профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

Задача 18 профильного ЕГЭ по математике

тут можете держать
с нами мной связь, получать
бесплатные матемриалы.
методички и разборы

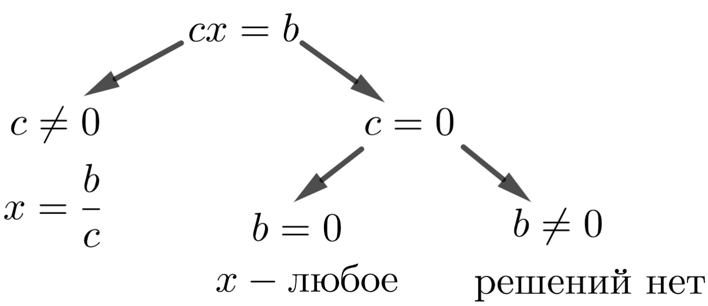
Содержание

1 Линейные уравнения и неравенства в задачах с параметром

⟹ Теория и пример решения

Теоретическая справка

Рассмотрим алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной вида $cx = b$, где x — переменная, c и b — некоторые числа.



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить уравнение $7x + 10a - 1 = 4x - 9a + 5$ при всех значениях параметра a.

Задача 2

Решить уравнение $ax = -7$ при всех значениях параметра a.

Задача 3

Решить уравнение $(a^2 - 9)x - a + 3 = 0$ при всех значениях параметра a.

Задача 4

Найти все a, при которых уравнение

$$5x - 17a = 21 - 5ax$$

имеет корень, больший 3.

Задача 5

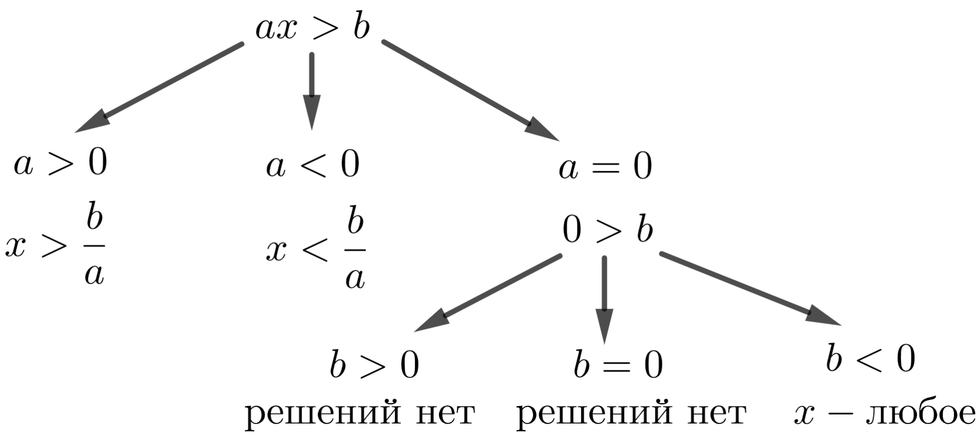
При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

Теория

Рассмотрим алгоритм решения линейного неравенства с одной переменной вида $ax > b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.



Задача 6

Решить неравенство $ax \leqslant 5$ при всех значениях параметра a.

Задача 7

Решить неравенство $(a^2 - 5a - 6)x \geqslant a + 1$ при всех значениях параметра a.

Задача 8

Найдите все значения параметра $p \in [-4; 4]$, при которых неравенство

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x) > 0$$

выполняется при любых $x \geqslant 0$.

Посмотреть подсказку.

$\Longrightarrow$ **Посмотреть видео с решением**

2 Системы линейных уравнений и неравенств в задачах с параметром

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

Теоретическая справка

Есть два способа задания прямой на плоскости:

1) $y = kx + b$.

2) $Ax + By = C$.

Любую прямую заданную первым способом можно задать вторым способом. Достаточно взять $A = -k$, $B = 1$, $C = b$:

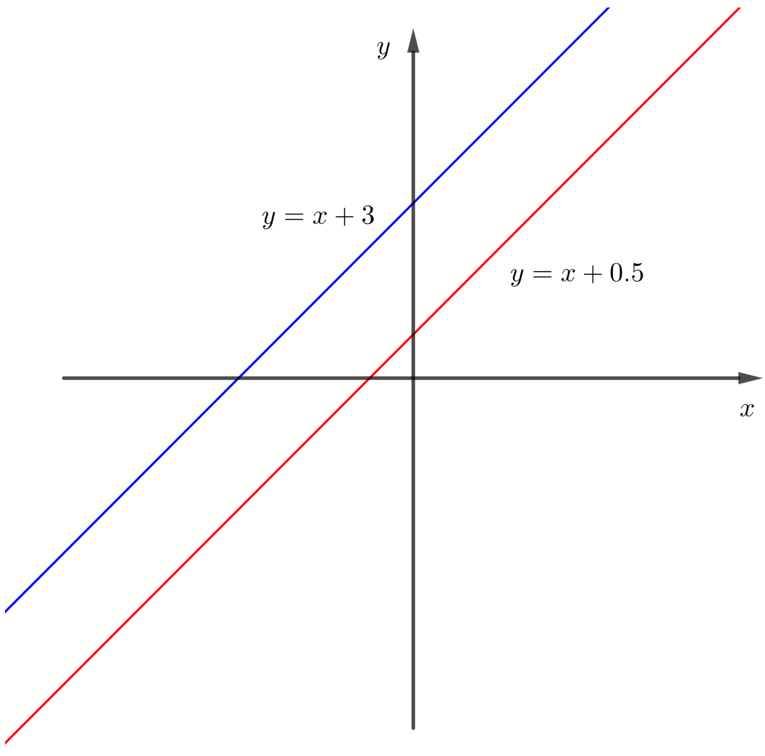
$$-kx + y = b \Leftrightarrow y = kx + b.$$

В чём же отличие?

Вертикальную прямую $x = a$ можно задать вторым способом: $A = 1$, $B = 0$, $C = a$, но нельзя задать первым. В этом и состоит единственное отличие двух способов.

1) Взаимное расположение прямых $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$.

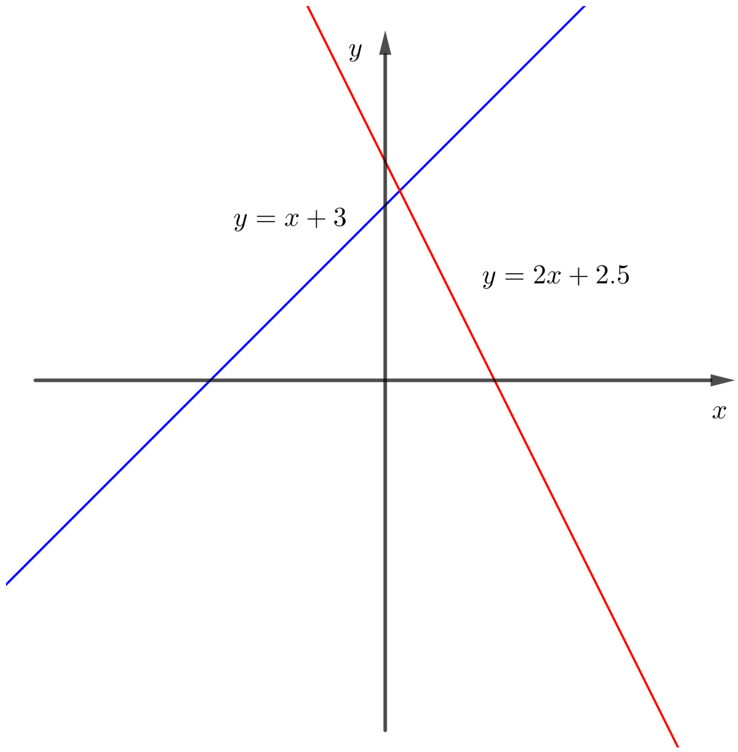
1. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — параллельны;



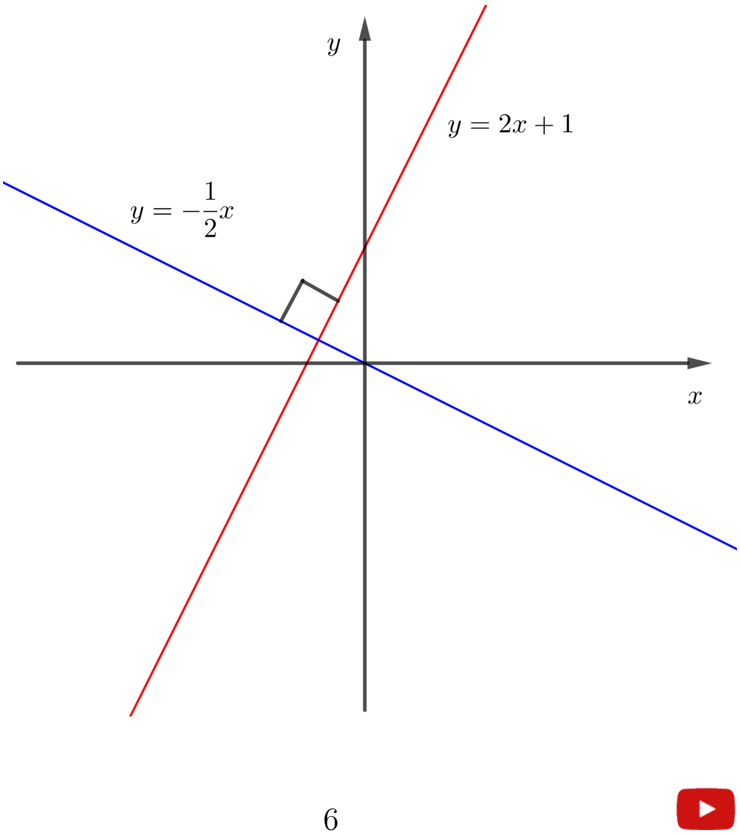
2. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — совпадают;

Для этого случая график строить не будем.

3. Если $k_1 \neq k_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — пересекаются;

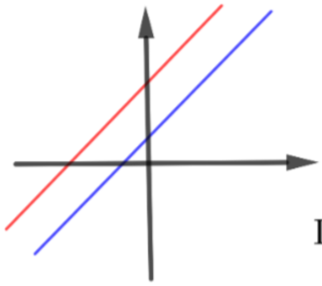


4. Если $k_1 \cdot k_2 = -1$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — перпендикулярны.



2) Взаимное расположение прямых $A_1x + B_1y = C_1$, $A_2x + B_2y = C_2$.

$Ax + By = C$



$\Pi_1 \quad A_1x + B_1y = C_1$

$\Pi_2 \quad A_2x + B_2y = C_2$

$$\Pi_1 \text{ параллельна } \Pi_2: \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Pi_1 \text{ совпадает с } \Pi_2: \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Pi_1 \text{ пересекается с } \Pi_2: \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

$$\Pi_1 \text{ перпендикулярна с } \Pi_2: \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} -2x - 2by = b + 4, \\ (b+4)x + 2y = b + 1. \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 2

Найти значения параметра m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (m-3)x - 24y = 8, \\ x + (m+8)y = -1. \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Задача 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - y = a, \\ 5x - y = a^2 + 4a. \end{cases}$$

при всех значениях параметра a.

Задача 4

Найти значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 x + 3\cos^2 y = 5 - 6a, \\ 5\cos^2 x + 2\cos^2 y = 7a - 3. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 5

Найти значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x - 2a \geqslant 1, \\ x + 3a < 5. \end{cases}$$

имеет решения.

Задача 6

Найти значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} a - 4x \geqslant 7, \\ a \leqslant x + 5. \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Задача 7

Найти значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x + 5a \leqslant 9, \\ 3x - a \geqslant 0. \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Задача 8

Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 4a, \\[2ex] \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{y} = 3 + 4a. \end{cases}$$

Посмотреть подсказку.

Задача 9

Найдите все значения параметра a, при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1} = -\dfrac{1}{10}, \\ 7x - 2y = 2a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 2a, \\ \dfrac{1}{x-4y} = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

Посмотреть подсказку.

Задача 10

Найти все a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8az = 8. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Посмотреть текстовое решение.

$\Longrightarrow$ **Посмотреть видео с решением**

профиматика

Начни заниматься с нами уже сегодня

Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ

Игорь Уколов

отец Профиматики

- Выпускник мехмата МГУ
- Лично подготовил 30+ стобалльников
- 3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый

Влад Вуль

отец корги и не только

- Диплом факультета прикладной математики МГОУ
- Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU
- 8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.

Антон Гурко

преподаватель высшей математики

- Выпускник ВМК МГУ
- Учитель высшей категории со стажем более 10 лет
- Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

Ещё больше полезных методичек в нашем Telegram-канале

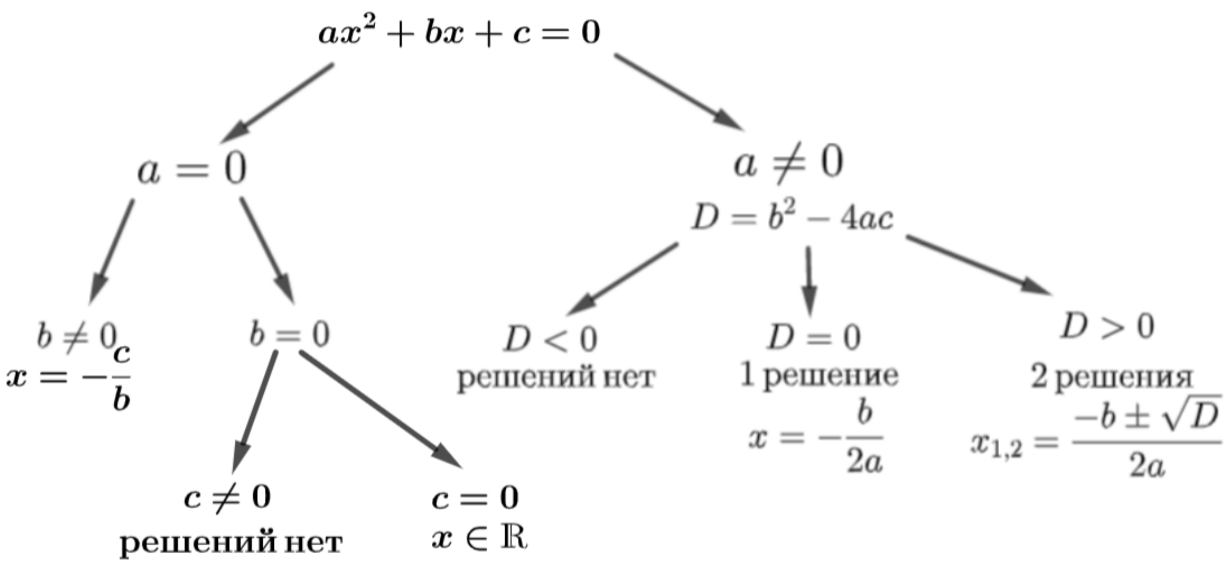
Отзывы о школе

3 Квадратные уравнения и неравенства в задачах с параметром

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

Теоретическая справка

Рассмотрим алгоритм решения уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$. При $a \neq 0$ это уравнение квадратное.



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$(4 - a^2)x^2 + 2ax + 3 = 0$$

имеет одно решение.

Задача 2

Решить уравнение $ax^2 + 2x - 1 = 0$ при всех значениях параметра a.

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$x^3 - (a - 3)x^2 - 3ax = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 4

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$$

не имеет действительных корней.

Задача 5

Найти значения параметра a, при которых множество решений неравенства

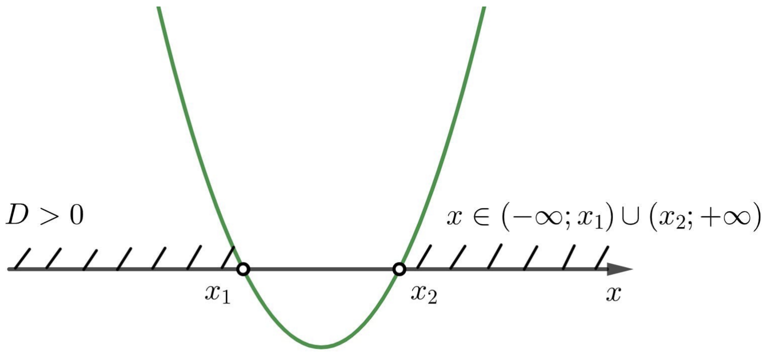
$$x^2+(3a-1)x-4a^2+6a-2\leqslant 0$$

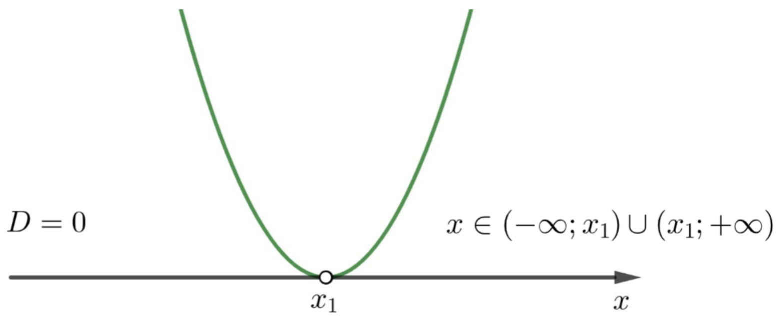
образуют отрезок числовой прямой длины >5.

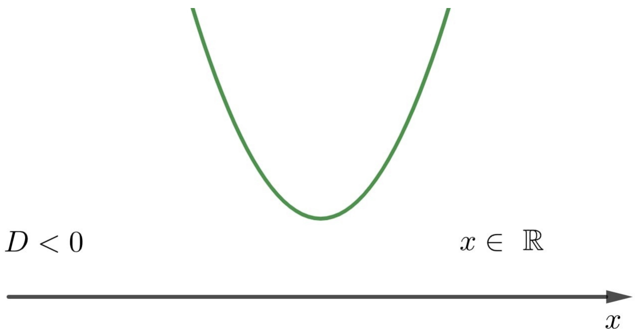
Теоретическая справка

Рассмотрим квадратное неравенство вида $ax^2+bx+c>0$,
где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$.

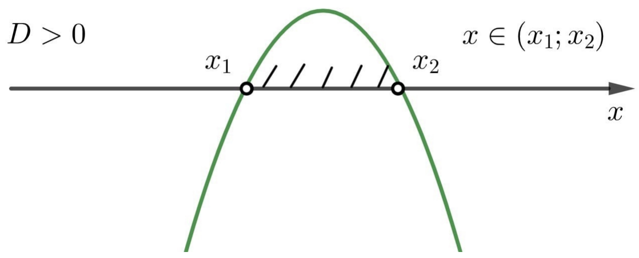
Пусть $a>0$. Посмотрим, как выглядят решения неравенства $ax^2+bx+c>0$ в зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$.

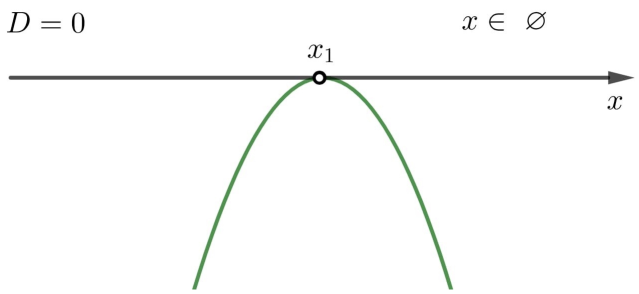


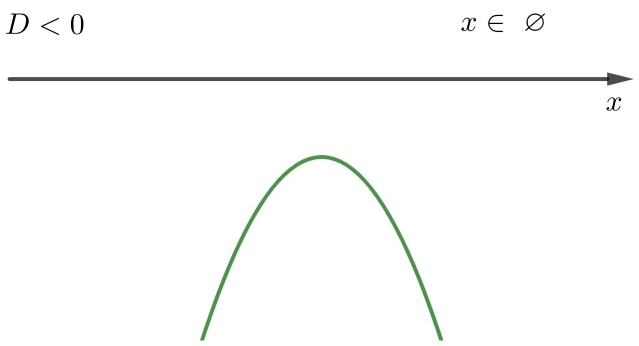




Пусть $a < 0$. Посмотрим, как выглядят решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.







Задачи для самостоятельного решения

Задача 6

Решить неравенство $x^2 - 6ax + 9 > 0$ при всех значениях параметра a.

Задача 7

Решить неравенство $x^2 + 2x + 1 > \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{a^2}$ при всех значениях параметра a.

Задача 8

Решить неравенство

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$$

при всех значениях параметра a.

Посмотреть подсказку.

Задача 9

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - x - a)^2 = 2x^4 + 2(x + a)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 1]$.

Посмотреть решение.

4 Теорема Виета в задачах с параметром

Теоретическая справка

⟹ Теория и пример решения

Теорема Виета для приведённого квадратного уравнения:
Если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+px+q=0$, то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета:
Если есть уравнение $x^2+px+q=0$ и числа u и v такие, что:

$$\begin{cases} v+u=-p, \\ v\cdot u=q. \end{cases}$$

Тогда u и v – это корни уравнения $x^2+px+q=0:\ x_1=u, x_2=v$.

Мы используем обратную теорему Виета для «угадывания» корней уравнения.

▶ **Пример 1.**
Решить уравнение $x^2+2x-8=0$.

Заметим, что если взять числа -4 и 2, то

$$\begin{cases} -4+2=-2, \\ -4\cdot 2=-8. \end{cases}$$

Значит $x_1=-4$ и $x_2=2$ это корни уравнения.

▶ **Пример 2.**
Решить уравнение $x^2-(2a+1)+a(a+1)=0$.

Заметим, что если взять числа a и $a+1$, то

$$\begin{cases} a+a+1=2a+1, \\ a\cdot(a+1)=a(a+1). \end{cases}$$

Значит $x_1=a$ и $x_2=a+1$ это корни уравнения.

Теорема Виета для неприведённого квадратного уравнения:
Если x_1 и x_2 корни уравнения ax^2+bx+c, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета для неприведённого квадратного уравнения:

> Если есть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и числа u и v такие, что
> $$\begin{cases} u + v = -\dfrac{b}{a}, \\ u \cdot v = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$
> Тогда u и v это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0: \; x_1 = u, x_2 = v$

▶ **Пример 3.**
$$ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$$
Заметим, что если взять a и $\dfrac{1}{a}$, то
$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{a^2 + 1}{a}, \\ a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a}. \end{cases}$$
Значит $x_1 = a$ и $x_2 = \dfrac{1}{a}$ это корни уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на теорему Виета:

Пользуясь теоремой Виета, найдите корни уравнения:

1. $x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a + 2 = 0$
2. $x^2 - 7x - a^2 - 5a + 6 = 0$
3. $(a + 1)x^2 + (2a + 4)x + a + 3 = 0$
4. $ax^2 + 4x + 4 - a = 0$

Задача 1

Найти значения параметра a, при которых уравнение
$$x^2 - (2a + 3)x + a^2 - 4 = 0$$
имеет два решения, одно из которых в 3 раза больше другого.

Задача 2

Найти значения параметра a, при которых уравнение
$$x^2 - 2(a^2 + 2a - 3)x + 9 = 0$$
имеет два различных положительных решения.

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых сумма ${x_1}^2 + {x_2}^2$ минимальна, где x_1 и x_2 — решения уравнения
$$x^2 - 4ax + 4a - 3 = 0.$$

Задача 4

Найти значения параметра a, при которых решения уравнения

$$x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$$

удовлетворяют условию $x_1 = 2x_2$.

Задача 5

Известно, что корни уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$. Найдите a и корни каждого из уравнений.

Задача 6

При каких значениях параметра a сумма корней уравнения

$$x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$$

равна сумме квадратов его корней?

Задача 7

Найдите все значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a + 7 = 0$$

равна 10.

Задача 8

При каких значениях коэффициента c один из корней уравнения

$$8x^2 - 6x + c = 0$$

равен квадрату другого корня?

5 Рациональные уравнения в задачах с параметром

⟹ Теория и пример решения

Теоретическая справка

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить уравнение

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = 0.$$

Задача 2

Решить уравнение

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x + 7} = 0.$$

Задача 3

Решить уравнение

$$\frac{5x - 2a}{x^2 - 5x - 6} = 0$$

при всех значениях параметра a.

Задача 4

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2 + 5ax + 2}{x - 4} = 0$$

имеет одно решение.

Задача 5

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{(a - 7)x^2 + 5x - 2}{x + 1} = 0$$

имеет два решения.

Задача 6

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{16x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 7

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - 6x + a}{7x^2 - 8ax + a^2} = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 8

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Посмотреть текстовое решение.

$\Longrightarrow$ **Посмотреть видео с решением**

Задача 9

Для каждого значения параметра m решите уравнение

$$\frac{(m-2)x}{m-1} - 1 = \frac{m+2}{m-1} - \frac{2x^2 + m + 1}{x(m-1)}.$$

Посмотреть решение.

Задача 10

Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} + \frac{1}{x - a} = 0.$$

Посмотреть решение.

6 Свойства модуля. Замена переменной в модулях

⟹ Теория и пример решения

Теоретическая справка

Определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1) $|a| \geqslant 0$,

2) $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$,

3) $|ab| = |a||b|$,

4) $|a| = |-a|$,

5) $a^2 = |a|^2 = |a^2|$.

Важные для нас следствия из свойств:

Следствие 1.

$$|a-b| = |b-a|$$

Действительно: $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$

Следствие 2.

$$(a-b)^2 = |(a-b)^2| = |a-b|^2$$

Этот переход пригодится нам при решении уравнений и неравенств с модулем с помощью замены переменной.

Алгоритм решения простейшего уравнения с модулем:

$$|x| = a$$

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
2 решения	1 решение	нет решений
$x = \pm a$	$x = 0$	

▶ **Пример.** Решить уравнение $|3x-1| = 2$.

$$|3x-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1 = 2, \\ 3x-1 = -2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Задача 1

Решить уравнения:
а) $|7x+6|=5$;

б) $|2x+5|=6$;

в) $|x^2-6x+5|=0$;

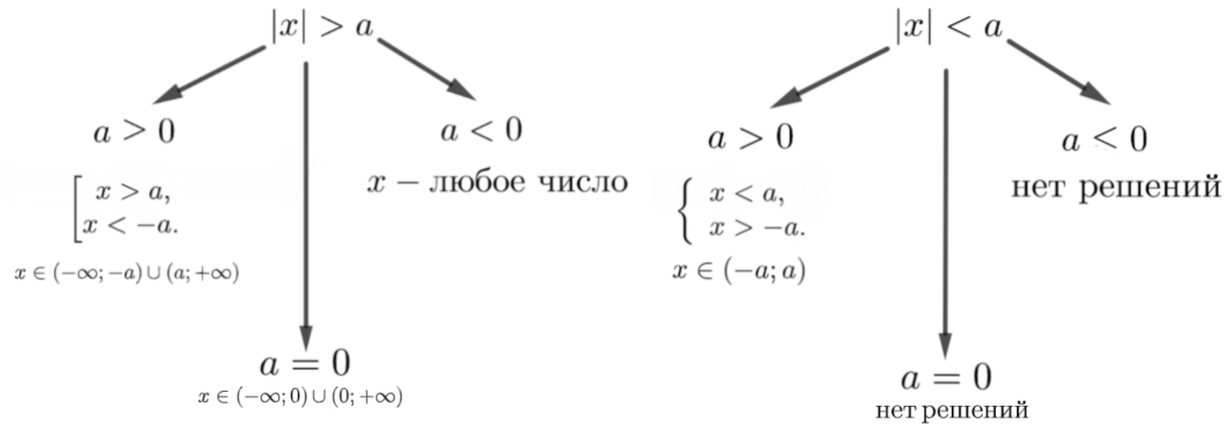
г) $|x^2-7x+3|=3$;

д) $|x^6-7x^2+2x-7|=-4$;

е) $|x^3-5x^2-x+5|=0$;

Теоретическая справка

Алгоритм решения простейших неравенств с модулем:



▶ **Пример.** Решить неравенство $|x|>1$.

$$|x|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty).$$

Задача 2

Решить неравенства:
а) $|x|>5$;

б) $|x|\leqslant -1$;

в) $|x|>-2$;

г) $|x|<7$.

▶ **Пример.** Решить неравенство $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 2.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x-1} \geqslant -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x+2}{x-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{1+2x-2}{x-1} \geqslant 0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{x-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x-1}{x-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим оба неравенства системы методом интервалов:

Решим отдельно $\dfrac{-2x+3}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(x-\frac{3}{2})}{x-1} \leqslant 0$:

1) Найдём корни числителя: $x - \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

2) Найдём корни знаменателя: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

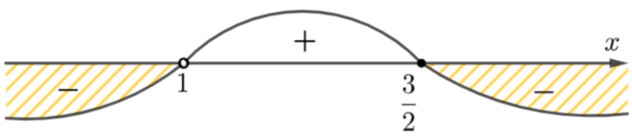
3) Нанесём точки $x = 1$ и $x = \frac{3}{2}$ на числовую прямую. Заметим, что корни числителя – закрашенные точки, а корни знаменателя – выколотые точки.

   Теперь определим знаки выражения $\dfrac{-2(x-\frac{3}{2})}{x-1}$.

   При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение отрицательно:

$$\frac{-2(100-\frac{3}{2})}{100-1} \leqslant 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.



Тогда получаем, что $x \in (-\infty; 1) \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Решим теперь отдельно $\dfrac{2x-1}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-\frac{1}{2})}{x-1} \geqslant 0$:

1) Найдём корни числителя: $x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

2) Найдём корни знаменателя: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

3) Нанесём точки $x = 1$ и $x = \dfrac{1}{2}$ на числовую прямую. заметим, что корни числителя – закрашенные точки, а корни знаменателя – выколотые точки.

Теперь определим знаки выражения $\dfrac{2(x-\frac{1}{2})}{x-1}$.

При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$\frac{2(100-\frac{1}{2})}{100-1} \geqslant 0.$$

У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Тогда получаем, что $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

Объединим решение первого и второго неравенства:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right), \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Задача 3

Решить неравенства:

а) $|5x + 8| > 3$;

б) $|5 - 3x| \leqslant 2$;

в) $\dfrac{1}{|3x-5|} \geqslant 2$;

г) $\dfrac{1}{|2x+3|} < 1$;

д) $|x^2 + 2x - 4| \leqslant 4$;

е) $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| < 3$.

► **Пример.** Решить уравнение $(x-2)^2 - |x-2| = 6$.
Уравнение можно переписать в виде $|x-2|^2 - |x-2| - 6 = 0$. Сделаем замену: $|x-2| = t \geqslant 0$.
Тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Найдём корни этого уравнения:

$$D = 1 + 4 \cdot 6 = 25 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{1+5}{2} = 3;\ t_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Тогда:

$$|x-2| = -2 \Leftrightarrow \varnothing$$

$$|x-2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=3, \\ x-2=-3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Задача 4

Решить уравнения:
а) $(x-4)^2 - |x-4| = 6$;
б) $(x-7)^2 - |x-7| = 30$.

► **Пример.** Решить неравенство $x^2 + 2|x| - 8 < 0$.
Сделаем замену: $|x| = t \geqslant 0$. Уравнение можно представить в виде $|x|^2 + 2|x| - 8 < 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 + 2t - 8 < 0$.

Мы получили квадратичное неравенство вида $at^2 + bt + c < 0$. Решим это неравенство, пользуясь следующим алгоритмом:

1) Найдём t_1 и t_2 - корни уравнения $at^2 + bt + c = 0$. 2) Представим наше неравенство в виде: $a(t-t_1)(t-t_2) < 0$. 3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(t-t_1)(t-t_2) < 0$.

1) Решим уравнение $t^2 + 2t - 8 = 0$:

   Найдём дискриминант:

   $$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2,$$

   Найдём корни:

   $$t_1 = \frac{-2+6}{2} = 2;\ t_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$$

2) Вспомним утверждение:

   Если t_1 и t_2 - корни квадратного уравнения $at^2 + bt + c = 0$, то:
   $at^2 + bt + c = a(t-t_1)(t-t_2)$

   Тогда:

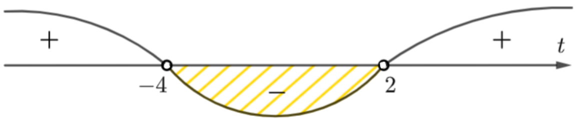
   $$t^2 + 2t - 8 < 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+4) < 0.$$

3) Нанесём точки $t = 2$ и $t = 4$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(t-2)(t+4)$.

   При достаточно большом t, например $t = 100$, выражение положительно:

   $$(100-2)(100+4) > 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.



Мы получим, что решением нашего неравенства является промежуток $t \in (-4; 2)$. Значит $|x| \in (-4; 2) \Leftrightarrow -4 < |x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$.

Задача 5

Решить неравенства:
а) $x^2 + 5|x| - 6 \geqslant 0$;

б) $x^2 - |x| - 2 \leqslant 0$.

в) $x^2 - 5|x| + 6 \geqslant 0$.

г) $x^2 - |x| + 2 \leqslant 0$.

7 Модуль. Раскрытие модуля по случаям

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Теоретическая справка

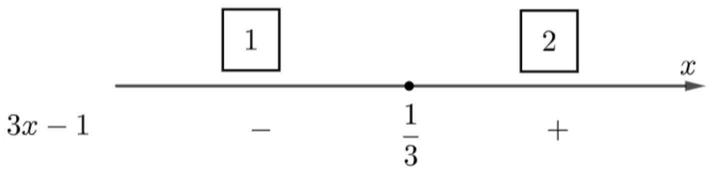
▶ **Пример.** Решить неравенство, раскрывая модуль по случаям: $|3x - 1| = 2$.

Корень подмодульного выражения $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Он разбивает числовую прямую на две области:

$$1.\ \ x \geqslant \frac{1}{3}; \qquad 2.\ \ x < \frac{1}{3}.$$

Нарисуем числовую прямую:



На прямой отмечены точки, в которых модуль обращается в 0. На каждом промежутке расставим знаки подмодульных выражений. Знак с которым раскрывается модуль совпадает со знаком подмодульного выражения.

Случай $\boxed{1}$: $x \geqslant \frac{1}{3}$: На этом промежутке $|3x-1| = 3x-1$, то есть уравнение принимает вид $3x-1=2$. Этот корень удовлетворяет условию $x \geqslant \frac{1}{3}$.

Случай $\boxed{2}$: $x < \frac{1}{3}$: На этом промежутке $|3x-1| = -3x+1$, то есть уравнение принимает вид $-3x+1=2$. Получаем $x = -\frac{1}{3}$. Этот корень удовлетворяет условию $x < \frac{1}{3}$.

Ответ: $x=1$, $x=-\frac{1}{3}$.

Примечание. можно было сделать разбор и двух таких случаев: $1. x > \frac{1}{3}$; $2. x \leqslant \frac{1}{3}$. Это никак не повлияло бы на результат, так как тоже была бы исследована вся числовая прямая. В последующих примерах вы можете сами выбирать, к какому из промежутков присоединять крайнюю точку.

Задача 1

Решить уравнения, раскрывая модуль по случаям:

а) $|2x-7| = 4$;

б) $|5-x| = 6+7x$;

в) $x^2+5|x-2|-9x-8=0$;

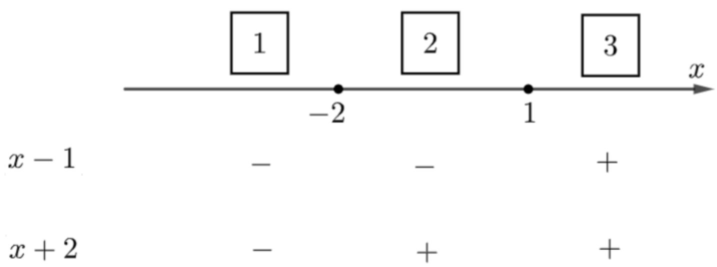
г) $|x^2-5x+4| = 4$.

Примечание: данные задачи можно решить и другими методами, но мы просим вас решить их, раскрывая модуль по случаям, так как этот навык потребуется нам в дальнейшем.

► **Пример.** Решить неравенство, раскрывая модуль по случаям: $|x-1|+|x+2|=5$.

Корни подмодульных выражений $x=-2$ и $x=1$. Они разбивают числовую прямую на 3 области :

$$1.\ \ x < -2\ ; \qquad 2.\ \ -2 \leqslant x \leqslant 1; \qquad 3.\ \ x > 1.$$



На прямой отмечены точки, в которых модуль обращается в 0. На каждом промежутке расставим знаки подмодульных выражений. Знак с которым раскрывается модуль совпадает со знаком подмодульного выражения.

Случай $\boxed{1}$: $x < -2$. На этом промежутке $|x-1| = -(x-1)$, $|x+2| = -(x+2)$. Исходное уравнение эквивалентно $-(x-1)-(x+2) = 5$.

$$-x+1-x-2 = 5 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3.$$

Этот корень удовлетворяет условию $x < -2$.

Случай $\boxed{2}$: $-2 \leqslant x \leqslant 1$. На этом промежутке $|x-1| = -(x-1)$, $|x+2| = x+2$. Исходное уравнение эквивалентно $-(x-1)+(x+2) = 5$.

$$-x+1+x+2 = 5 \Leftrightarrow 3 = 5, \text{ нет решений.}$$

Случай $\boxed{3}$: $x > 1$. На этом промежутке $|x-1| = x-1$, $|x+2| = x+2$. Исходное уравнение эквивалентно $(x-1)+(x+2) = 5$.

$$x-1+x+2 = 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Этот корень удовлетворяет условию $x > 1$.
Получаем $x = -3$, $x = 2$.

Ответ: $x = -3$, $x = 2$.

Задача 2

Решить уравнения, раскрывая модуль по случаям:

а) $|x+7| - 4|x-2| + 5|x+1| = 6$;

б) $|x-1| + |2x-3| = 2$;

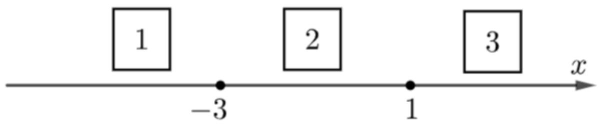
в) $|5x-3| - |7x-4| = 2x-1$;

г) $4|x+1| - 1 = 3|2x+5| - 2|x+5|$.

► **Пример.** Решить неравенство, раскрывая модуль по случаям: $|x-1| + |x+3| < 6$.

Корни подмодульных выражений $x = 1$ и $x = -3$. Они разбивают числовую прямую на 3 области:

$$1.\ \ x \leqslant -3; \qquad 2.\ \ -3 < x < 1; \qquad 3.\ \ x \geqslant 1.$$



	1	2	3
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$

На прямой отмечены точки, в которых модуль обращается в 0. На каждом промежутке расставим знаки подмодульных выражений. Знак с которым раскрывается модуль совпадает со знаком подмодульного выражения.

Случай $\boxed{1}$: $x \leqslant -3$. На этом промежутке $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = -(x+3)$. Исходное неравенство примет вид:

$$\begin{cases} -(x-1)-(x+3)<6, \\ x \leqslant -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1-x-3<6, \\ x \leqslant -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x<8, \\ x \leqslant -3. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>-4, \\ x \leqslant -3. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;-3]$$

Случай $\boxed{2}$: $-3 < x < 1$. На этом промежутке $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = x+3$. Исходное неравенство примет вид:

$$\begin{cases} -(x-1)+x+3<6, \\ -3<x<1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1+x+3<6, \\ -3<x<1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<2, \\ -3<x<1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$-3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3;1)$

Случай $\boxed{3}$: $x \geqslant 1$. На этом промежутке $|x-1| = x-1$, $|x+3| = x+3$. Исходное неравенство примет вид:

$$\begin{cases} (x-1)+(x+3)<6, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+x+3<6, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<4, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in [1;2)$

Объединяем промежутки, полученные в каждом из трёх случаев:

$$x \in (-4;-3] \cup (-3;-1) \cup [1;2).$$

В итоге получаем ответ: $x \in (-4;2)$.

Задача 3

Решить неравенства, раскрывая модуль по случаям:

а) $5|x+4| - |x-2| \geqslant 4$;

б) $|x^2-5x+6| + |x-4| \leqslant x^2+5x+7$;

в) $2|x-4| + |3x+5| \geqslant 16$;

г) $|x+4| - |x+7| \leqslant |2x+6| - 5$.

8 Модуль. Равносильные переходы в уравнениях и неравенствах с модулем

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

Теоретическая справка

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

► **Пример.** Решить уравнение $|x^2 + 2x - 5| = |x + 1|$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 5 = x + 1, \\ x^2 + 2x - 5 = -x - 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 0. \end{array}\right.$$

Решим каждое уравнение системы по отдельности.
1) $x^2 + x - 6 = 0$.

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25,$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}.$$

$$x_1 = 2, \ x_2 = -3.$$

2) $x^2 + 3x - 4 = 0$.

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25,$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}.$$

$$x_1 = 1, \ x_2 = -4.$$

Получаем четыре корня: $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$.
Ответ: $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$.

Задача 1

Решить уравнения:
а) $|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|$;
б) $|x^2 - 5x + 3| = |5x - 4|$;
в) $|2x + 1| = |x + 2|$;
г) $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.

Теоретическая справка

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

▶ **Пример.** Решить уравнение $|2x-5| = 3x+3$.

$$|2x-5| = 3x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-5 = 3x+3, \\ 2x-5 = -3x-3. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -3, \\ \left[\begin{array}{l} x = -8, \\ 5x = 2. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 0{,}4. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0{,}4.$$

Задача 2

Решить уравнения:
а) $|3x-2| = 2x$;
б) $|x^3+3x^2+x| = x-x^3$;
в) $|x^2-2x-1| = -x+1$;
г) $|2x-3| = 3-2x$.

Теоретическа справка

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad |f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant -g(x), \\ f(x) \leqslant g(x). \end{cases}$$

▶ **Пример.** Решить неравенство $|3x-7| < 3x+1$.

$$\begin{cases} 3x-7 > -3x-1, \\ 3x-7 < 3x+1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 6, \\ 0 < 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Задача 3

Решить неравенства:
а) $|2x+3| < x+7$;
б) $|x^2+2x-3| + 3(x+1) < 0$;
в) $|x^2+3x| < x+4$;
г) $|x^3-1| \leqslant 1-x$.

Теоретическая справка

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right. \qquad |f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array} \right.$$

▶ **Пример.** Решить неравенство $|x^2-2x+3| > x+1$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x+3 > x+1, \\ x^2-2x+3 < -x-1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2 > 0, \\ x^2-x+4 < 0. \end{array} \right.$$

Решим оба неравенства системы методом интервалов:
Решим отдельно $x^2-3x+2 > 0$. Решим это неравенство, пользуясь следующим алгоритмом:

> 1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.
> 2) Представим наше неравенство в виде: $a(x-x_1)(x-x_2)<0$.
> 3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(x-x_1)(x-x_2)>0$.

1) Решим уравнение $x^2-3x+2=0$:

   Найдём дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1,$$

   Найдём корни:

$$x_1=\frac{3+1}{2}=2;\;\; x_2=\frac{3-1}{2}=1$$

2) Вспомним утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то:
   $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

   Тогда:

$$x^2-3x+2>0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)>0.$$

3) Нанесём точки $x=1$ и $x=2$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(x-1)(x-2)$.

   При достаточно большом x, например $x=100$, выражение положительно:

$$(100-1)(100-2)>0.$$

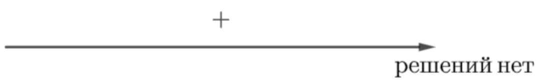
   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Мы получим, что решением нашего неравенства является промежуток $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Решим отдельно $x^2-x+4<0$. Решим это неравенство, пользуясь нашим алгоритмом.

Решим уравнение $x^2-3x+2=0$:
Найдём дискриминант:

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=1-4=-3<0,$$



Можно было так же сказать, что график левой части $y = x^2 - x + 4$ – парабола, ветви которой направлены вверх и которая не пересекает ось x ($D < 0$).

Значит левая часть всегда положительна и решений у неравенства нет. В объединении получаем $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Задача 4

Решить неравенства:

а) $|3x + 1| > 5 - 4x$;

б) $|x^2 + 2x - 3| > x$;

в) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$;

г) $|x^2 - 2x - 8| > 2x$.

Теоретическая справка

$$|f(x)| \geqslant |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geqslant g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geqslant 0.$$

Воспользуемся формулой для разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$f^2(x) - g^2(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geqslant 0.$$

При решении задачи мы будем пользоваться только тем, что
$$f^2(x) - g^2(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geqslant 0$$

► **Пример.** Решить неравенство $|x^2 - 2x + 1| < |x + 1|$.
Неравенство равносильно

$$(x^2 - 2x + 1 - x - 1)(x^2 - 2x + 1 + x + 1) < 0,$$

$$(x^2 - 3x)(x^2 - x + 2) < 0.$$

1) Найдем корни каждой из скобок.

   Корни первой скобки $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3. \end{array}\right.$.

   Корни второй скобки $(x^2 - x + 2)$:

$$x^2 - x + 2 = 0,$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 4 = -3 < 0, \text{ нет решений.}$$

2) Вспомним утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то:
   $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

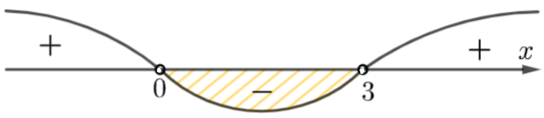
   Тогда:
$$(x^2 - 3x)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(x^2 - x + 2) < 0.$$

3) Нанесём точки $x = 0$ и $x = 3$ на числовую прямую и определим знаки выражения $x(x-3)(x^2-x+2)$.

   При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$100(100-3)(100^2-100+2) > 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.



Ответ: $x \in (0; 3)$.

Задача 5

Решить неравенства:

а) $|x - 0{,}5| \leqslant |x + 4|$;

б) $|2x^2 + x - 1| > |x + 1|$;

в) $|24x^2 - 39x - 8| \leqslant |18x^2 - 25x + 32|$.

г) $\left|\dfrac{x}{10} - \dfrac{1}{5}\right| \geqslant \left|\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}\right|$;

9 Модуль в задачах с параметром

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить уравнение $|3ax + 5| = a$ при всех значениях параметра a.

Задача 2

Решить неравенство $|5 - 4x| \geqslant a$ при всех значениях параметра a.

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых неравенство

$$3|4 - 7x| + 2 - 5a > 0$$

справедливо при всех значениях x.

Задача 4

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$|5x + 9a - 4| = |7x + 4a - 1|$$

имеет два различных решения, среднее арифметическое которых равно 9.

Задача 5

Найти значения параметра a, при которых неравенство

$$|5x - 2a - 1| \leqslant 3 - 2a - 2x$$

имеет одно решение.

Задача 6

Решить уравнение $|x + 5| - a|x - 7| = 12$ при всех значениях параметра a.

Задача 7

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 5 - a}{x^2 + x - a} = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 8

Решить уравнение $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$.

Посмотреть подсказку.

Задача 9

Решить уравнение $|x^2 - ax + 32| + \sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0$.

Посмотреть подсказку.

Задача 10

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x + 1| + (1 - a)|x - 1| + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Посмотреть решение.

$\Longrightarrow$ **Посмотреть видео с решением**

Задача 11

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Посмотреть решение.

10 Иррациональные уравнения

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Теоретическая справка

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

В каждой задаче мы можем сами выбирать, какое писать условие: $f(x) \geqslant 0$ или $g(x) \geqslant 0$, в зависимости от того, что удобнее в конкретной задаче.

► **Пример.** Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x - 3} = \sqrt{3 - x^2}$.
Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 3 - x^2, \\ 3 - x^2 \geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 6 = 0, \\ 3 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $2x^2 - x - 6 = 0$.

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 + 48 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{1+7}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2; \;\; x_2 = \frac{1-7}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Решим неравенство $3 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leqslant 0$.

Нанесём точки $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

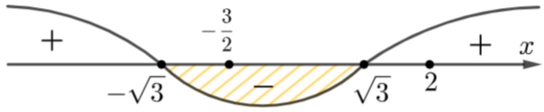
При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$(100 - \sqrt{3})(100 + \sqrt{3}) > 0.$$

У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Получаем, что $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Объединим решение уравнения и неравенства:



Таким образом $x = -\dfrac{3}{2}$ является решением уравнения.
Примечание. В данном примере удобнее было написать ограничения на правую часть уравнения. Если бы удобнее было написать ограничения на левую часть уравнения, то мы бы написали ограничения на левую часть уравнения. Как понять, на какую часть удобнее писать ограничения? Увы, это приходит только с опытом.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить уравнения:

а) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3}$;

б) $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2}$;

в) $\sqrt{x^2-5x+2} = \sqrt{4x^2+9x+4}$;

г) $\sqrt{x^3-3x^2-5x+13} = \sqrt{1-x}$.

Теоретическая справка

$$f(x)\sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

► **Пример.** Решить уравнение $\sqrt{9-x^2}(x^2-2x-8) = 0$

Уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} 9 - x^2 = 0, \\ \begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Решим уравнение:

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Значит $x = \pm 3$ это решения нашего уравнения. Найдем остальные корни:
Решим уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 4 + 32 = 36 = 6^2$$
$$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4,\ x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$$

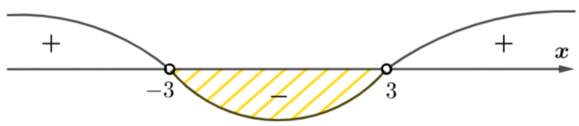
Решим неравенство $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) < 0$.

Нанесём точки $x = 3$ и $x = -3$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(x-3)(x+3)$.

При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

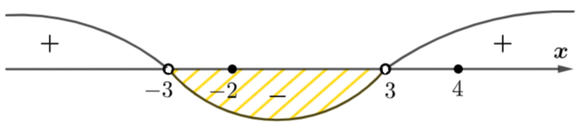
$$(100-3)(100+3) > 0.$$

У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.



Получаем, что $x \in (-3; 3)$.

Объединим решение системы:



Получаем, что $x = -2$.

Получаем итоговый ответ: $x \in \{-3; -2; 3\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2

Решить уравнения:

а) $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{x+2} = 0$;

б) $(x^2 - 1)\sqrt{2x-1} = 0$;

в) $(x^2 - 64)\sqrt{7-x} = 0$.

г) $(x^3 + 3x^2 - 2x - 4)\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 0$.

Теоретическая справка

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

► **Пример.** Решить уравнение $\sqrt{34 - 3x} = x - 2$

$$\sqrt{34-3x} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 34 - 3x = x^2 - 4x + 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x^2 - x - 30 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = -5. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 6.$

Примечание. Простое возведение в квадрат обеих частей уравнения приведет нас к уравнению 5-й степени и похоже, что общего вида (то есть корни или разложение на множители меньшей степени не очень-то и видны). Поэтому попробовали найти более простой путь, обратив внимание на правую часть уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3

Решить уравнения:

а) $\sqrt{4x-7} = 3x - 9$;

б) $3\sqrt{3x^2 - x - 1} = x - 3x^2 + 5$;

в) $\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x$;

г) $\sqrt{x^2 + 3x - 10} = -x^2 - 3x + 10$.

► **Пример.** Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$

Для начала определим, при каких значениях x выражений в левой части имеет смысл:

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ 4x - 3 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 4x \geqslant 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant \dfrac{3}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4}.$$

Перенесём один из корней влево: $\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} + 1$;

При $x \geqslant \frac{3}{4}$ левая и правая части уравнения положительны. Значит мы можем возвести обе части в квадрат: $x + 1 = 4x - 3 + 2\sqrt{4x-3} + 1$;

Преобразуем получившиеся уравнение: $2\sqrt{4x-3} = 3 - 3x$;

Мы получили уравнение вида:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Решим его:

$$2\sqrt{4x-3} = 3 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3x \geqslant 0, \\ 9 - 18x + 9x^2 = 4(4x-3). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ 9x^2 - 34x + 21 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = \dfrac{7}{9}. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{9}.$$

Осталось проверить, что $x \geqslant \frac{3}{4}$.

Действительно, $\frac{3}{4} = \frac{27}{36} < \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$, значит ответ: $x = \frac{7}{9}$.

Задача 4

Решить уравнения:

а) $\sqrt{x+5}-\sqrt{3x-8}=1$;

б) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

► **Пример.** Решить уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

Преобразуем правую часть: $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+2)(x+3)$;

Рассмотрим $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$, проверяя его видим, что $\sqrt{x^3-x+10}=\sqrt{-27+3+10}=\sqrt{-14}$, значит $x=-3$ не является корнем уравнения и мы можем поделить обе части уравнения на $(x+3)$:

$$\sqrt{x^3-x+10}=(x{+}2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x^3-x+10=x^2+4x+4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x^3-x^2-x-4x+10-4=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x^3-x^2-5x+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -2, \\ (x-2)(x^2+x-3)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}. \end{array}\right.$

Задача 5

Решить уравнения:

а) $(x-3)\sqrt{x^2+5x-2}=2x-6$;

б) $(x-4)\sqrt{x^2+3x-1}=x^2-3x-4$;

в) $(x-2)\sqrt{x+7}=x-2$.

11 Иррациональные неравенства

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Теоретическая справка

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g(x). \end{cases}$$

► **Пример.** Решить неравенство $\sqrt{2-x} < \sqrt{3x^2-2x-2}$

$$\begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ 2-x < 3x^2-2x-2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2, \\ 3x^2-x-4 > 0. \end{cases}$$

Решим отдельно $3x^2 - x - 4 > 0$, пользуясь следующим алгоритмом:

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. 2) Представим наше неравенство в виде: $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$. 3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$.

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2 - x - 4 = 0$

   Найдём дискриминант:

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1 + 48 = 49 = 7^2$$

   Найдём корни:

$$x_1 = \frac{1+7}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{1-7}{6} = -1$$

2) Вспомним следующее утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то:
   $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

   Тогда:

$$3x^2 - x - 4 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)(x+1) > \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)(x+1) > 0.$$

3) Решим неравенство $\left(x - \frac{4}{3}\right)(x+1) > 0$ с помощью метода интервалов:

   Нанесём точки $x = \frac{4}{3}$ и $x = -1$ на числовую прямую и определим знаки выражения $\left(x - \frac{4}{3}\right)(x+1)$.

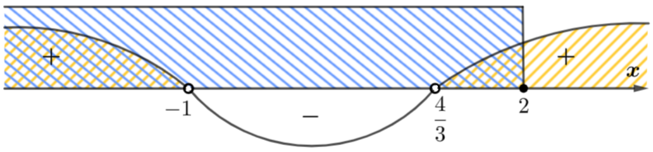
   При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$\left(100 - \frac{4}{3}\right)(100+1) > 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Получаем, что $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

Объединим решение первого и второго неравенства:



Тогда получаем ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{4}{3}; 2\right]$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить неравенства:

а) $\sqrt{5-2x} < \sqrt{2x^2-4x+1}$;

б) $\sqrt{2x^2-5x+4} \leqslant \sqrt{x^3-x+1}$;

в) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;

г) $\sqrt{24-5x^2} > \sqrt{2x^2-23x+66}$.

Теоретическая справка

$$g(x)\sqrt{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

► **Пример.** Решить неравенство $\sqrt{x^2-25} \cdot (x-3) < 0$

$$\begin{cases} x^2-25 > 0, \\ x-3 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-25 > 0, \\ x < 3. \end{cases}$$

Решим неравенство $x^2-25 > 0 \Leftrightarrow x^2-25 > 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) > 0$.

Нанесём точки $x = 5$ и $x = -5$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(x-5)(x+5)$.

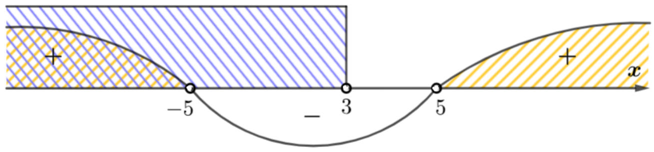
При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$(100-5)(100+5) > 0.$$

У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Получаем, что $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Объединим решение первого и второго неравенства:



Таким образом, получаем ответ: $x \in (-\infty; -5)$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2

Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2-4}(x+1) < 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{x^2+6x-40}}{x-4} \geqslant 0$;

в) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{x+8}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-3}{x-8}} \leqslant 0$.

Теоретическая справка

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g^2(x). \end{cases}$$

► **Пример.** Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 3-x$

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ x-1 < 9-6x+x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 1, \\ x^2-7x+10 > 0. \end{cases}$$

Решим отдельно $x^2-7x+10 > 0$, пользуясь следующим алгоритмом:

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.
2) Представим наше неравенство в виде: $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$.
3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$.

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$

   Найдём дискриминант:

$$D = 49 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2$$

   Найдём корни:

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5; \; x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2) Вспомним следующее утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то:
   $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

   Тогда:

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-2) > 0.$$

3) Решим неравенство $(x-5)(x-2) > 0$ с помощью метода интервалов:

   Нанесём точки $x = 5$ и $x = 2$ на числовую прямую и определим знаки выражения $(x-5)(x-2)$.

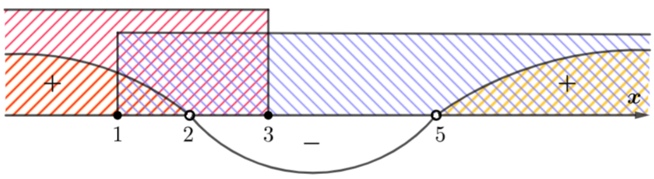
   При достаточно большом x, например $x = 100$, выражение положительно:

$$(100-5)(100-2) > 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Получаем, что $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Объединим решение первого и второго неравенства:



Таким образом, получаем ответ: $x \in [1; 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3

Решить неравенства:

а) $\sqrt{x-1} < 5 - 2x$;

б) $\sqrt{121-x^2} \leqslant x+11;$

в) $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1;$

г) $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x.$

Теоретическая справка

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

▶ **Пример.** Решить неравенство $4(x-1) < \sqrt{3x^2+19x+20}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4(x-1) < 0, \\ 3x^2+19x+20 \geqslant 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 4(x-1) \geqslant 0, \\ 16(x^2-2x+1) < 3x^2+19x+20. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1, \\ 3x^2+19x+20 \geqslant 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 13x^2-51x-4 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим отдельно $3x^2+19x+20 \geqslant 0$, пользуясь следующим алгоритмом:

> 1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.
> 2) Представим наше неравенство в виде: $a(x-x_1)(x-x_2) \geqslant 0$.
> 3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(x-x_1)(x-x_2) \geqslant 0$.

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2+19x+20=0$

   Найдём дискриминант:

$$D = 361 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 361 - 240 = 121 = 11^2$$

   Найдём корни:

$$x_1 = \frac{-19+11}{2\cdot 3} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}; \;\; x_2 = \frac{-19-11}{2\cdot 3} = \frac{-30}{6} = -5$$

2) Вспомним следующее утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то:
   $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

   Тогда:

$$3x^2+19x+20 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(x+\frac{4}{3}\right)(x+5) \geqslant \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)(x+5) \geqslant 0.$$

3) Решим неравенство $\left(x+\frac{4}{3}\right)(x+5) \geqslant 0$ с помощью метода интервалов:

   Нанесём точки $x=-\frac{4}{3}$ и $x=-5$ на числовую прямую и определим знаки выражения $\left(x+\frac{4}{3}\right)(x+5)$.

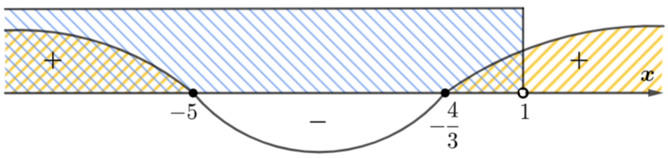
   При достаточно большом x, например $x=100$, выражение положительно:

$$\left(100+\frac{4}{3}\right)(100+5) \geqslant 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.

Получаем, что $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Объединим решение первого и второго неравенства в первой системе:



Таким образом, получаем: $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{4}{3}; 1\right)$.

Решим отдельно $13x^2-51x-4<0$, пользуясь следующим алгоритмом:

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. 2) Представим наше неравенство в виде: $a(x-x_1)(x-x_2)<0$. 3) Используя метод интервалов, решим неравенство $a(x-x_1)(x-x_2)<0$.

1) Найдём x_1 и x_2 - корни уравнения $13x^2-51x-4=0$

   Найдём дискриминант:

$$D = 2601 + 4 \cdot 4 \cdot 13 = 2601 + 208 = 2809 = 53^2$$

   Найдём корни:

$$x_1 = \frac{51+53}{2 \cdot 13} = \frac{104}{26} = 4; \;\; x_2 = \frac{51-53}{2 \cdot 13} = \frac{-2}{26} = -\frac{1}{13}$$

2) Вспомним следующее утверждение:

   Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то:
   $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

   Тогда:

$$13x^2-51x-4<0 \Leftrightarrow 13\cdot\left(x+\frac{1}{13}\right)(x-4)<0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{13}\right)(x-4)<0.$$

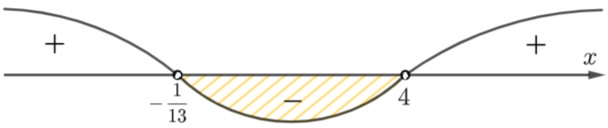
3) Решим неравенство $\left(x+\frac{1}{13}\right)(x-4)<0$ с помощью метода интервалов:

   Нанесём точки $x=-\frac{1}{13}$ и $x=4$ на числовую прямую и определим знаки выражения $\left(x+\frac{1}{13}\right)(x-4)$.

   При достаточно большом x, например $x=100$, выражение положительно:

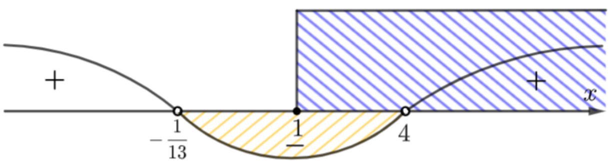
$$\left(100+\frac{1}{13}\right)(100-4)\geqslant 0.$$

   У нас нет скобок в чётных степенях и повторяющихся корней, значит знаки будут чередоваться.



Получаем, что $x\in\left(-\frac{1}{13};4\right)$.

Объединим решение первого и второго неравенства во второй системе:



Таким образом, получаем: $x\in[1;4)$.

В итоге получаем ответ: $x\in(-\infty;-5]\cup\left[-\frac{4}{3};4\right)$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4

Решить неравенства:

а) $x + 3 \leqslant \sqrt{x + 33}$;

б) $2(x - 3) < \sqrt{x^2 + 5x + 6}$;

в) $\sqrt{(x + 3)(x - 8)} > x + 2$;

г) $\sqrt{\dfrac{243 + 9x - 2x^2}{2x + 3}} > 9 - x$.

12 Иррациональные уравнения и иррациональные неравенства в задачах с параметром

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить неравенство $\sqrt{2x+3a} = 5 - 3a$ при всех значениях параметра a.

Задача 2

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2+9)x + 9a)\sqrt{x+7} = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$(x + 5a - 8)\sqrt{2x + a + 3} \leqslant 0$$

образует отрезок числовой прямой длины $|a|$.

Задача 4

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8a^2} = \sqrt{x^4 - 6ax}$$

имеет одно решение.

Задача 5

Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + 36a^2} = x^2 + 3x - 6a$$

имеет три решения.

Задача 6

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - a + 5} = x - 2a + 4$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Посмотреть решение.

Задача 7

Решить неравенство

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$$

при всех значениях параметра a.

Посмотреть решение.

Задача 8

Решить неравенство

$$\sqrt{-x} > ax + 2x$$

при всех значениях параметра a.

Посмотреть решение.

Задача 9

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x+a} = a\sqrt{x-a}$$

имеет единственное решение.

Посмотреть решение.

Задача 10

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x+a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Посмотреть решение.

$\Longrightarrow$ **Решение похожей задачи**

Задача 11

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x+a| \cdot \sqrt{x+5}$$

имеет ровно два различных корня.

Посмотреть решение.

13 Подсказки

1.8) Рассмотрим три случая: $p-2>0$, $p-2=0$, $p-2<0$.
При $p-2>0$ можем разделить левую и правую части неравенства на $(p-2)$, при этом знак неравенства не поменяется. Тогда неравенство примет вид: $(x+1)(p-3)+2x>0$;
При $p-2=0$ неравенство примет вид $0<0$. Это неравенство не имеет решений;
При $p-2<0$ можем разделить левую и правую части неравенства на $(p-2)$, при этом знак неравенства поменяется на противоположный. Тогда неравенство примет вид: $(x+1)(p-3)+2x<0$.

2.8) Вариант 1:

Сделаем замену $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$. Заметим, что $u\neq 0$, $v\neq 0$.
Получим систему $\begin{cases} u-2v=4a, \\ 2u-6v=3+4a. \end{cases}$
Далее решим эту систему относительно u и v.

Вариант 2:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=4a \ \mid \cdot(-3), \\ \frac{2}{x}-\frac{6}{y}=3+4a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=-12a, \\ \frac{2}{x}-\frac{6}{y}=3+4a. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение:

$$-\frac{1}{x}=3-8a \Leftrightarrow \frac{1}{x}=8a-3$$

Далее можно найти $\frac{1}{y}$, а затем уже найти x и y.

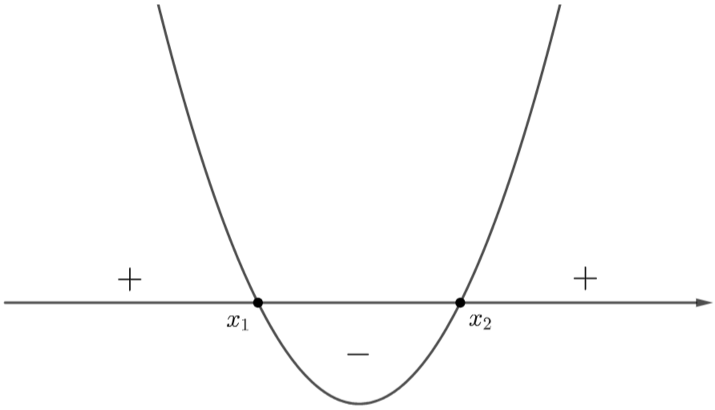
2.9) Если точка $(x_0; y_0)$ является решением каждой из двух систем уравнений, то она также является, решением системы уравнений, не содержащих параметр a:

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1}=-\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{x-4y}=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Решив эту систему, мы найдем потенциально совпадающие решения, после чего подставим решения в остальные уравнения систем и найдем параметр a.
Важно, чтобы при подстановке найденных значений x и y в уравнения $7x-2y=2a$ и $4x+y=2a$ значения a получились одинаковыми.

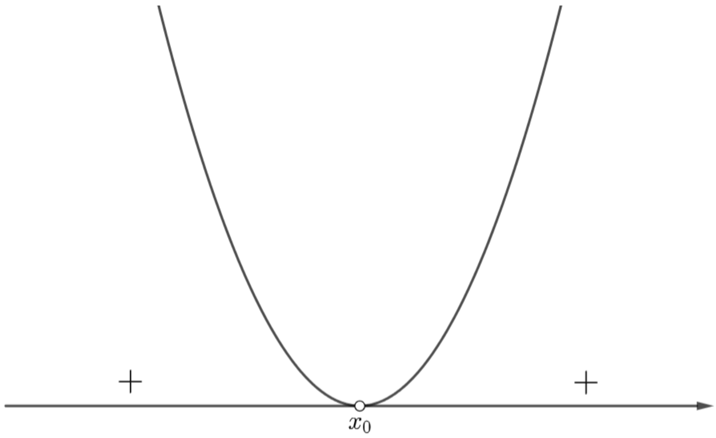
3.8) Рассмотрим три случая: $m-1>0$, $m-1=0$, $m-1<0$.

Случай 1: При $m-1>0$ ветви параболы направлены вверх.
При $D>0$ уравнение $(m-1)x^2-2(m-1)x+m-3=0$ имеет два корня x_1 и x_2.
Пусть $x_1<x_2$. Изобразим решения на числовой прямой.



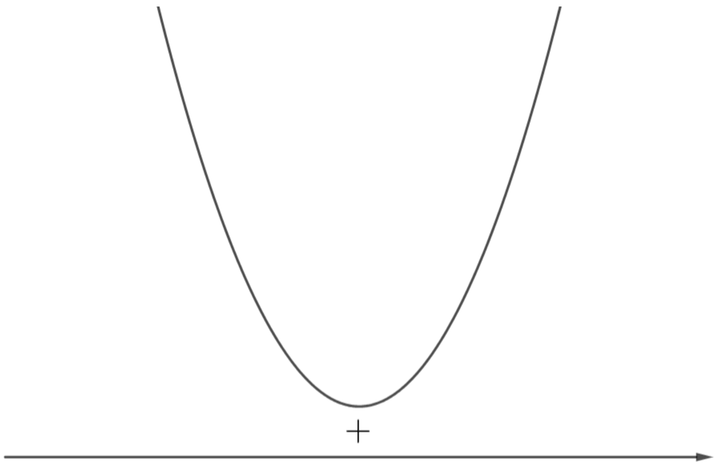
Тогда искомый промежуток $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

При $D = 0$ уравнение $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ имеет один корень x_0.



Тогда $x = x_0$ является единственной точкой, в которой неравенство не выполнено. Решение неравенства $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$

При $D < 0$ уравнение $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ не будет иметь корней.



А значит неравенство выполнено при всех значениях x.

Случай 2: при $m = 1$ неравенство линейное: $-4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$;

Случай 3: при $m - 1 < 0$ предлагаем обдумать самостоятельно.

9.8) Заметим, что оба слагаемых в левой части неотрицательны, значит, для того, чтобы их сумма была равна 0 необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое было равно 0. Значит, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |x^2 - 1| = 0, \\ |a(x-1)| = 0. \end{cases}$$

Теперь вспомним, что модуль равен 0 тогда и только тогда, когда подмодульное выражение равно 0. Значит, систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ a(x-1) = 0. \end{cases}$$

9.9) Заметим, что оба слагаемых в левой части неотрицательны, значит, для того, чтобы их сумма была равна 0, необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое было равно 0.
Значит, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |x^2 - ax + 32| = 0, \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0. \end{cases}$$

Теперь вспомним, что модуль равен 0 тогда и только тогда, когда подмодульное выражение равно 0.

Корень равен 0 тогда и только тогда, когда подкоренное выражение равно 0.

Соответственно, значит, систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x^2 - ax + 32 = 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Найденные значения x подставим в первое уравнение и найдём соответствующие им значения параметра a.

14 Решения

2.10) Найти все a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8az = 8. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Выразим x из первого уравнения системы:

$$x = by - az^2$$

Подставим выражение для x во второе уравнение системы. Мы получим уравнение с двумя переменными y и z:

$$2abz^2 + 8az + (-2b^2 - b + 6)y + 8 = 0.$$

Рассмотрим 2 случая:
1) $-2b^2 - b - 6 \neq 0$,
2) $-2b^2 - b - 6 = 0$.

1) Если $-2b^2 - b + 6 \neq 0$, то мы можем выразить y через z:

$$y = \frac{2abz^2 + 8az + 8}{2b^2 + b - 6}.$$

Это значит, что взяв произвольное значение $z = z_0$, мы получаем, что

$$y = \frac{2abz_0^2 + 8az_0 + 8}{2b^2 + b - 6}.$$

Подставляя найденные y и z в первое уравнение $x = by - az^2$, получаем, что тройка чисел

$$\left(\frac{2ab^2z_0^2 + 8abz_0 + 8b}{2b^2 + b - 6} - az_0^2; \frac{2ab^2z_0^2 + 8az_0 + 8}{2b^2 + b - 6}; z_0 \right)$$

является решением системы вне зависимости от a.

Значит, при всех b таких, что $-2b^2 - b + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq -2, \\ b \neq 1.5. \end{cases}$, система имеет хотя бы 1 корень.

2) Если $-2b^2 - b + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2, \\ b = 1.5. \end{array}\right.$, то второе уравнение принимает вид:

$$2abz^2 + 8az + 8 = 0.$$

Если $b = -2$, тогда уравнение примет вид:

$$-4az^2 + 8az + 8 = 0$$
$$az^2 - 2az - 2 = 0$$

Если $a = 0$, то уравнение примет вид: $-2 = 0$ и не будет иметь решений.

Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное. Значит оно имеет решения если дискриминант уравнения $D \geqslant 0$:

$$D = 4a^2 + 8a = 4a(a-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty).$$

Вспоминая, что $a \neq 0$ и в итоге получаем:

$$a \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty).$$

В этом случае решением нашей системы будет $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, где y_0 — произвольное число, z_0— корень квадратного уравнения $az^2 - 2az - 2 = 0$, а $x_0 = -2y_0 - a{z_0}^2$.

Если $b = 1{,}5$, тогда уравнение примет вид:

$$3az^2 + 8az + 8 = 0$$

Если $a = 0$, то уравнение примет вид: $8 = 0$ и не будет иметь решений.

Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное. Значит оно имеет решения если дискриминант уравнения $D \geqslant 0$:

$$D = 64a^2 - 96a = 32a(2a-3) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 0] \cup [1{,}5; +\infty).$$

Вспоминая, что $a \neq 0$ и в итоге получаем:

$$a \in (-\infty; 0) \cup [1{,}5; +\infty)$$

.

В этом случае решением нашей системы будет $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, где y_0 — произвольное число, z_0— корень квадратного уравнения $3az^2 + 8az + 8 = 0$, а $x_0 = 1.5y_0 - a{z_0}^2$.

В итоге мы нашли два условия на параметр a, и они оба должны выполняться для того, чтобы решения были при любых значениях параметра b:
1) $a \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$; 2) $a \in (-\infty; 0) \cup [1{,}5; +\infty)$.

Пересечем их и получим:

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [1{,}5; +\infty)$.

3.9) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - x - a)^2 = 2x^4 + 2(x+a)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 1]$.

Преобразуем наше уравнение. Это можно сделать 2 способами: честно преобразовав или через хитрую замену.

1 способ решения **(честное преобразование)**:

$$(x^2-x-a)^2=(x^2-x-a)(x^2-x-a)=x^4-x^3-ax^2-x^3+x^2+ax-ax^2+ax+a^2=$$

$$=x^4-2x^3-2ax^2+2ax+x^2+a^2,$$

$$x^4-2x^3-2ax+x^2+2ax+x^2+a^2=2x^4+2x^2+4ax+2a^2,$$

$$x^4+2x^3+x^2+2ax+2ax^2+a^2=0,$$

$$(x^2+x)^2+2a(x^2+x)+a^2=0,$$

$$(x^2+x+a)^2=0,$$

$$x^2+x+a=0,$$

Примечание: 2 способ решения **(хитрая замена)**.
Пусть $a=x^2$, $b=x+a$.
Тогда наше уравнение принимает вид

$$(a-b)^2=2a^2+2b^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)^2=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow x^2+x+a=0.$$

Теперь займёмся ответом на вопрос, когда уравнение $x^2+x+a=0$ и имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.
Найдем корни:
Вычислим дискриминант $D=1-4a$.
1) При $D<0 \Leftrightarrow 1-4a<0$: $a>\dfrac{1}{4}$. Решений нет.
2) При $D=0 \Leftrightarrow 1-4a=0$: $a=\dfrac{1}{4}$.

$$x^2+x+\frac{1}{4},$$

$$x=\frac{-1\pm 0}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Этот случай нам подходит.
3) При $D>0 \Leftrightarrow 1-4a>0$: $a<\dfrac{1}{4}$.

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2},$$

Заметим, что $x_1>-1,\quad x_2<1$ при всех $a<1/4$.
Найдем a, при которых $x_1\leqslant 1$:

$$\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\leqslant 1,$$

$$\sqrt{1-4a}\leqslant 3,$$

$$0\leqslant 1-4a\leqslant 9,$$

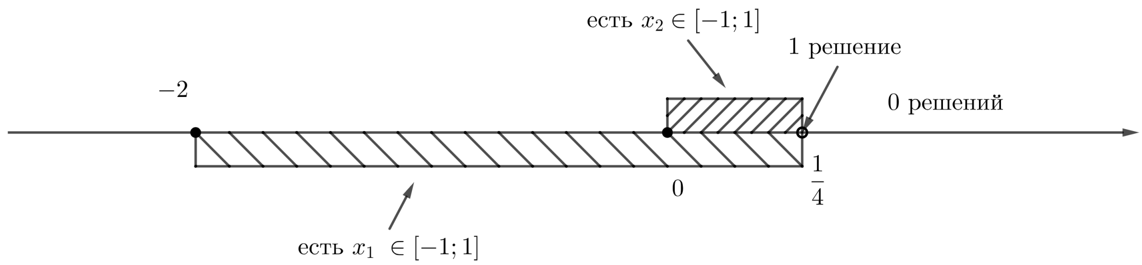
$$-1\leqslant -4a\leqslant 8,$$

$$-2\leqslant a\leqslant \frac{1}{4}.$$

Найдем a, при которых $x_2 \geqslant -1$:

$$\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1,$$
$$-1-\sqrt{1-4a} \geqslant -2,$$
$$1 \geqslant \sqrt{1-4a},$$
$$0 \leqslant 1-4a \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant -4a \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}.$$

Будьте внимательны! Мы рассматривали случай где $D > 0$, то есть где $a < \frac{1}{4}$.
Таким образом:



при $a > \frac{1}{4}$: нет решений на отрезке;

при $a = \frac{1}{4}$: $x = -\frac{1}{2}$. Тут одно решение на отрезке и этот случай нам подходит;

при $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$: $x_1, x_2 \in [-1;1]$, $x_1 \neq x_2$. Тут два решения на отрезке, и этот случай нам не подходит;

при $a \in [-2; 0)$: $x_1 \in [-1;1]$, $x_2 \notin [-1;1]$. Тут одно решение на отрезке и этот случай нам подходит;

при $a < -2$: $x_1, x_2 \notin [-1;1]$. Тут нет решений на отрезке, этот случай нам не подходит.

Ответ: $a \in [-2; 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$

5.8) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Дробь равна 0, если ее числитель равен 0, а знаменатель 0 не равен, то есть если

$$\begin{cases} 2a - x^2 + 3x = 0, \\ x - a^2 \neq 0. \end{cases}$$

Эта система имеет не более двух корней.
Система имеет ровно 2 решения, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 3x - 2a = 0$ положителен и корни уравнения $x^2 - 3x - 2a = 0$ не являются корнями уравнения $x - a^2 = 0$.

Итак, $D > 0 \Leftrightarrow D = 9 + 8a > 0 \Leftrightarrow 8a > -9 \Leftrightarrow a > -\dfrac{9}{8}$.
Найдем значения a при которых $x = a^2$ является корнем уравнения $x^2 - 3x - 2a = 0$.
Подставим $x = a^2$ в квадратное уравнение:

$$a^4 - 3a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a^3 - 3a - 2) = 0.$$

Заметим, что $a = -1$ является корнем второго множителя.
Действительно: $(-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$.
Тогда многочлен $a^3 - 3a - 2$ делится на многочлен $a + 1$ без остатка.
Поделим:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} a^3 - 0a^2 - 3a - 2 \\ a^3 + a^2 \end{array} & \begin{array}{l} a + 1 \\ \hline a^2 - a - 2 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} -a^2 - 3a \\ a^2 - a \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -2a - 2 \\ 2a - 2 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Тогда:

$$a(a^3 - 3a - 2) = a(a+1)(a^2 - a - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = -1, \\ a^2 - a - 2 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = -1, \\ a = 2. \end{array}\right.$$

Значит, при $a = 0$, $a = -1$, $a = 2$ получается, что $x = a^2$ является корнем квадратного уравнения $x^2 - 3x - 2a = 0$. Значит, эти a нам не подходят.
Нам нужно $a > -\dfrac{9}{8}$ и $a \neq 0; -1; 2 \Rightarrow a \in (-\frac{9}{8}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2)\ (2; +\infty)$.

5.9) Для каждого значения параметра решите уравнение Если $m = 1$, то наше уравнение не имеет смысла.
Теперь рассмотрим случай $m \neq 1$:

$$\frac{(m-2)x}{m-1} - 1 = \frac{m+2}{m-1} - \frac{2x^2 + m + 1}{x(m-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-2)x^2 - x(m-1) - (m+2)x + 2x^2 + m + 1}{x(m-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2 - 2x^2 + 2x^2 - mx + x - mx - 2x + m + 1}{x(m-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2 - (2m+1)x + m + 1}{x(m-1)} = 0.$$

Дробь равна 0, когда ее числитель равен 0, а знаменатель — нет.

$$\frac{mx^2 - (2m+1)x + m + 1}{x(m-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 - (2m+1)x + m + 1 = 0, \\ x(m-1) \neq 0. \end{cases}$$

Если $m = 0$, то уравнение $mx^2 - (2m+1)x + m + 1 = 0$ перестаёт быть квадратным. Этот случай мы рассмотрим отдельно.

При $m = 0$ уравнение $\dfrac{mx^2 - (2m+1)x + m + 1}{x(m-1)} = 0$ принимает вид: $\dfrac{1-x}{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Мы обсудили случаи $m = 0$, $m = 1$. Теперь рассмотрим остальные значения m.

Если $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, то числитель дроби — квадратный трехчлен.
Найдем его корни:

$$mx^2 - (2m+1)x + m + 1 = 0$$

$$D = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{2m+1 \pm 1}{2m} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{m}, \\ 1. \end{array} \right.$$

Значит, наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m+1}{m}, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ (m-1) \cdot x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m+1}{m}, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Корень $x = 1$ всегда является решением системы.

Корень $x = \dfrac{m+1}{m}$– решение системы, если он не совпадает с $x = 0$:

$$\frac{m+1}{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Заметим, что дискриминант квадратного уравнения $mx^2 - (2m+1)x + m + 1 = 0$ всегда положительный, а значит корни этого уравнения совпадать не могут. Тогда:

При $m =$ имеем 1 корень $x = 1$.

При $m \neq -1$ имеем 2 корня $x = 1$ и $x = \dfrac{m+1}{m}$.

Ответ:
при $m = 1$: решений нет;

при $m = 0; -1$: $x = 1$;

при $\begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$: $x = 1$, $x = \dfrac{m+1}{m}$.

5.10) Для каждого значения параметра решите уравнение

$$\frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} + \frac{1}{x-a} = 0.$$

Вспомним формулу разности кубов: $a^3 - x^3 = (a-x)(a^2 + ax + x^2)$.

$$\frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} + \frac{1}{x-a} = 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} - \frac{1}{a-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2a^2 + x^2 - 2x(a-x) - (ax + a^2 + x^2)}{a^3 - x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3ax + a^2}{a^3 - x^3} = 0.$$

Дробь равна 0, если числитель равен 0, а знаменатель нет
Найдем корни уравнения $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$.

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2,$$
$$x_{1,2} = \frac{3a \pm a}{4} = a; \frac{a}{2}.$$
$$\frac{2x^2 - 3ax + a^2}{a^3 - x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = \dfrac{a}{2}, \end{array} \right. \\ x \neq a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}, \\ x \neq a. \end{cases}$$

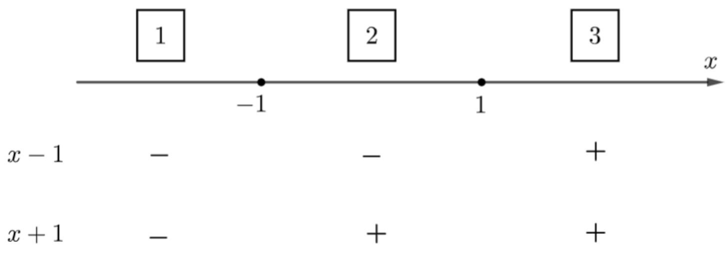
Ответ:
$a = 0$ решений нет;
При остальных значениях параметра a уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{a}{2}$.

9.10) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x+1| + (1-a)|x-1| + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Рассмотрим три случая, когда модули раскрываются с разными знаками:

1. $x \leqslant -1$; 2. $-1 < x < 1$; 3. $x \geqslant 1$.



Раскроем модули и найдем решения во всех трех случаях:

Случай $\boxed{1}$: $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ -a(x+1) - (1-a)(x-1) + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1, \\ -ax - a - x + 1 + ax - a + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1, \\ x = 3 - 2a. \end{cases}$$

Подставим x из второго уравнения системы в первое неравенство системы: $3 - 2a \leqslant -1$.

$$2a \geqslant 3 + 1 \Leftrightarrow a \geqslant 2.$$

Отсюда получаем, что при $a \geqslant 2$ существует решение $x_1 = 3 - 2a$.

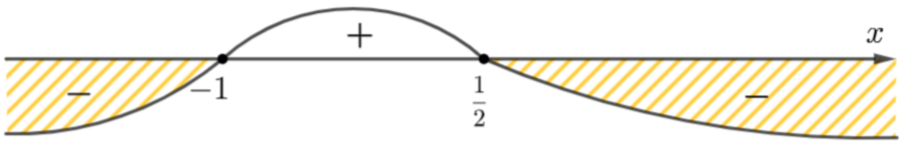
Случай $\boxed{2}$: $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ a(x+1) - (1-a)(x-1) + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1, \\ ax + a - x + 1 + ax - a + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

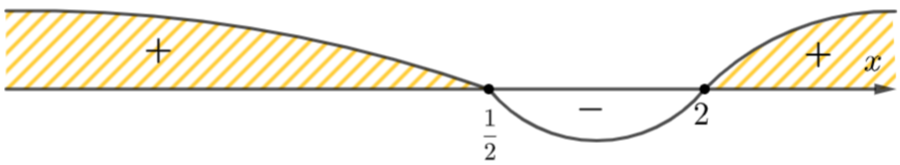
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x = \dfrac{3}{1-2a}. \end{cases}$$

Подставим x из второго уравнения системы в первое неравенство системы: $-1 \leqslant \dfrac{3}{1-2a} \leqslant 1$.
Оно равносильно системе из двух неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{1-2a} \leqslant 1, \\ \\ \dfrac{3}{1-2a} \geqslant -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-1+2a}{1-2a} < 0, \\ \\ \dfrac{3+1-2a}{1-2a} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{1-2a} < 0, \\ \\ \dfrac{2-a}{1-2a} > 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы методом интервалов:





$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right), \\ a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty). \end{cases}$$

Отсюда получаем, что решение $x_2 = \dfrac{3}{1-2a}$ существует при $a \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

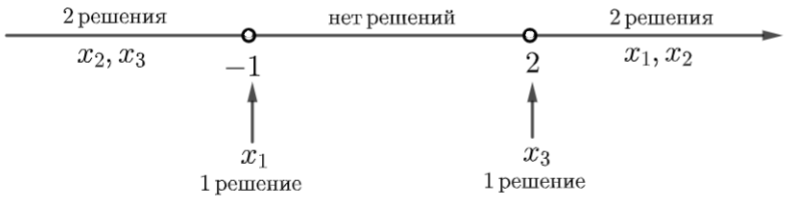
Случай $\boxed{3}$: $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ a(x+1) + (1-a)(x-1) + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ ax + a + x - 1 - ax + a + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x = -2a - 1. \end{cases}$$

Подставим x из второго уравнения системы в первое неравенство системы: $-2a - 1 \geqslant 1$.

$$2a \leqslant -1 - 1 \Leftrightarrow a \leqslant -1.$$

Отсюда получаем, что решение $x_3 = -2a - 1$ существует при $a \leqslant -1$.
Заметим, что x_1, x_2, x_3 существуют на непересекающихся промежутках, поэтому могут совпадать.



При $a \in (-\infty; -1)$ есть решения x_2 и $x_3 \implies 2$ решения.
При $a = -1$ есть решения $x_3 \implies 1$ решение.
При $a \in (-1; 2)$ нет решений.
При $a = 2$ есть решения $x_1 \implies 1$ решение.
При $a \in (2; +\infty)$ есть решения x_1 и $x_2 \implies 2$ решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

9.11) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Перепишем уравнение в другом виде:

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - (x^2 - 2|x| + 1) = 0$$

Здесь полезно помнить следующее:

$$(|x|)^2 = x^2$$

(Это верно, потому что в любом случае получается один и тот же результат).

Данное тождество позволяет нам представить выражение в скобках в следующем виде:

$$|x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2.$$

Получается разность квадратов:

$$a^2 - (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (a - |x| + 1)(a + |x| - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = a + 1, \\ |x| = 1 - a. \end{array}\right.$$

У нас есть совокупность и нам нужно, чтобы эта совокупность имела 2 решения. Здесь надо понимать сколько решений могут иметь уравнения $|x| = a + 1$ и $|x| = 1 - a$?

Давайте с этим разберёмся.

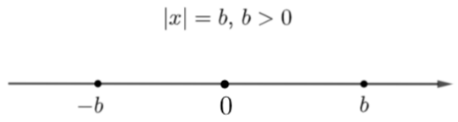
$\lvert x\rvert = a + 1$	2 реш.	$a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$	$x = \pm(a + 1)$
	1 реш.	$a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$	$x = 0$
	нет решений	$a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$	

$\lvert x\rvert = 1 - a$	2 реш.	$1 - a > 0 \Leftrightarrow a < -1$	$x = \pm(1 - a)$
	1 реш.	$1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$	$x = 0$
	нет решений	$1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$	

Зададимся вопросом: а могут ли у этих двух уравнений совпадать корни?

Если один корень совпадет, то совпадет и второй корень.

Потому что у уравнения $|x| = b$ корни симметричны относительно 0 при $b > 0$.

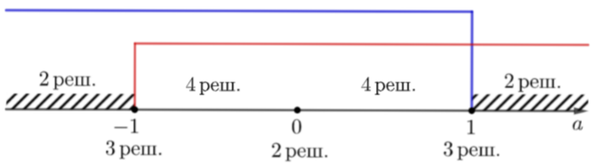


Значит, если у уравнений $|x| = a + 1$ и $|x| = 1 - a$ один корень совпадёт, то обязательно совпадут и второй.

У таких уравнений корни могут совпасть, если правые части одинаковы $a+1 = 1-a \Leftrightarrow a = 0$.

Получаем: $\left[\begin{array}{l} |x| = 1, \\ |x| = 1. \end{array}\right.$ Тогда у нас два корня $x = \pm 1$.

Давайте попробуем изобразить на числовой прямой результаты наших рассуждений.



Выберем промежутки с двумя решениями: $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$

12.6) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - a + 5} = x - 2a + 4$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Данное уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)} = g(x)$, как мы знаем, $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$ а значит, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2a + 4 \geqslant 0, \\ 2x - a + 5 = (x - 2a + 4)^2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$2x - a + 5 = x^2 + 4a^2 + 16 - 4xa + 8x - 16a$$

$$x^2 + (6 - 4a)x + 4a^2 - 15a + 11 = 0$$

Для того, чтобы система имела решения, необходимо, чтобы данное уравнение имело решение, значит, дискриминант должен быть неотрицательным.

$$D = (6 - 4a)^2 - 4 \cdot 4a^2 + 4 \cdot 15a - 4 \cdot 11 \geqslant 0$$
$$D = 36 + 16a^2 - 48a - 16a^2 + 60a - 44 = 12a - 8 \geqslant 0$$

Отсюда получаем, что $a \geqslant \frac{2}{3}$, тогда $x = \dfrac{-(6-4a) \pm \sqrt{12a-8}}{2}$, то есть $x = -3 + 2a \pm \sqrt{3a-2}$.
Теперь найдем значения параметра a, при которых выполняется первое неравенство системы, для ранее найденных корней второго уравнения:
Перепишем первое неравенство в виде $x \geqslant 2a - 4$ и подставим вместо x ранее найденные корни.

$$-3 + 2a \pm \sqrt{3a-2} \geqslant 2a - 4$$

Рассмотрим два случая для $x_1 = -3 + 2a + \sqrt{3a-2}$ и $x_2 = -3 + 2a - \sqrt{3a-2}$:

В первом случае получаем: $-3 + 2a + \sqrt{3a-2} \geqslant 2a - 4 \Leftrightarrow \sqrt{3a-2} \geqslant -1$. Вспомним, если корень определен, то он всегда $\geqslant 0$.
Значит, при $3a - 2 \geqslant 0$ имеем $\sqrt{3a-2} \geqslant -1$.
Вывод: при $a \geqslant \frac{2}{3}$ уравнение имеет корень x_1.

Во втором случае получаем $-3 + 2a - \sqrt{3a-2} \geqslant 2a - 4 \Leftrightarrow -\sqrt{3a-2} \geqslant -1$. Значит, $\sqrt{3a-2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3a - 2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2 \leqslant 3a \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1$.
Вывод: при $a \in [\frac{2}{3}; 1]$ уравнение имеет корень x_2.
Заметим, что если $D = 0 \Leftrightarrow 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$, получаем, что $x_1 = x_2 = -\frac{5}{3}$

Ответ: при $a \in (1; +\infty)$: $x = 2a - 3 + \sqrt{3a-2}$;
при $a \in (\frac{2}{3}; 1]$: $x = 2a - 3 \pm \sqrt{3a-2}$;
при $a = \frac{2}{3}$: $x = -5/3$;
при $a \in (-\infty; \frac{2}{3})$: нет решений.

12.7) Решить неравенство

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$$

при всех значениях параметра a.
Перепишем неравенство в виде $\sqrt{a^2 - x^2} > -2x$
Это неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Как мы знаем, такое неравенство равносильно совокупности:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

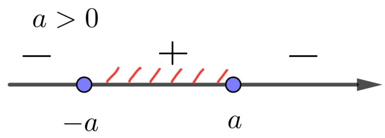
Значит, неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} -2x < 0, \\ a^2 - x^2 \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} -2x \geqslant 0, \\ a^2 - x^2 > 4x^2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

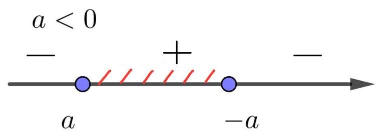
Решим обе системы по отдельности:

$$1)\ \begin{cases} -2x < 0, \\ a^2 - x^2 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (a-x)(a+x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы методом интервалов:



При $a>0$ получаем, что $x\in[-a;a]$, из первой строчки неравенства следует, что $x>0$, значит, $x\in(0;a]$.



При $a<0$ получаем, что $x\in[a;-a]$, из первой строчки неравенства следует, что $x>0$, значит, $x\in(0;-a]$.
При $a=0$ второе неравенство системы равносильно $-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x=0$, но из первой строчки неравенства следует, что $x>0$, значит, решений нет.

2) $\begin{cases}-2x\geq 0,\\ a^2-x^2>4x^2,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 0,\\ 5x^2-a^2<0.\end{cases}$

Аналогично решению первой системы найдем решения при $a>0$, $a<0$, $a=0$.
При $a<0$: $x\in\left(\dfrac{a}{\sqrt5};0\right]$, при $a>0$: $x\in\left(-\dfrac{a}{\sqrt5};0\right]$, при $a=0$: нет решений.
Далее объединим решения двух систем:

Ответ: при $a=0$: нет решений;
при $a>0$: $x\in\left(-\dfrac{a}{\sqrt5};a\right]$;
при $a<0$: $x\in\left(\dfrac{a}{\sqrt5};-a\right]$.

12.8) Решить неравенство

$$\sqrt{-x}>ax+2x$$

при всех значениях параметра a.
Это неравенство вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$. Как мы знаем, такое неравенство равносильно совокупности: $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geqslant 0,\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^2(x).\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$

Неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ax+2x<0,\\ -x\geqslant 0,\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}ax+2x\geqslant 0,\\ -x>a^2x^2+4ax^2+4x^2.\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$$

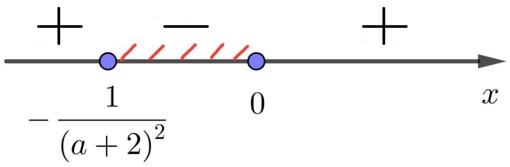
Решим обе системы по отдельности:

1) $\begin{cases}ax+2x<0,\\ -x\geqslant 0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x(a+2)<0,\\ x\leqslant 0.\end{cases}$

Решим первое неравенство системы:
при $a+2<0$: $x>0$, но из второго неравенства системы следует, что $x \leqslant 0$, значит, решений нет;
при $a+2>0$: $x<0$, из второго неравенства системы следует, что $x \leqslant 0$, получаем, что $x<0$;
при $a=-2$ первое неравенство системы равносильно $0<0$, значит, решений нет.

В итоге получаем:
при $a>-2$: $x<0$,
при $a \leqslant -2$: нет решений.

2) $\begin{cases} ax+2x \geqslant 0, \\ -x > a^2x^2+4ax^2+4x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a+2) \geqslant 0, \\ x((a+2)^2x+1) < 0. \end{cases}$
При $a=-2$ второе неравенство системы равносильно $x<0$.
При $a \neq -2$ решим второе неравенство системы методом интервалов:
Заметим, что при $a \neq -2$ выражение $-\dfrac{1}{(a+2)^2}<0$ для всех a, поэтому точка $-\dfrac{1}{(a+2)^2}<0$ располагается на числовой прямой левее, чем точка 0.



Получаем, что $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$.

Решим первое неравенство системы:
при $a>-2$: $x \geqslant 0$;
при $a<-2$: $x \leqslant 0$;
при $a=-2$: первое неравенство системы равносильно $0 \geqslant 0$, значит x – любое число.

Таким образом:

1) при $a>-2$ решение первого неравенства это $x \geqslant 0$, а решение второго неравенства это $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$, значит система не имеет решений.

2) При $a=-2$ решением первого неравенства является любое число, а решением второго неравенства $x<0$, значит решением системы будет $x<0$ или $x \in (-\infty; 0)$.

3) При $a<-2$ решение первого неравенства это $x \leq 0$, а решение второго неравенства это $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$, поэтому при $a<-2$ решение системы это $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$.

Теперь перейдем к итоговой совокупности:

1) при $a > -2$ первая система имеет решение $x < 0$, а вторая система решений не имеет. Значит решение совокупности это $x < 0$.

2) При $a = -2$ первая система не имеет решений. А вторая система выполняется при $x < 0$. Совокупность выполняется при $x < 0$.

3) При $a < -2$ первая система не имеет решений. Вторая система выполняется при $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$. Совокупность выполняется при $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$.

Ответ: при $a < -2$: $x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$;
при $a \geqslant -2$: $x \in (-\infty; 0)$;

Примечание. Второй способ решения.

$$\sqrt{-x} > ax + 2x \Leftrightarrow \sqrt{-x} > (a+2) \cdot x$$

Сделаем замену $\sqrt{-x} = t$. Тогда $-x = t^2$, а значит $x = -t^2$.
После замены получаем неравенство $t > -(a+2)t^2$.
Так как $t = \sqrt{-x}$, то $t \geqslant 0$.

Если $t = 0$, то неравенство примет вид $0 < 0$, а значит оно не имеет решений.

Если $t > 0$, то поделим обе части неравенства на t:

$$t > -(a+2)t^2 | : t$$

$$1 > -(a+2)t \Leftrightarrow (a+2) \cdot t > -1.$$

Если $a + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -2$, то $(a+2)t$ всегда больше $0 \Rightarrow$ неравенство выполнено при $t > 0$.

$$t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Если $a + 2 < 0 \Leftrightarrow a > -2$, то $(a+2) \cdot t > -1 \Leftrightarrow t < -\dfrac{1}{a+2}$. Вспоминаем, что $t > 0$, значит

$$0 < t < -\frac{1}{a+2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{-x} < -\frac{1}{a+2}$$

Так как в последнем двойном неравенстве все выражения неотрицательны, то можем возвести все выражения в двойном неравенстве в квадрат.

$$0 < -x < \frac{1}{(a+2)^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{(a+2)^2} < x < 0.$$

Получаем
при $a \geqslant -2 \quad x < 0$
при $a < -2 \quad x \in \left(-\dfrac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$

12.9) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x+a} = a\sqrt{x-a}$$

имеет единственное решение.

1) Заметим, что при $a<0$ левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть неравенства неположительна, также можно заметить, то одновременно в 0 оба корня обратиться не могут, потому что первый корень обращается в 0 при $x=a$, второй корень обращается в 0 при $x=-a$, а так как $a<0$, то эти числа разные. Получается, что при $a<0$ решений нет.

2) Если $a=0$, то уравнение равносильно $2\sqrt{x}=0$, что равносильно $x=0$, и значит, случай $a=0$ нам подходит.
3) Теперь решим уравнение при $a>0$:

$$2\sqrt{x+a} = a\sqrt{x-a} \Leftrightarrow \sqrt{4(x+a)} = \sqrt{a^2(x+a)}$$

Наше уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.
Как мы знаем, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$
Таким образом уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4(x+a) = a^2(x-a), \\ x>a. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4a = ax^2 - a^3, \\ x>a. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (4-a^2)x = -4a-a^3, \\ x>a. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $4-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$. Если $a=2$ первое уравнение системы равносильно $0=-16 \Rightarrow$ нет решений.

Случай $a=-2$ мы не рассматриваем, ведь $a>0$.

Если $4-a^2 \neq 0$ и $a>0$, то есть если $a \in (0;2)\cup(2;+\infty)$, то мы можем разделить левую и правую части уравнения на скобку $4-a^2$, тогда $x = \dfrac{-4a-a^3}{4-a^2}$.

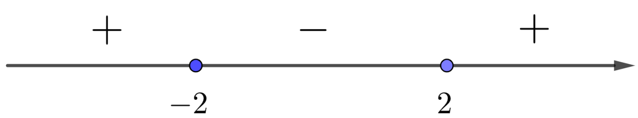
Остается проверить, что при этом x выполняется второе неравенство системы $x>a$. Подставим $x = \dfrac{-4a-a^3}{4-a^2}$ во второе неравенство системы $x>a$ и найдем a:

$$\frac{-4a-a^3}{4-a^2} > a$$

Помним, что $a>0$, поэтому можно разделить левую и правую части неравенства на a.

$$\frac{-4-a^2}{4-a^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{-4-a^2}{4-a^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-4-a^2-4+a^2}{4-a^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{a^2-4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{a^2-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(a-2)(a+2)} > 0$$



$$\Leftrightarrow a \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty).$$

Вспоминаем, что $a > 0$, значит, $a \in (2; +\infty)$.

Итак:
при $a < 0$ решений нет;
при $a = 0$ одно решение;
при $a > 0$ одно решение, если $a \in (2; +\infty)$.

Таким образом, $a \in \{0\} \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $a \in \{0\} \cup (2; +\infty)$.

12.10) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$|x + a| \cdot |x - a| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a} \Leftrightarrow |x + a| \cdot (|x - a| - \sqrt{x + a^2 - 2a}) = 0.$$

Рассмотрим два случая.
Первый случай: $|x + a| = 0$ при условии $x + a^2 - 2a \geqslant 0$:

$$\begin{cases} |x + a| = 0, \\ x + a^2 - 2a \geqslant 0. \end{cases}$$

Модуль равен нулю тогда и только когда, когда выражение под знаком модуля равно нулю, значит,

$$\begin{cases} |x + a| = 0, \\ x + a^2 - 2a \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a = 0, \\ x + a^2 - 2a \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a, \\ x + a^2 - 2a \geqslant 0. \end{cases}$$

Подставляем $x = -a$ в условие $x + a^2 - 2a \geqslant 0$ и получаем $a^2 - 3a \geqslant 0$.

Откуда $a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Таким образом, при $a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$ наше уравнение имеет корень $x = -a$.

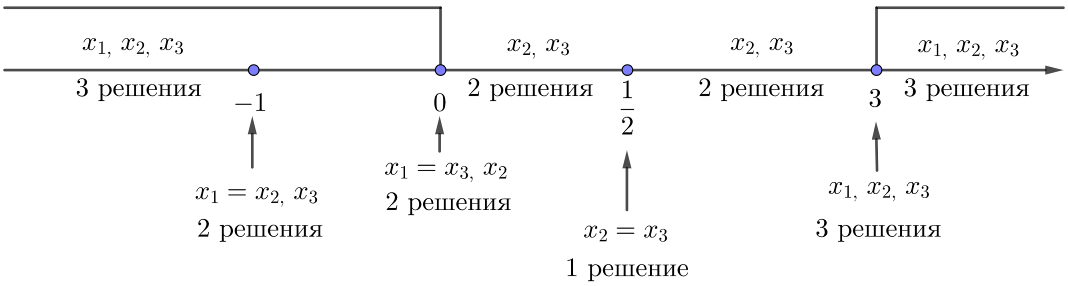
Второй случай: $|x - a| = \sqrt{x + a^2 - 2a}$.
И левая, и правая части уравнения неотрицательны, значит, мы можем возвести обе части в квадрат и приравнять.
Тогда получим $x^2 - 2ax + a^2 = x + a^2 - 2a$.
Приведем подобные слагаемые: $x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$. Решим это уравнение относительно x:

$$D = (2a + 1)^2 - 4 \cdot 2a = 4a^2 + 1 + 4a - 8a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2,$$

$$x = \frac{2a + 1 \pm (2a - 1)}{2} = \left[\begin{array}{l} x_2 = 1, \\ x_3 = 2a. \end{array} \right.$$

Получаем, что наше уравнение имеет 3 корня: $x_1 = -a$ при $a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$, $x_2 = 1$ при любом значении a, $x_3 = 2a$ при любом значении a.

Посмотрим, при каких значениях a какие-то из корней совпадают.
Корни $x_1 = -a$ и $x_2 = 1$ совпадают при $a = -1$.
Корни $x_1 = -a$ и $x_3 = 2a$ совпадают при $a = 0$.
Корни $x_2 = 1$ и $x_3 = 2a$ совпадают при $a = \dfrac{1}{2}$.



Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при
$a = -1;\ \ 0 \leqslant a < \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2} < a < 3$.

Ответ: $a = -1$; $0 \leqslant a < \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2} < a < 3$.

Примечание. Квадратное уравнение $x^2 - (2a+1)x + 2a = 0$ можно было решить по теореме Виета.

Заметим, что если взять 1 и $2a$, то

$$\begin{cases} 1 + 2a = 1 + 2a, \\ 1 \cdot 2a = 2a. \end{cases}$$

Значит $x_1 = 1$ и $x_2 = 2a$ это корни уравнения.

12.11) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x+5}$$

имеет ровно два различных корня.

$$|x^2 - a^2| = |x+a|\sqrt{x+5} \Leftrightarrow |(x-a)(x+a)| - |x+a|\sqrt{x+5} = 0 \Leftrightarrow |x+a|(|x-a| - \sqrt{x+5}) = 0$$

Последнее уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x+a| = 0, \\ x + 5 \geqslant 0, \end{cases} \\ |x-a| = \sqrt{x+5}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + a = 0, \\ x \geqslant -5, \end{cases} \\ (x-a)^2 = x + 5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -a, \\ x \geqslant -5, \end{cases} \\ x^2 - 2ax + a^2 - x - 5 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -a, \\ x \geqslant -5, \end{cases} \\ x^2 - (2a+1)x + a^2 - 5 = 0. \end{array}\right.$$

В нижней строчке системы мы пользуемся тем, что левая и правая части неотрицательны. Значит, мы можем возвести обе части в квадрат.
Верхняя система имеет корень $x_1 = -a$ при $-a \geqslant -5 \Leftrightarrow a \leqslant 5$.
Посмотрим, сколько корней имеет нижнее уравнение в зависимости от a.

Вычислим дискриминант: $D = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 20 = 4a + 21$.

При $D < 0$, то есть $4a + 21 < 0 \Leftrightarrow a < -\dfrac{21}{4}$ решений у нижнего уравнения нет.

При $D = 0$, то есть $4a + 21 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{21}{4}$ нижнее уравнение имеет 1 корень.

Найдем его: $x_2 = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{2a+1}{2} = a + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{21}{4} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{19}{4}$. Этот корень не совпадает с $x_1 = -a = \dfrac{21}{4}$. Значит, наше уравнение имеет 2 корня x_1,x_2.

При $D > 0$, то есть $4a + 21 > 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{21}{4}$ нижнее уравнение имеет 2 корня, x_2, x_3. Посмотрим, при каких значениях a корнем уравнения $x^2 - (2ax+1)x + a^2 - 5 = 0$ является x_1. Подставим в него $x = -a$:

$$a^2 + (2a+1)a + a^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 + a - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a = 1, \\ &a = -\frac{5}{4}. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, при $a \in (-\infty; -\frac{21}{4})$ одно решение x_1;

при $a = -\frac{21}{4}$ два решения x_1, x_2;

при $a \in (-\frac{21}{4}; -\frac{5}{4}) \cup (-\frac{5}{4}; 1) \cup (1; 5]$ три решения x_1, x_2, x_3;

при $a = -\frac{5}{4}$ два решения $x_1 = x_2$, x_3;

при $a = 1$ два решения $x_1 = x_2$, x_3;

при $a > 5$ два решения x_2, x_3.

Таким образом, условиям удовлетворяют значения $a \in \{-\frac{21}{4}; -\frac{5}{4}; -1\} \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $a \in \{-\frac{21}{4}; -\frac{5}{4}; -1\} \cup (5; +\infty)$

профиматика

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

90+
Набрал каждый 3-ий наш ученик

98%
Выпускников студенты топовых вузов

7500+
Учеников прошли наши годовые курсы

6 лет
Опыта подготовки к экзаменам

Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ

Игорь Уколов

отец Профиматики

- Выпускник мехмата МГУ
- Лично подготовил 30+ стобалльников
- 3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый

Влад Вуль

отец корги и не только

- Диплом факультета прикладной математики МГОУ
- Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU
- 8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.

Антон Гурко

преподаватель математики

- Выпускник ВМК МГУ
- Учитель высшей категории со стажем более 10 лет
- Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

15 Ответы

Линейные уравнения и неравенства в задачах с параметром.

1) $x = \frac{-19a+6}{3}$.

2) при $a = 0$: нет решений;
при $a \neq 0$: $x = -\frac{7}{a}$.

3) при $a = -3$: нет решений;
при $a = 3$: x — любое число;
при $a \neq -3$, $a \neq 3$: $x = \frac{1}{a+3}$.

4) $a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

5) $b = -\sqrt{2}$.

6) при $a > 0$: $x \leqslant \frac{5}{a}$;
при $a < 0$: $x \geqslant \frac{5}{a}$;
при $a = 0$: x — любое число.

7) при $a \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$: $x \geqslant \frac{1}{a-6}$;
при $a \in (-1; 6)$: $x \leqslant \frac{1}{a-6}$;
при $a = 6$: нет решений;
при $a = -1$: x — любое число.

8) $p \in [-4; 1] \cup (3; 4]$.

Системы линейных уравнений и неравенств в задачах с параметром.

1) $b = -2 \pm \sqrt{6}$.

2) $m = -5$.

3) при $a = 0{,}5$: $x = \frac{7}{8}, y = \frac{17}{8}$;
при $a = -3$: $x = 0, y = -3$;
при $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$: нет решений.

4) $a \in [\frac{19}{33}; \frac{31}{44}]$.

5) $a \in (-\infty; 0{,}8)$.

6) $a = \frac{13}{3}$.

7) $a \in (-\infty; \frac{27}{16})$.

8) $a \in (-\infty; \frac{3}{8}) \cup (\frac{3}{8}; \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}; +\infty)$.

9) $a = 5$.

10) $a \in (-\infty; -2] \cup [1{,}5; +\infty)$.

Квадратные уравнения и неравенства в задачах с параметром.

1) $a = \pm 2$, $a = \pm\sqrt{3}$.

2) при $a \in (-\infty; -1)$: нет решений;
при $a = -1$: $x = 1$;
при $a \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{a+1}}{a}$;
при $a = 0$: $x = 0{,}5$.

3) $a = -3$, $a = 0$.

4) $a \in [2; 4)$.

5) $a \in (-\infty; -0{,}4) \cup (1{,}6; +\infty)$.

6) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$: $x \in (-\infty; 3a - 3\sqrt{a^2-1}) \cup (3a + 3\sqrt{a^2-1}; +\infty)$;
при $a = -1$: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$;
при $a \in (-1; 1)$: $x \in \mathbb{R}$;
при $a = 1$: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

7) при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$: $x \in \mathbb{R})$;
при $a = 2$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;
при $a > 2$: $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{\frac{a-2}{a^2}}) \cup (-1 + \sqrt{\frac{a-2}{a^2}}; +\infty)$;
при $a = 0$: нет решений.

8) при $m \leqslant \frac{1}{3}$: нет решений;
при $m > 1$: $x \in (-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}) \cup (\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; +\infty)$;
при $m \in (\frac{1}{3}; 1)$: $x \in (\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}); \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}$;
при $m = 1$: $x < -\frac{1}{2}$.

9) $a \in [-2; 0) \cup \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

Теорема Виета в задачах с параметром.

Задачи на теорему Виета

1. $x_1 = a + 2$, $x_2 = a + 1$;
2. $x_1 = 1 - a$, $x_2 = 6 + a$;
3. $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{a+3}{a+1}$;
4. $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{a-4}{a}$.

1) $a = 4{,}5 \pm \sqrt{43}$.

2) $a \in (-\infty; -1-\sqrt{7}) \cup (-1+\sqrt{7}; +\infty)$.

3) $a = 0.25$.

4) $a = -4$.

5) $a = 6$, корни первого уравнения: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$,
корни второго уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

6) $a = 0{,}5$, $a = 1$.

7) $a = -4$.

8) $c = -27{,}1$.

Рациональные уравнения в задачах с параметром.

1) $x = -2$.

2) $x = \pm 2$.

3) при $a \in (-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; 15) \cup (15; +\infty)$: $x = \frac{2a}{5}$;
при $a = -2{,}5$, $a = 15$: нет решений.

4) $a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $a = -0.9$.

5) $a \in (\frac{31}{8}; 7) \cup (7; 14) \cup (14; \infty)$.

6) $a \in (-\infty; -4) \cup \left(-4; -\frac{12}{5}\right) \cup \left(-\frac{12}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{12}{5}\right) \cup \left(\frac{12}{5}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

7) $a \in (-\infty; -7) \cup (-7; 0) \cup (0; 5) \cup (5; 9)$.

8) $a \in (-\frac{9}{8}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

9) при $m = 1$: нет решений;
при $m \neq 1$: $x = 1$, $x = \frac{m+1}{m}$.

10) при $a = 0$: решений нет;
при $a \neq 0$: $x = -\frac{a}{2}$.

Свойства модуля. Замена переменной в модулях.

1) **а)** $x = -\frac{1}{7}$, $x = -\frac{11}{7}$.
б) $x = -5{,}5$, $x = 0{,}5$.
в) $x = 1$, $x = 5$.
г) $x = 0$, $x = 1$, $x = 6$, $x = 7$.
д) нет решений.
е) $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$.

2) а) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.
б) нет решений.
в) x — любое число.
г) $x \in (-7; 7)$.

3) а) $x \in (-\infty; -2{,}2) \cup (-1; +\infty)$.
б) $x \in [1; \frac{7}{3}]$.
в) $x \in [\frac{3}{2}; \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; \frac{11}{6}]$.
г) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$.
д) $x \in [-4; -2] \cup [0; 2]$.
е) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

4) а) $x = 1$, $x = 7$.
б) $x = 1$, $x = 13$.

5) а) $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
б) $x \in [-2; 2]$.
в) $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty)$.
г) нет решений.

Модуль. Раскрытие модуля по случаям.

1) а) $x = 1{,}5$, $x = 5{,}5$.
б) $x = -\frac{1}{8}$.
в) $x = 7 - \sqrt{47}$, $x = 2 + \sqrt{22}$.
г) $x = 0$, $x = 5$.

2) а) $x = -13$, $x = 0{,}2$.
б) $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$.
в) $x \in (-\infty; \frac{4}{7}]$.
г) $x \in (-\infty; -5] \cup \{-\frac{5}{4}\}$.

3) а) $x \in (-\infty; -6{,}5] \cup [-\frac{7}{3}; +\infty)$.
б) $x \in [\frac{3}{11}; +\infty)$.
в) $x \in (-\infty; -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$.
г) $x \in (-\infty; -7] \cup [-2; +\infty)$.

Модуль. Равносильные переходы в уравнениях и неравенствах с модулем.

1) а) $x = 0$, $x = \frac{70}{13}$, $x = \frac{13}{2}$.
б) $x = -1$, $x = 5 - 3\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = 5 + 3\sqrt{2}$.
в) $x = -1$, $x = 1$.
г) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

2) а) $x = 2$, $x = \frac{2}{5}$.
б) $x = -1{,}5$, $x = 0$.
в) $x = -1$, $x = 0$.
г) $x \in (-\infty; \frac{3}{2}]$.

3) **а)** $x \in (-\frac{10}{3}; 4)$.
б) $x \in (-5; -2)$.
в) $x \in (-1-\sqrt{5}; -2) \cup (-2; -1+\sqrt{5})$.
г) $x \in [-1; 0] \cup \{1\}$.

4) **а)** $x \in (\frac{4}{7}; +\infty)$.
б) $x \in (-\infty; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$.
в) $x \in (-5; 3+2\sqrt{2})$.
г) $x \in (-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{3}; +\infty)$.

5) **а)** $x \in [-1{,}75; +\infty)$.
б) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
в) $x \in [-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}] \cup [\frac{6}{7}; 4]$.
г) $x = 2$.

Модуль в задачах с параметром.

1) при $a \leqslant 0$: нет решений;
при $a > 0$: $x = \frac{a-5}{3a}$, $x = \frac{-a-5}{3a}$.

2) при $a \leqslant 0$: x — любое число;
при $a > 0$: $x \in (-\infty; \frac{5-a}{4}] \cup [\frac{5+a}{4}; +\infty)$.

3) $a < 0{,}4$.

4) $a = \frac{229}{17}$.

5) $a = \frac{13}{14}$.

6) при $a \in (-\infty; -1)$: $x = 7$;
при $a = -1$: $x \in [-5; 7]$;
при $a \in (-1; 1)$: $x = 7$, $x = \frac{17+7a}{a-1}$;
при $a = 1$: $x \in [7; \infty)$;
при $a \in (1; +\infty)$: $x = 7$.

7) $a \in (-5; 0) \cup (0; 20) \cup (20; +\infty)$.

8) при $a = 0$: $x = 1$, $x = -1$;
при $a \neq 0$: $x = 1$.

9) $a = 12$, $a = -33$.

10) $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

11) $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

Иррациональные уравнения.

1) а) $x = 6$.
б) $x = 2$.
в) $x = \frac{-7-\sqrt{43}}{3}$.
г) $x = -2$.

2) а) $x = -2$, $x = -1$, $x = 6$.
б) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$.
в) $x = -8$, $x = 7$.
г) $x = -3$, $x = 1$, $x = -1 \pm \sqrt{5}$.

3) а) $x = 4$.
б) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$.
в) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
г) $x = -5$, $x = 2$.

4) а) $x = 4$.
б) $x = 5$.

5) а) $x = -6$, $x = 1$, $x = 3$.
б) $x = 2$, $x = 4$.
в) $x = -6$, $x = 2$.

Иррациональные неравенства.

1) а) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 2{,}5]$.
б) $x \in [1; \infty)$.
в) $x \in (4; 6]$.

2) а) $x \in (-\infty; -2)$.
б) $x \in \{-10\} \cup (4; +\infty)$.
в) $x \in \{-1\}[2; +\infty)$.
г) $x \in [-8; -1) \cup \{3\}$.

3) а) $x \in [1; 2)$.
б) $x \in \{-11\} \cup [0; 11]$.
в) $x \in [2{,}5; 3)$.
г) $x \in [-1; 0)$.

4) а) $x \in [-33; 3]$.
б) $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; \frac{29+\sqrt{481}}{6})$.
в) $x \in (-\infty; -3]$.
г) $x \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{9}{2}; \frac{27}{2}\right]$.

Иррациональные уравнения и иррациональные неравенства в задачах с параметром.

1) при $a \leqslant \frac{5}{3}$: $x = \frac{-3a+(5-3a)^2}{2}$;
при $a > \frac{5}{3}$: нет решений.

2) $a \in (-\infty; -7] \cup \{-3\} \cup [-\frac{9}{7}; 0] \cup \{3\}$.

3) $a = \frac{19}{11}$.

4) $a \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

5) $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; 0)$.

6) при $a \in (1; +\infty)$: $x = 2a - 3 + \sqrt{3a-2}$;
при $a \in [\frac{2}{3}; 1]$: $x = 2a - 3 \pm \sqrt{3a-2}$;
при прочих $a \in (-\infty; \frac{2}{3})$: нет решений.

7) при $a = 0$: нет решений;
при $a > 0$: $x \in \left(\frac{-a}{\sqrt{5}}; a\right]$;
при $a < 0$: $x \in \left(\frac{a}{\sqrt{5}}; -a\right]$.

8) при $a < -2$: $x \in \left(-\frac{1}{(a+2)^2}; 0\right)$;
при $a \geqslant -2$: $x \in (-\infty; 0)$;

9) $a \in \{0\} \cup (2; +\infty)$.

10) $a \in \{-1\} \cup [0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 3)$.

11) $a \in \{-\frac{21}{4}; -\frac{5}{4}; 1\} \cup (5; +\infty)$.

профиматика

Ты героически добрался до конца файла — поздравляем!

Сам факт того, что ты изучил этот материал, уже дает тебе большое преимущество в подготовке к ЕГЭ. Однако одной теории недостаточно: для высокого балла нужно уметь доказывать теоремы и решать практические задачи.

Если ты хочешь достичь результата без лишнего стресса и нервов, получить чёткий план от экспертов и поддержку на каждом этапе подготовки, записывайся на наш легендарный курс подготовки к ЕГЭ.

Тебя ждёт:

- Глубокое вводное тестирование – оно покажет твои сильные и слабые стороны и поможет отточить ровно то, с чем есть сложности;
- Индивидуальная траектория подготовки четко на твой желанный балл;
- Вебинары с ДЗ и проверкой экспертов;
- Регулярные пробники;
- Куча полезных материалов: шпоры, методички по каждой задаче;
- Поддержка наставников – тех, кто прошел этот путь до тебя и знает все секреты подготовки;
- Имбовая атмосфера среди таких же замотивированных ребят, как и ты и чат, где мы лично отвечаем на все вопросы.

Записаться на курс

А по промокоду **EGEPROFI** ты получишь скидку в 10% на любой тариф нашего курса!