cdot q^{n-1} = 5^2 \cdot 17 \iff q^{n-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Тогда, если $q = \dfrac{5}{4}$, то получаем прогрессию $272, 340, 425$. $b_3 = 425$.

б) Пусть $b_n = 680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 17$. Тогда

$$b_n = q^{n-1}b_1 \Longleftrightarrow 2^4 \cdot 17 \cdot q^{n-1} = 2^3 \cdot 5 \cdot 17 \Longleftrightarrow q^{n-1} = \frac{5}{2}.$$

Тогда может быть только $q = \frac{5}{2}$. Попробуем найти третий член прогрессии. Получаем: $680 \cdot \frac{5}{2} > 1000$. Значит нужной нам прогрессии не существует.

▶ **Пример 7.** Все члены геометрической прогрессии различные натуральные числа большие 210 и меньшие 350. Может ли в ней быть 4 члена?

Решение: Будем считать, что прогрессия является возрастающей. Тогда

$$210 < b_1 < b_1q < b_1q^2 < b_1q^3 < 350 \Longleftrightarrow \frac{b_1q^3}{b_1} = q^3 < \frac{350}{210} = \frac{5}{3}.$$

q должно быть рациональным числом. При этом все числа b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3 должны быть натуральными. Пусть $b_1 = 216$ и $q = \frac{7}{6}$. Данное q нам подходит, так как $q^3 = \frac{343}{216} < \frac{350}{210}$. Получаем следующую прогрессию

$$216; 216 \cdot \frac{7}{6} = 252; 216 \cdot \frac{7^2}{6^2} = 294; 216 \cdot \frac{7^3}{6^3} = 343.$$

Все полученные числа больше 210 и меньше 350, поэтому данная прогрессия нам подходит.

12 Последовательности

▶ **Пример 1.** В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из целых чисел $a_1 = 1$ и $a_n = 235$. Сумма любых двух соседей равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли в последовательности быть 1000 членов?

Решение: Построим последовательность по следующему принципу: на нечётных местах будут последовательно стоять нечётные числа, начиная с 1, на чётных местах будут стоять чётные числа $2, 0, -2, -4, \ldots$. Получаем следующую последовательность:

$$1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, \ldots$$

Заметим, что в такой последовательности $a_{235} = 235$. При этом сумма любого (кроме первого и последнего) элемента последовательности с его левым соседом равна 3, а с правым соседом равна 5. Значит эта последовательность нам подходит.

б) Заметим, что из условия следует, что соседние числа должны иметь разную чётность (иначе их сумма была бы чётной), при этом первый член последовательности является нечётным, значит нечётные члены последовательности являются нечётными, а чётные члены последовательности являются чётными. Таким образом нечётное число 235 не может являться чётным членом последовательности.

▶ **Пример 2.** Все члены последовательности натуральные числа. Каждый, начиная со второго либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов равна 2231.

а) Может ли в последовательности быть 2 члена?

б) Может ли в последовательности быть 3 члена?

Решение: Разложим число 2231 на простые множители:

$$2231 = 23 \cdot 97.$$

а) Если в последовательности два члена, то один из них равен x, а другой – $11x$. Сумма этих чисел равна $12x$, она делится на 12, тогда как число 2231 – нет, поэтому наша последовательность не может состоять из двух членов.

б) Число 23 мы можем разложить в сумму следующим образом: $23 = 11 + 1 + 11$. Из этого соображения легко строится пример нужной нам последовательности: $11 \cdot 97$, 97, $11 \cdot 97$.

▶ **Пример 3.** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию, причём $a_1 = 1$ и $a_n = 2076$.

а) Может ли в последовательности быть 3 члена?

б) Может ли в последовательности быть 4 члена?

Решение:

а) Если наша последовательность состояла из трёх членов, то она была бы либо арифметической, либо геометрической.

Пусть она является арифметической, тогда $a_1 + a_3 = 2 \cdot a_2$. Значит $a_1 + a_3 \,\vdots\, 2$, но $a_1 + a_3 = 2077$, получаем противоречие.

Пусть она является геометрической, тогда $a_1 a_3 = a_2^2$. Но число $a_1 \cdot a_3 = 2076$ не является полным квадратом, поэтому наша последовательность также не может быть геометрической.

б) Пусть все 4 члена образуют арифметическую прогрессию, тогда члены последовательности мы можем записать следующим образом:

$$1, 1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x.$$

Отсюда получаем, что $1+3x=2076$, то есть $3x=2075$, но число 2075 не делится на 3, поэтому такое невозможно.

Пусть все 4 члена образуют геометрическую прогрессию, тогда члены последовательности мы можем записать следующим образом:

$$1, x, x^2, x^3.$$

Тогда $x^3 = 2076$, чего не может быть, так как 2076 не является кубом некоторого натурального числа.

Пусть первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, тогда первые три члена можем записать в следующем виде:

$$1, 1+x, 1+2x.$$

Отсюда получаем, что 4 член последовательности равен $\dfrac{1+2x}{1+x}\cdot(1+2x)$. Получаем:

$$4x^2+4x+1=2076(1+x) \Longleftrightarrow 4x^2-2072x-2075=0.$$

Если x – целое число, то число $4x^2-2076x$ – чётно, тогда в силу нечётности числа 2075 и число $4x^2-2072x-2075$ является нечётным. Но 0 – чётное число. Получили противоречие.

Пусть первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, тогда первые три члена можем записать в следующем виде:

$$1, x, x^2.$$

4 член последовательности равен $x^2+x^2-x=2x^2-x$. Значит $2x^2-x=2076$. Дискриминант этого уравнения равен 16609. Заметим, что $128^2=16384$ и $129^2=16641$, то есть

$$128^2<16609<129^2.$$

Значит число 16609 не является полным квадратом, поэтому уравнение $2x^2-x-2076=0$ не может иметь целых корней, а значит нужной нам последовательности не существует.

► **Пример 4.** На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме двух чисел, написанных на доске.

а) Может ли на доске появиться число 2012?

б) Может ли сумма чисел на доске быть равна 63?

Решение:

а) После числа 7 Вася мог написать только число 14, далее мы видим, что на доске два числа, кратных 7. Если мы будем дописывать число, которое вдвое больше какого-то числа на доске, то мы также будем получать число кратное 7, если возьмём сумму двух чисел на доске, то также получим число, кратное 7. Таким образом, все числа, которые могут быть записаны на доске будут кратны 7, число 2012 не делится на 7, поэтому его на доске мы получить не можем.

б) После чисел 7 и 14 запишем на доске число $7+14=21$, после чего сделаем то же самое ещё раз. Получим последовательность 7, 14, 21, 21. Тогда $7+14+21+21=63$.

13 Рекуррентные последовательности

▶ **Пример 1.** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность, состоящая из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

Решение: Пусть $a_1 = x$, $a_2 = y$, тогда $a_3 = x + y$, $a_4 = x + 2y$ и $a_5 = 2x + 3y$.
а) Имеем:

$$5a_5 = 9a_4 \iff 5(2x + 3y) = 9(x + 2y) \iff x = 3y.$$

Тогда возьмём $y = 1$, $x = 3$, значит $a_3 = 4$, $a_4 = 5$ и $a_5 = 9$.
б)

$$5a_5 = 7a_4 \iff 5(2x + 3y) = 7(x + 2y) \iff 3x + y = 0$$

Такое невозможно, так как x и y – натуральные числа.

▶ **Пример 2.** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность, состоящая из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - 1$.

а) Приведите пример последовательности, в которой $a_5 = 4$?

б) Может ли некоторое число встречаться 3 раза?

Решение:
а) Пусть $a_1 = x$, $a_2 = y$. Тогда $a_3 = 2y - x - 1$, $a_4 = 3y - 2x - 3$, $a_5 = 4y - 3x - 6$. Имеем:

$$4y - 3x - 6 = 4 \iff 4x - 3y = 10.$$

Возьмём $x = 2$, $y = 4$, тогда $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, $a_5 = 4$.
б) Заметим, что $(a_{n+2} - a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_n) - 1$. Введём обозначение $a_{n+1} - a_n = d_n$. Тогда получаем равенство: $d_{n+1} = d_n - 1$. Таким образом, разница между соседними числами каждый раз уменьшается на 1. Пусть одно и то же число встретилось в последовательности два раза на местах n и k ($a_n = a_k$). Если n и k – два соседних числа, то в дальнейшем разница между соседними членами будет отрицательной, а значит последовательность будет убывать и третий раз наше число не встретится. Если n и k – не соседние числа, то в какой-то момент члены последовательности начали убывать так, что из нашего числа мы пришли в него же, значит после номера k последовательность также будет убывать, поэтому третий раз в одно и то же число мы также не сможем попасть.

▶ **Пример 3.** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность, состоящая из ненулевых целых чисел, причём $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

а) Может ли так быть, что $a_1 = a_4$?

б) Можно ли написать 10 членов с суммой 2025?

Решение: а) Мы получаем, что $a_4 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$, значит $a_1 = 0$. Такого быть не может, так как мы рассматриваем ненулевые целые числа.

б) Заметим, что, рассуждая также как в пункте а), мы получим равенство $a_n = -a_{n-3}$. Рассмотрим нашу сумму:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} =$$

$$= (a_{10} + a_7) + (a_9 + a_6) + (a_8 + a_5) + (a_7 + a_4) + (a_6 + a_3) + (a_4 + a_1) + a_2 + a_3 = a_2 + a_3.$$

Возьмём $a_2 = 1012$ и $a_3 = 1013$, тогда $a_1 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1012$, $a_6 = -1013$, $a_7 = -1$, $a_8 = 1012$, $a_9 = 1013$, $a_{10} = 1$.

▶ **Пример 4.** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность, состоящая из натуральных чисел, причём $a_{n+1} = a_n + 4n^2$, $a_1 > 4$.

а) Могут ли a_2 и a_3 быть простыми?

б) Может ли быть так, что $a_n + a_{n+1} \vdots 4$, если a_n и a_{n+1} – простые?

Решение:

а) Заметим, что $a_2 = a_1 + 4$, $a_3 = a_1 + 20$. Пусть $a_1 = 9$, тогда $a_2 = 13$ и $a_3 = 29$, то есть второй и третий член последовательности могут быть простыми.

б) $a_n + a_{n+1} = a_n + a_n + 4n^2 = 2a_n + 4n^2$, это число делится на 4, если a_n делится на 2, значит $a_n = 2$, но такого быть не может, так как наша последовательность возрастает и начинается с числа $a_1 > 4$.

14 Среднее арифметическое

▶ **Пример 1.** Есть 50 синих и красных карточек. На них написаны числа. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Если числа на синих увеличить вдвое, то среднее арифметическое будет 31,2. Найдите сумму на красных карточках.

Решение: Пусть на красных карточках сумма равна x, на синих – y. Сумма чисел на всех карточках равна $x+y$. Тогда среднее арифметическое равно $\dfrac{x+y}{50}$. То есть

$$\frac{x+y}{50}=16.$$

Если числа на синих карточках увеличить вдвое, то получим

$$\frac{x+2y}{50}=31{,}2.$$

Имеем:

$$\begin{cases} x+y=800, \\ x+2y=1560. \end{cases} \iff \begin{cases} y=760, \\ x=40. \end{cases}$$

То есть сумма на красных карточках равна 40.

▶ **Пример 2.** В течение четверти учитель ставил школьникам оценки "1", "2", "3", "4", "5". Среднее арифметическое оценок оказалось 4,7.

а) Найдите наименьшее возможное число оценок.

б) Найдите наименьшее возможное число оценок, если одна из них "1".

Решение: Пусть S – сумма оценок, n – количество оценок.
а) Имеем:

$$\frac{S}{n}=4{,}7=\frac{47}{10}\iff 10S=47n.$$

Числа 47 и 10 взаимно просты, поэтому $n \vdots 10$. Тогда наименьшее возможное n равно 10. При данном n можно построить следующий пример: учитель поставил 7 пятёрок и 3 четвёрки.

б) $n=10$ нам уже не подходит, потому что в этом случае максимально возможное S – это $9\cdot 5+1=46$. При этом число n всё ещё должно делиться на 10, поэтому далее рассмотрим случай $n=20$. Построим следующий пример: 1 ученик получает оценку "1", 1 ученик получает оценку "3" и остальные 18 учеников получают оценку "5". Тогда $S=18\cdot 5+3+1=94$ и среднее арифметическое равно $\dfrac{94}{20}=4{,}7$.

▶ **Пример 3.** На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое всех чисел равно -3, среднее арифметическое положительных равно 4, среднее арифметическое отрицательных равно -8. Сколько чисел написано на доске?

Решение: Пусть всего у нас n чисел, x положительных чисел, y отрицательных чисел и z нулей, тогда $x+y+z=n$. Сумма всех чисел с одной стороны равна $-3n$, с другой стороны $4x-8y$. Тогда получаем:

$$4x-8y=-3n.$$

Тогда $n \vdots 4$, существует только одно число в промежутке $(40,48)$, которое делится на 4, это 44, то есть $n=44$.

► **Пример 4.** На доске написано 10 раз по 3, 10 раз по 4 и 10 раз по 5. Числа разбиты на две непустые группы. A – среднее арифметическое первой группы, B – среднее арифметическое второй группы.

а) Может ли среднее арифметическое быть меньше $\dfrac{A+B}{2}$.

б) Группы разбили поровну. Чему равно $\dfrac{A+B}{2}$?

Решение: Среднее арифметическое равно

$$\frac{10\cdot(3+4+5)}{30}=\frac{120}{30}=4.$$

а) Пусть во второй находятся все числа 5, тогда $B=5$. В первой группе тогда все остальные числа и тогда $A=\dfrac{10\cdot(3+4)}{20}=3{,}5$. Получается, что

$$\frac{A+B}{2}=\frac{8{,}5}{2}>4.$$

б) В каждой группе по 15 чисел. Тогда сумма чисел в первой группе равна $15A$, а во второй – $15B$. Тогда $15A+15B=120$, значит $A+B=8$ и поэтому $\dfrac{A+B}{2}=4$.

► **Пример 5.** В ящике 73 овоща. Масса каждого – целое число грамм. Есть хотя бы два овоща разной массы. Средняя масса всех равна 1000 грамм. Средняя масса овощей, весящих больше 1000 грамм, равна 1030 грамм. Средняя масса овощей, весящих менее 1000 грамм, равна 980 грамм.

а) Может ли быть поровну овощей, весящих больше 1000 грамм и весящих меньше 1000 грамм?

б) Может ли быть 11 овощей, весящих ровно 1000 грамм?

Решение: Заметим, что суммарная масса овощей равна 73000 грамм. Пусть у нас x овощей весом >1000 грамм, y овощей весом <1000 грамм и z овощей весом ровно 1000 грамм. Таким образом

$$1030x+980y+1000z=73000.$$

а) Пусть $x=y$, тогда $z=73-2x$ и тогда получаем:

$$1030x+980x+1000(73-2x)=73000\iff 10x=0\iff x=0.$$

Тогда все овощи имеют массу 1000, но по условию такого быть не может (должно быть хотя бы два овоща разной массы).

б) Пусть $z=11$, тогда $y=62-x$. Получаем:

$$1030x+980(62-x)+1000\cdot 11=73000\iff 50x=62000-62\cdot 980\iff 62\cdot 98=6200-5x.$$

Число $6200-5x$ делится на 5, а число $62\cdot 98$ – нет, значит такого быть не может.

► **Пример 6.** $a_1,\dots,a_7$ – неотрицательные однозначные числа. M_k – среднее арифметическое всех чисел, кроме a_k. $M_1=1$, $M_2=2$.

а) Может ли $M_3=1{,}5$?

б) Может ли $M_3=3$?

Решение:

$$\frac{a_2+a_3+\dots a_7}{6}=1\iff a_2+a_3+\dots a_7=6.$$

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots a_7}{6} = 2 \Longleftrightarrow a_1 + a_3 + \ldots a_7 = 12.$$

а) Пусть $a_1 = 6$, $a_2 = 0$ и $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 3$, тогда $a_3 = 3$ и $M_3 = \dfrac{9}{6} = 1{,}5$.
б) Если $M_3 = 3$, то $a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 18$. Из того, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ следует, что

$$a_1 + a_2 + 2(a_3 + \ldots + a_7) = 18 = a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \Longleftrightarrow 2a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0.$$

То есть $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, но в таком случае $a_1 = 12$, чего быть не может.

15 Комбинаторика

► **Пример 1.** В магазине продают 4 вида чашек и 3 вида блюдец. Сколько способов купить чашку и блюдце?

Решение: Пусть у нас есть блюдца $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ и чашки $Ч_1$, $Ч_2$, $Ч_3$, $Ч_4$. В пару к $Б_1$ мы можем взять любую из чашек, то есть есть 4 способа взять блюдце $Б_1$ и любую чашку. Аналогично, есть 4 способа взять блюдце $Б_2$ и любую чашку, а также 4 способа взять блюдце $Б_3$ и любую чашку. Очевидно, что мы перебрали все возможные варианты выбора чашки и блюдца, значит общее число равно 12.

Правило по которому мы действовали в данном примере называется *правилом произведения*, оно гласит следующее: если в первом множестве n элементов, во втором множестве m элементов, то у нас есть $m \cdot n$ способов выбрать по одному элементу из этих множеств.

► **Пример 2.** В магазине продают 5 видов чашек, 3 вида блюдец и 4 вида ложек. Сколько способов выбрать а) по одному предмету каждого вида? б) комплект из двух предметов различных видов?

Решение:
а) Одну чашку и одно блюдце мы можем выбрать $5 \cdot 3 = 15$ способами. К каждому из этих 15 вариантов мы можем подобрать 4 вида ложек, тогда мы получаем $15 \cdot 4 = 60$ вариантов выбора одного предмета каждого вида.

б) Мы можем выбрать одну чашку и одно блюдце ($5 \cdot 3 = 15$ способов), одну чашку и одну ложку ($5 \cdot 4 = 20$ способов), одно блюдце и одну ложку ($4 \cdot 3 = 12$ способов). Таким образом, всего получаем $15 + 20 + 12 = 47$ способов выбрать комплект из двух предметов различных видов.

► **Пример 3.** Сколько всего пятизначных чисел, состоящих из а) нечётных цифр? б) чётных цифр? в) хотя бы одной чётной цифры?

Решение:
а) Всего среди цифр 5 нечётных. В качестве каждой цифры нашего пятизначного числа мы можем выбрать любую из пяти нечётных чисел. Значит всего мы имеем $5^5 = 3125$ пятизначных чисел, состоящих из нечётных чисел.

б) Решать пункт б) также, как и пункт а) нельзя, так как на первое место в нашем числе мы не можем поставить цифру 0 (но на все другие места мы можем это сделать). То есть на первое место мы можем поставить любое из 4 чётных чисел (без 0), а на все остальные места мы можем поставить любое из 5 чётных чисел (тут 0 мы поставить можем). Таким образом получаем $4 \cdot 5^4 = 2500$ чисел.

в) Найдём общее количество пятизначных чисел. На первое место мы можем поставить любую цифру, кроме 0, на все оставшиеся места мы можем поставить любую цифру. Тогда всего пятизначных чисел $9 \cdot 10^4 = 90000$. При этом все пятизначные числа мы можем разбить на две группы: те, в которых есть хотя бы одна чётная цифра (первая группа) и те, в которых нет ни одной чётной цифры (вторая группа). В пункте а) мы нашли количество чисел из второй группы: 3125. Тогда мы можем найти количество чисел в первой группе, вычтя из общего количества пятизначных количество чисел во второй группе. То есть наше число равно $90000 - 3125 = 86875$.

► **Пример 4.** Сколько есть возможных исходов при а) 2; б) 3; в) 5 бросаниях монеты?

Решение:
а) При двух бросаниях у нас есть следующие варианты выпадения монет: OO, OP, PO, PP. То есть всего 4 варианта.

б) После каждого броска у нас есть всего 2 способа выпадения монет, значит всего имеем $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способа выпадения монет при трёх бросках.

в) Действуя также, как и в предыдущем пункте, получаем, что у нас есть $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ способа выпадения монет при пяти бросках.

▶ **Пример 5.** У Насти есть а) 3; б) 4; в) 10 разноцветных фишек. Сколько у нас способов выложить их в ряд?

Решение:
а) Пусть у Насти фишки зелёного (З), красного (К) и синего (С) цветов. Если на первом месте стоит зелёная фишка, то мы можем разложить фишки двумя способами: ЗКС и ЗСК. Аналогично, если на первом месте лежит красная фишка: КЗС и КСЗ. Если на первом месте стоит синяя фишка, то получаем следующие варианты: СКЗ и СЗК. Всего мы получили 6 вариантов расположения фишек.

б) Теперь допустим мы выбрали на первое место одну из фишек. Тогда оставшиеся фишки мы можем разложить 6 способами. На первое место мы можем поставить любую из фишек, поэтому всего мы имеем $4 \cdot 6 = 24$ способа расположить фишки.

в) На первое место Настя может поставить любую из 10 фишек. Тогда на следующее место она может положить только одну из 9 фишек. После каждой положенной фишки число возможных вариантов у Насти снижается на 1. Тогда всего Настя имеет

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

способов разложить 10 фишек.

▶ **Пример 6.** Сколько всего пятизначных чисел, состоящих из а) нечётных цифр? б) чётных цифр? Причём каждая цифра встречается только 1 раз.

Решение:
а) Всего у нас 5 нечётных цифр. Тогда на первое место мы можем поставить 5 цифр, на второе 4 цифры, на третье 3 цифры, на четвертое 2 цифры, на пятое остаётся только 1 цифра. Тогда всего получаем $5! = 120$ подходящих чисел.

б) На первое место мы можем поставить любую чётную цифру, кроме 0, то есть имеем 4 способа; на второе место мы также можем поставить 4 цифры (так как цифра, поставленная на первое место уже недоступна, но стала доступна цифра 0); на третье место можем поставить 3 цифры; на четвёртое – 2; на пятое – 1. Тогда получаем $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ вариантов.

▶ **Пример 7.** Сколько всего пятизначных чисел в записи которых нет цифры а) 5? б) 0? Причём все цифры числа различны.

Решение:
а) На первое место мы можем поставить одну из 8 цифр (любую, кроме 0 и 5), на второе место можем поставить одну из 8 цифр (потому что нам стала доступна цифра 0), на третье место – 7 цифр, на четвёртое место – 6 цифр, на пятое – 5 цифр. Получаем $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 13440$.

б) На первое место мы можем поставить одну из 9 цифр, на второе – 8 цифр, на третье – 7, на четвёртое – 6, на пятое – 5. Тогда получаем всего $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ способов.

▶ **Пример 8.** Сколько способов поставить на доску 2 ладьи: а) одну чёрную и одну белую? б) две белые? Причем ладьи не должны бить друг друга.

Решение:
а) Ладьи бьют по горизонтали и по вертикали. Поставим в некоторую клетку белую ладью. Она бьёт 7 полей по вертикали, 7 полей по горизонтали и одну клетку занимает сама. Значит мы можем поставить чёрную ладью в любую другую клетку. Тогда получаем всего $64 \cdot (64 - 15) = 3136$ способов поставить ладьи.

б) Теперь покрасим чёрную ладью в белую, тогда есть два положения белой и чёрной ладьи, которое дают одно положение двух белых ладей. Значит у нас в 2 раза меньше способов поставить на доску две белые ладьи. То есть $\dfrac{3136}{2} = 1568$.

Если мы хотим выбрать (без учёта порядка) какие-то k элементов из множества, состоящего из n элементов, то это можно сделать

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

способами.

► **Пример 9.** Сколько способов выбрать из 10 учеников а) старосту и зама? б) двух дежурных?

Решение: а) Выбрать старосту мы можем 10 способами, после этого остаётся 9 вариантов для выбора зама. Тогда всего имеем $10 \cdot 9 = 90$ способов.

б) Рассуждать также, как и в предыдущем пункте нельзя. Действительно, если у нас есть два ученика Петя и Маша, то вариант, при котором Петя становится старостой, а Маша – замом, отличается от варианта, при котором Петя – зам, а Маша – староста. В случае выбора дежурных нам лишь нужно выбрать пару учеников, которые будут одинаковыми дежурными, то есть каждая пара учеников даёт лишь один вариант их выбора в качестве дежурного, тогда как в первом пункте каждая пара учеников давала 2 варианта выбора их старостой и замом. Отсюда мы получаем, что вариантов выбрать двух дежурных в два раза меньше, чем вариантов выбрать старосту и зама, то есть $\frac{90}{2} = 45$.
Эту задачу можно решить и с помощью формулы числа сочетаний. Действительно, нам нужно выбрать из 10 учеников 2 ученика, которые будут дежурными, и порядок их выбора не важен, значит всего мы имеем

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

► **Пример 10.** Сколько способов выбрать 4 элемента из множества, состоящего из а) 4 элементов? б) 5 элементов? в) 6 элементов? г) 10 элементов?

Решение:
а) Есть лишь 1 способ выбрать 4 элемента из 4-х элементного множества: выбрать все элементы.

б) Заметим, что для выбора 4 элементов из 5 нам нужно выбрать 1 элемент, который мы не выберем, то есть мы получаем 5 способов выбрать 4 элемента из 5.

в) Рассуждение из предыдущего пункта сработает и тут: выбрать 4 элемента из 6 – это то же самое, что и выбрать 2 элемента из 6, которые мы не возьмём. Это можно сделать $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами.
г) Воспользуемся формулой для числа сочетаний:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 7 \cdot 3 = 210.$$

► **Пример 11.** В турнире участвуют 8 спортсменов, причём каждый играет с каждым (по одному разу). Сколько всего было сыграно матчей?

Решение: Нам нужно найти количество пар спортсменов, которые мы можем составить (без учёта порядка). Это можно сделать

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

способами.

▶ **Пример 12.** Сколько диагоналей в а) пятиугольнике? б) 10-угольнике?

Решение:
а) Всего в пятиугольнике 5 вершин. Конкретную вершину мы можем диагональю соединить с любой не соседней вершиной (с соседними она соединена стороной), есть всего 2 таких вершины, то есть из конкретной вершины мы можем построить 2 диагонали. Если мы также посчитаем для каждой вершины пятиугольника, то получим 10 диагоналей, но при этом каждую диагональ мы посчитали ровно два раза, поэтому всего у нас 5 диагоналей.

б) У любой диагонали есть две вершины. Первую вершину мы можем выбрать 10 способами, вторую – $10 - 3 = 7$ способами (так как мы не можем взять уже выбранную вершину и соседние с ней), всего $10 \cdot 7 = 70$ способов. Но нам не важно какую вершину мы выберем первой, а какую второй, поэтому полученное число надо поделить на 2: $\frac{70}{2} = 35$.

▶ **Пример 13.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение: Для начала будем считать, что все буквы в слове математика различны (например, скажем, что вместо двух одинаковых букв М у нас две разные буквы M_1 и M_2). Тогда всего мы имеем 10! способов переставить буквы в слове математика. Но мы также понимаем, что некоторые перестановки будут одинаковыми, потому что в нашем слове есть совпадающие буквы. Пусть у нас есть некоторое конкретное слово, мы можем переставить в нём буквы M_1 и M_2 местами, а всё остальное не менять, тогда, если мы будем считать, что M_1 и M_2 не отличаются, то наше слово не изменится. Значит общее количество перестановок 10 букв мы должны поделить на 2. Аналогично, мы должны поделить на 2 ещё раз, из-за того, что в нашем слове две буквы T. Далее, мы можем в слове поменять местами буквы A_1, A_2 и A_3, а все остальные буквы оставить на месте и тогда на самом деле наше слово не изменится. У нас есть $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов поменять местами A_1, A_2 и A_3 и значит общее количество перестановок 10 букв мы должны ещё поделить на 6. Получаем, что всего мы имеем

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$$

различных слов.

▶ **Пример 14.** Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 5?

Решение: Будем рассуждать следующим образом: представим наше число как последовательность 0 и 1. Например, пусть у нас есть число 123: сначала поставим несколько 1 в количестве, равном первой цифре нашего числа, то есть одну единицу, после этого поставим 1 раз цифру 0; далее поставим 2 раза по 1 и после 1 раз 0; после этого поставим 3 единицы. Получим такую последовательность: 10110111. Если на какой-то позиции в нашем числе стоит 0, то на соответствующем месте мы не ставим ничего. Например, числу 203 соответствует последовательность 1100111. Заметим, что если сумма цифр числа равна 5, то в нашей последовательности будет ровно 5 раз по 1 и 2 раза по 0 (при этом на первом месте обязательно должна стоять цифра 1). Тогда нам нужно найти количество таких последовательностей: нам нужно выбрать два места для цифры 0 (доступны все, кроме первого), это можно сделать

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

Тогда единицы выставляются однозначно, то есть всего у нас 15 трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 5

16 Количество делителей

▶ **Пример 1.** Найдите количество натуральных делителей чисел а) 10; б) 20; в) 500; г) 2000.

Решение:

а) Перечислим делители числа 10: 1, 2, 5, 10. То есть всего 4 делителя.

б) Перечислим делители числа 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Получаем 6 делителей.

в) Число 500 уже слишком большое, чтобы вручную перебирать все делители этого числа. Рассмотрим общий случай: пусть у нас есть число n и мы знаем его разложение на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Тогда все делители числа n можно представить в следующем виде:

$$k = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m}.$$

Причём

$$0 \le \beta_1 \le \alpha_1; \quad 0 \le \beta_2 \le \alpha_2; \ldots; 0 \le \beta_m \le \alpha_m.$$

То есть для β_1 у нас есть $\alpha_1 + 1$ вариантов, для $\beta_2 - \alpha_2 + 1$ вариантов, и так далее. По итогу общее число делителей числа n можно найти по следующей формуле:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1).$$

Разложим число 500 на простые множители:

$$500 = 2^2 \cdot 5^3.$$

Тогда по нашей формуле число 500 имеет $(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 12$ делителей.

г) Разложим число 2000 на простые множители:

$$2000 = 2^4 \cdot 5^3.$$

Тогда получаем $(4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$ делителей.

▶ **Пример 2.** Найдите сумму натуральных делителей чисел а) 10; б) 20; в) 500; г) 2000; д) 30.

Решение:

а) Сумму делителей числа 10 легко посчитать явно: $1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

б) Аналогично все с числом 20: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$.

в) Для числа 500 сумму делителей вручную посчитать уже сложно. Вновь посмотрим на общую ситуацию: пусть нам дано число n с известным разложением на множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Тогда сумму натуральных делителей данного числа можно найти по следующей формуле:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_m + p_m^2 + \ldots + p_m^{\alpha_m}).$$

Теперь можем найти сумму натуральных делителей числа 500 (напомним, что $500 = 2^2 \cdot 5^3$):

$$(1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 7 \cdot 156 = 1092.$$

г) Найдём сумму натуральных делителей числа 2000:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 31 \cdot 156 = 4836.$$

д) Число 30 имеет следующее разложение на простые $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Тогда искомая сумма равна:

$$(1+2)(1+3)(1+5) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

▶ **Пример 3.** У натурального числа нечётное число делителей. Верно ли, что это число – квадрат натурального числа?

Решение: Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$. Тогда число

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1).$$

является нечётным, значит, и все числа

$$\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_m + 1$$

являются нечётными, следовательно, числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

являются чётными. Представим их в следующем виде:

$$\alpha_1 = 2\beta_1, \alpha_2 = 2\beta_2, \ldots, \alpha_n = 2\beta_m.$$

Тогда получаем:

$$n = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{2\beta_m} = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m})^2.$$

То есть наше число n действительно является квадратом натурального числа.

▶ **Пример 4.** Найдите натуральное число, у которого 21 делитель и которое оканчивается на 0.

Решение: Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10, то есть оно точно делится на 2 и на 5. Возьмём число $2^6 \cdot 5^2 = 1600$. Оно оканчивается на 0 и имеет $(6+1) \cdot (2+1) = 21$ делитель.

▶ **Пример 5.** Существует ли трёхзначное число, у которого а) 5 делителей? б) 15 делителей?

Решение:

а) 5 делителей имеет только число вида p^4, где p – простое число. Нам подойдёт число $5^4 = 625$.

б) $15 = 5 \cdot 3$. Тогда есть два варианта для разложения на простые у нашего числа: p^{14} (p – простое) или $p_1^2 \cdot p_2^4$ (p_1 и p_2 – простые). Первый вариант нам не подходит, так как $2^{14} > 2^{10} = 1024$. Второй вариант нам подходит: возьмём число $2^2 \cdot 3^4 = 324$.

17 Оценка + пример

▶ **Пример 1.** Петя разделил 44 спички на несколько кучек. Затем он посчитал число спичек в каждой кучке. Какое наибольшее число различных чисел он мог получить?

Решение: Оценим то, как много Петя мог получить кучек различного размера. В каждой кучке должна быть хотя бы одна спичка. Пусть у нас 9 кучек с различным числом спичек, тогда всего в этих кучках хотя бы

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

спичек. Но по условию у нас 44 спички. Пусть тогда у нас 8 кучек, тогда в этих кучках хотя бы $45 - 9 = 36$ спичек. Эта оценка не противоречит нашему условию, значит мы можем точно сказать, что количество искомых кучек не превосходит 8.
Приведём пример, когда это возможно. Разобьём наши спички на 9 кучек. В первых восьми кучках будет $1, 2, 3, \ldots, 8$ спичек, а в последней кучке также будет 8 спичек. Таким образом, всего в наших кучках оказалось 44 спички и кучек с различным числом спичек у нас 8.

▶ **Пример 2.** Трёхзначное число, в записи которого нет нулей, поделили на произведение цифр. Найдите наименьшее значение частного.

Решение: Запишем наше число в следующем виде $100a + 10b + c$. Оценим выражение $\dfrac{100a + 10b + c}{abc}$:

$$\frac{100a + 10b + c}{abc} = \frac{100}{bc} + \frac{10}{ac} + \frac{1}{bc} \geq \frac{100}{81} + \frac{10}{81} + \frac{1}{81} = \frac{37}{27}.$$

Построим пример, когда эта оценка выполняется. Для этого возьмём число 999. Получаем:

$$\frac{999}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{111}{81} = \frac{37}{27}.$$

▶ **Пример 3.** Уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет 2 натуральных корня. Найдите наибольшее значение суммы $p + q$, если $p < 20$ и $q < 20$.

Решение: По теореме Виета получаем, что $x_1 + x_2 = p$ и $x_1 x_2 = q$ (где x_1 и x_2 – корни нашего уравнения), то есть p и q – натуральные числа.
Сделаем оценку: $p + q \leq 19 + 19 = 38$. Пусть $p + q = 38$, тогда $p = q = 19$. В таком случае мы получаем уравнение

$$x^2 - 19x + 19 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен 285, это число не является полным квадратом, значит данное уравнение не имеет натуральных корней и случай $p = q = 19$ нам не подходит. Таким образом, $p + q \leq 37$.
Построим пример, при $p + q = 37$. Пусть $p = 19$, а $q = 18$. Получаем уравнение

$$x^2 - 19x + 18 = 0.$$

Оно имеет два корня: 1 и 18. То есть наибольшее значение $p + q$ равно 37.

▶ **Пример 4.** Красный карандаш стоит 20 рублей, синий – 15 рублей. У нас есть 500 рублей. Какое наибольшее количество карандашей можно купить, если число красных и число синих отличается не более чем на 5?

Решение: Пусть мы купили всего 30 карандашей. Чтобы минимизировать потраченную сумму нам нужно минимизировать число купленных красных карандашей. Мы должны купить не менее 13 красных карандашей, так как, если мы купим меньше, то разница между числом синих и число красных будет больше 5. Рассмотрим случай, когда мы купили 13 красных и 17 синих карандашей. Мы потратим

$$13 \cdot 20 + 17 \cdot 15 = 515 > 500.$$

То есть при покупке 30 карандашей мы потратим минимум 515 рублей, чего быть не может. То есть мы можем купить не больше 29 карандашей.
Приведём пример, когда мы можем купить ровно 29 карандашей. Купим 13 красных карандашей и 16 синих. Тогда мы потратим

$$13 \cdot 20 + 16 \cdot 15 = 500$$

рублей и купим 29 карандашей.

▶ **Пример 5.** На доске написано 100 различных натуральных чисел. Их сумма равна 5130. Какое минимальное количество чисел, кратных 16, написано на доске?

Решение: Если на доске 3 числа, кратных 16, то минимальная сумма чисел на доске равна

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 - 96 - 80 - 64 + 101 + 102 + 103 = 5116.$$

Если на доске 2 числа, кратных 16, то минимальная сумма чисел на доске равна

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 - 96 - 80 - 64 - 48 + 101 + 102 + 103 + 104 = 5172 > 5130.$$

Таким образом, на доске как минимум 3 числа, кратных 16. Приведём пример, когда на доске ровно 3 числа, кратных 16: возьмём все числа от 1 до 100, кроме чисел 96, 80, 64, а вместо них возьмём числа 101, 104, 115. Тогда сумма чисел на доске равна

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 - 96 - 80 - 64 + 101 + 104 + 115 = 5130.$$

▶ **Пример 6.** 4 ученика кормят кроликов. Первый даёт по 100 грамм корма, второй даёт по 200 грамм, третий даёт по 300 грамм, а четвёртый – по 400 грамм. Каждый покормил 4 кроликов и все кролики получили разное количество корма. Какое наибольшее количество кроликов может быть?

Решение: Всего кролики получили

$$4(100 + 200 + 300 + 400) = 4000$$

грамм корма. Пусть кроликов не меньше 10, то получается, что минимальное количество корма, который кролики получили равно

$$0 + 100 + 200 + \ldots + 900 = 4500.$$

Таким образом, 10 кроликов быть не может. Значит кроликов не больше 9.
Построим пример, когда кроликов ровно 9. Составим таблицу, в которой будет указано сколько каких кроликов кормит каждый ученик (если стоит 0, то данный кролик не был покормлен данным учеником, если был, то ставится 1):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 ученик	0	1	0	0	0	1	1	1	0
2 ученик	0	0	1	0	0	1	1	0	1
3 ученик	0	0	0	1	0	1	0	1	1
4 ученик	0	0	0	0	1	0	1	1	1

Тогда мы видим, что каждый ученик действительно покормил 4 кроликов и кролики получили разное число количество корма: 0 грамм, 100 грамм, 200 грамм, 300 грамм, 400 грамм, 600 грамм, 700 грамм, 800 грамм, 900 грамм.

► **Пример 7.** На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 30$. За один ход можно стереть три числа, сумма которых меньше 35. Суммы не повторяются. Найдите наибольшее число ходов.

Решение: Если ходов ровно 7. Тогда общая сумма стёртых чисел не меньше

$$1 + 2 + \ldots + 21 = 231.$$

При этом максимальная сумма чисел, стёртых с доски равна

$$34 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29 + 28 = 217.$$

Но $217 < 231$, то есть такого не может быть. Очевидно, что совершить > 7 ходов мы также не можем. То есть всего ходов не больше 6.
Приведём пример, когда ходов ровно 6:

1. Сотрём числа 1, 15 и 18. Их сумма равна 34.
2. Сотрём числа 2, 14 и 17. Их сумма равна 33.
3. Сотрём числа 3, 13 и 16. Их сумма равна 32.
4. Сотрём числа 8, 11 и 12. Их сумма равна 31.
5. Сотрём числа 7, 9 и 10. Их сумма равна 26.
6. Сотрём числа 4, 5 и 6. Их сумма равна 15.

► **Пример 8.** Число $n = \overline{abcd}$ счастливое, если $a \neq b \neq c \neq d$ и $a + b = c + d$. Найдите наименьшее простое p, такое, что n никогда не делится на p.

Решение: Заметим, что $4682 \,\vdots\, 2$, $3690 \,\vdots\, 3$, $\underline{3690} \,\vdots\, 5$ и $9128 \,\vdots\, 7$, то есть $p \geqslant 11$.
Докажем, что $p = 11$ нам подходит. Пусть $\overline{abcd} \,\vdots\, 11$, тогда

$$b + d - a - c \,\vdots\, 11.$$

При этом $b = c + d - a$, значит

$$2(d - a) \,\vdots\, 11.$$

При этом $-18 \leqslant 2(d - a) \leqslant 18$ и $2(d - a)$ – чётное число. Значит $2(d - a) = 0$ и $a = d$, но такое невозможно по условию. Получаем противоречие. То есть счастливое число $\overline{abcd}$ никогда не делится на 11.

► **Пример 9.** a, b, c, d – попарно различные двузначные натуральные числа. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a > 3d$ и $c > 6b$.

Решение: Из условия следует, что $a \geqslant 3d + 1$ и $c \geqslant 6b + 1$, значит $d \leqslant 32$. Тогда

$$\frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{3d+1+6b+1}{b+d} = \frac{3(b+d)}{b+d} + \frac{3b+2}{b+d} = 3 + \frac{3b+2}{b+d} \geqslant 3 + \frac{3b+2}{b+32} \geqslant$$

$$\geqslant 3 + \frac{3(b+32)}{b+32} - \frac{94}{b+32} = 6 - \frac{94}{b+32} \geqslant 6 - \frac{94}{42} = \frac{79}{21}.$$

Приведём пример, когда эта оценка достигается. Возьмём $b = 10$, $c = 61$, $d = 32$, $a = 97$. Получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}.$$

18 Задачи для самостоятельного решения

18.1 Делимость и признаки делимости

Задача 1. Можно ли вписать вместо звездочек в число $189 \ast \ast 0$ числа так:

а) Чтобы число делилось на 1500?

б) Чтобы число делилось на 5000?

в) Сколько существует способов вписать вместо звездочек в число $189 \ast \ast 0$ две цифры так, чтобы число делилось на 220?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 2. У Влада есть 36 карточек с числами от 1 до 36, все эти карточки он хочет разбить на пары так, чтобы во всех парах разность чисел была одинаковой.

а) Может ли он это сделать, если разность равна 6?

б) Может ли он это сделать, если разность равна 7?

в) Сколькими способами он может это сделать?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 3. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \ldots; 299\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{100}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 4. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и 2a $- 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 13.

б) Может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 400?

в) Сделали 513 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 5. На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 240?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 16?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 16, может быть на доске?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 6. На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 9. Сумма написанных чисел равна 877.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?

б) Могут ли ровно 15 чисел на доске оканчиваться на 9?

в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 9, может быть на доске?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 7. Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару, большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару $(806; 788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 8. Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

а) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 32 см на части по 1 см?

б) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 50 см на части по 1 см?

в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 9. На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

18.2 Десятичная запись

Задача 1. Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$.

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 2. С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 3. С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 201?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 251?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 4. Трёхзначное натуральное число, в десятичной записи которого нет нулей, разделили на произведение его цифр.

а) Может ли получившееся частное быть равным 5?

б) Может ли получившееся частное быть равным 1?

в) Какое наименьшее значение может принимать это частное?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 5. С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 6. Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел поделили на его первую цифру. Сумма получившихся чисел равна S.

а) Может ли S быть равной 42,3?

б) Может ли S быть равной $229\frac{41}{72}$?

в) Найдите наибольшее целое значение S, если каждое из исходных чисел было от 800 до 999 включительно.

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

18.3 Простые и составные числа

Задача 1. Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

а) Могло ли получиться так, что склад объёмом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?

б) Могло ли получиться так, что на складе объёмом 400 невозможно разместить 133 контейнера?

в) Какой наибольший процент объёма любого склада объёмом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 2. На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 6 чисел, сумма которых равна 71?

б) Может ли на доске быть 9 чисел, сумма которых равна 71?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 7000?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения p, если $q = 11$.

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $p > 100$ и $q < 20$?

в) Найдите наибольшее значение $(p + q)$ при $p < 20$ и $q < 20$.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 3. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.

б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.

в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

18.4 НОД и НОК

Задача 1. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

18.5 Диофантовы уравнения

Задача 1. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 – при получении двух звёзд и 2000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 2. Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, и в первый день один из них решил на одну задачу больше, чем другой.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 3. Сторона квадрата на 3 см длиннее ширины прямоугольника, площади этих фигур равны, а все длины сторон – целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 8?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 16?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов. В ответе укажите длины их сторон.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

18.6 Прогрессии и последовательности

Задача 1. Возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... И b_1, b_2, ..., b_n состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leqslant 300$?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 2. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 30$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 3. В школьном живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый ученик насыпает нескольким кроликам (хотя бы одному, но не всем) порцию корма. При этом первый ученик даёт порции по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, четвёртый – по 400 г, а какие-то кролики могут остаться без корма.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все кролики получили разное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если известно, что каждый ученик засыпал корм ровно четырём кроликам и все кролики получили разное количество корма?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 4. Возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... и b_1, b_2, ..., b_n, ... состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ – различные натуральные числа?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 5. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при всех натуральных $n > 2$.

а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?

б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 6. На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки $+$ и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

$$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?

б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?

в) Чему могло равняться n, если полученная сумма чисел равна 150?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

18.7 Среднее арифметическое

Задача 1. В течении четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4,7.

а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?

б) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика, если среди этих отметок есть отметка «1»?

в) Учитель заменил четыре отметки «3», «3», «5», «5» двумя отметками «4». На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок ученика после замены?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 2. На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\dfrac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\dfrac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{A+B}{2}$.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 3. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно. что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\dfrac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\dfrac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

⟹ **Разбор задачи**

Задача 4. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если набрал не менее 85 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 7 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 85, средний балл участников, сдавших тест, составил 95, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 70. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 100, а не сдавших тест – 72. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

⟹ **Разбор задачи**

Задача 5. Последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1{=}1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}6$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

⟹ **Разбор задачи**

Задача 6. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 10?

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Задача 7. Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой карточке написано натуральное число. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

⟹ **Разбор задачи**

Задача 8. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 107

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

⟹ **Разбор задачи**

18.8 Оценка + пример

Задача 1. Петя разделил 44 спички на несколько кучек. Затем он посчитал сколько спичек в каждой кучке.

а) Мог ли он получить 5 различных чисел?

б) Мог ли он получить 10 различных чисел?

в) Какое наибольшее количество различных чисел у него могло получиться?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 2. В футбольном матче за победу дается 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. 8 команд участвовало в одном круговом турнире.

а) Могли ли все команды в сумме набрать 48 очков?

б) Могли ли все команды в сумме набрать 83 очков?

в) Известно, что команда, занявшая первое место, набрала на 18 очков больше, чем команда, занявшая последнее место. Какое наибольшее количество ничьих могло быть в турнире?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 3. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

$\Longrightarrow$ Разбор задачи

Задача 4. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий – 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

⟹ Разбор задачи

Задача 5. Известно, a, b, c и d – попарно различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ если $a > 3d$ и $c > 6b$?

⟹ Разбор задачи

Задача 6. В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?

б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

⟹ Разбор задачи

Задача 7. На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

⟹ Разбор задачи

Задача 8. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа $1, 3, 3, 4$, то на доске будет записан набор $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11$.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $2, 4, 6, 8$.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22$?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52$.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 9. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 10. Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 14 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 12 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 77 контейнеров массой 2 тонны?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 11. На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 173?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 109?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021?

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

Задача 12. У ювелира есть 47 полудрагоценных камней, масса каждого из которых целое число граммов, не меньшее 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трём кучам: в первой куче n_1 камней, во второй – n_2 камней, а в третьей – n_3 камней, причём $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1, во второй – S_2, а в третьей – S_3.

а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?

б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 105 граммов?

в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k, для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.

$\Longrightarrow$ **Разбор задачи**

профиматика

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

90+
Набрал каждый 3-ий наш ученик

98%
Выпускников студенты топовых вузов

7500+
Учеников прошли наши годовые курсы

6 лет
Опыта подготовки к экзаменам

Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ

Игорь Уколов

отец Профиматики

- Выпускник мехмата МГУ
- Лично подготовил 30+ стобалльников
- 3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый

Влад Вуль

отец корги и не только

- Диплом факультета прикладной математики МГОУ
- Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU
- 8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.

Антон Гурко

преподаватель математики

- Выпускник ВМК МГУ
- Учитель высшей категории со стажем более 10 лет
- Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

19 Ответы

Делимость и признаки делимости

1. а) да; б) нет; в) 4.
2. а) да; б) нет; в) 6.
3. а) да; б) нет; в) 8.
4. а) да, например, $(2,3)$; $(3,5)$; $(5,8)$; $(9,13)$; б) нет; в) 2.
5. а) нет; б) нет; в) 3.
6. а) да; б) нет; в) 7.
7. а) да; б) нет; в) 403.
8. а) да, может; б) нет, не может; в) за 9 ходов.
9. а) да; б) нет; в) 6.

Десятичная запись

1. а) например, 339; б) нет; в) $\frac{931}{27}$.
2. а) 2847; б) нет; в) 9167169.
3. а) да; б) нет; в) 40.
4. а) да; б) нет; в) $\frac{37}{27}$.
5. а) да; б) нет; в) 51.
6. а) нет; б) нет; в) 1377.

Простые и составные числа

1. а) нет; б) да; в) 4.
2. а) да; б) нет; в) 2 или 3.
3. а) 12; б) нет; в) 37.
4. а) $-56, -16$; б) 64; в) 6 и 8.

НОД и НОК

1. а) да; б) нет; в) 7.

Диофантовы уравнения

1. а) нет; б) 7; в) 49000.
2. а) да; б) нет; в) 84.
3. а) нет; б) да; в) 9×16 и 12×12; 3×12 и 6×6; 1×16 и 4×4.

Прогрессии и последовательности

1. а) Да, например, 1,3,5, ... и 1,4,7, ...; б) нет; в) 98.
2. а) $(13, 14, 7), (12, 15, 6), (11, 16, 5), (10, 17, 4), (9, 18, 3)$; б) нет; в) 6.
3. а) да; б) нет; в) 9.
4. а) да; б) нет; в) 2.
5. а) да; б) нет; в) $\frac{200}{81}$.
6. а) да, б) нет, в) $150, 141, 132, 123, 114, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15$.

Среднее арифметическое

1. а) 10; б) 20; в) $\frac{7}{90}$.
2. а) да, например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»; в) $4\frac{14}{29}$.
3. а) нет; б) да; в) $\frac{6}{7}$.
4. а) да; б) да; в) 35.
5. а) да; 1 б) нет; в) 2,8.
6. а) нет; б) нет; в) 9,5.
7. а) да;, б) нет; в) 35.
8. а) нет; б) нет; в) 9,5.

Оценка + пример

1. а) да; б) нет; в) 8.
2. а) нет; б) да; в) 18.
3. а) да, например, 51 или 68; б) нет; в) 117 или 119.
4. а) да; б) нет; в) 33.
5. а) да; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.
6. а) да; б) нет; в) $\frac{31}{6}$.
7. а) нет; б) да; в) 6.
8. а) $2, 2, 2, 2$; б) нет; в) $9, 10, 11, 11, 11$ или $9, 10, 11, 22$.
9. а) да; б) нет; в) 35.
10. а) да; б) нет; в) 25.
11. а) да, б) нет, в) 6.
12. а) да; б) нет; в) 122.

профиматика

Ты героически добрался до конца файла — поздравляем!

Сам факт того, что ты изучил этот материал, уже дает тебе большое преимущество в подготовке к ЕГЭ. Однако одной теории недостаточно: для высокого балла нужно уметь доказывать теоремы и решать практические задачи.

Если ты хочешь достичь результата без лишнего стресса и нервов, получить чёткий план от экспертов и поддержку на каждом этапе подготовки, записывайся на наш легендарный курс подготовки к ЕГЭ.

Тебя ждёт:

- Глубокое вводное тестирование – оно покажет твои сильные и слабые стороны и поможет отточить ровно то, с чем есть сложности;
- Индивидуальная траектория подготовки четко на твой желанный балл;
- Вебинары с ДЗ и проверкой экспертов;
- Регулярные пробники;
- Куча полезных материалов: шпоры, методички по каждой задаче;
- Поддержка наставников – тех, кто прошел этот путь до тебя и знает все секреты подготовки;
- Имбовая атмосфера среди таких же замотивированных ребят, как и ты и чат, где мы лично отвечаем на все вопросы.

Записаться на курс

А по промокоду **EGEPROFI** ты получишь скидку в 10% на любой тариф нашего курса!