профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

Задача 13

Тригонометрия

тут можете держать
с нами мной связь, получать
бесплатные матемриалы.
методички и разборы

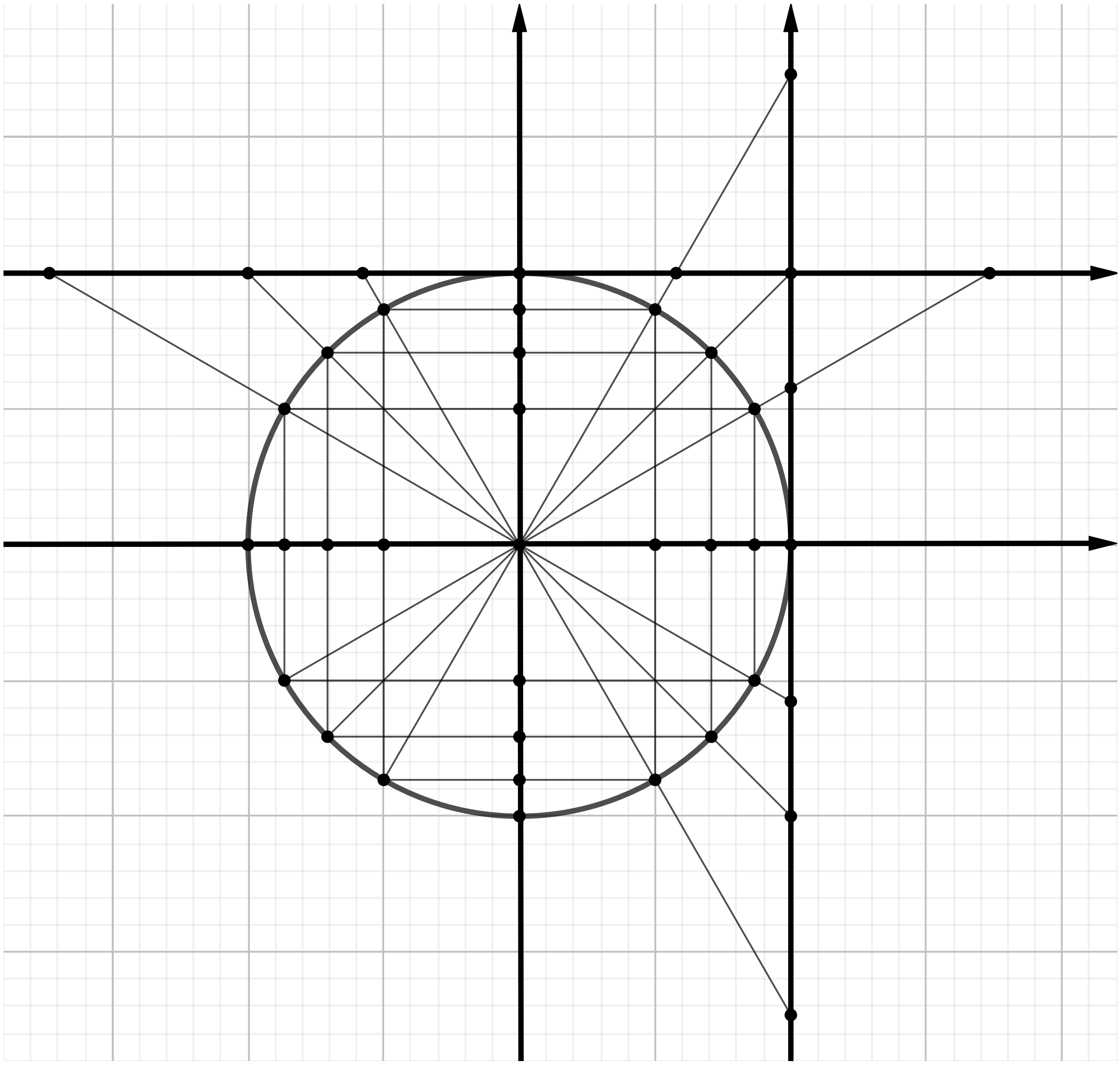
Содержание

1. Тригонометрическая окружность. Табличные значения углов. Область значений тригонометрических функций

⟹ Тригонометрическая Окружность

Задание 1.1

Посмотрите видео и заполните тригонометрическую окружность.



Задание 1.2

Вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

1. $t = 0;$
2. $t = \frac{\pi}{2};$
3. $t = \frac{3\pi}{2};$
4. $t = \pi;$
5. $t = -2\pi;$
6. $t = -\frac{\pi}{2};$
7. $t = -\frac{3\pi}{2};$
8. $t = -\pi;$
9. $t = \frac{5\pi}{6};$
10. $t = \frac{5\pi}{4};$
11. $t = \frac{7\pi}{6};$
12. $t = \frac{7\pi}{4};$
13. $t = -\frac{7\pi}{4};$
14. $t = -\frac{4\pi}{3};$
15. $t = -\frac{5\pi}{6};$
16. $t = -\frac{5\pi}{3}.$

Задание 1.3

Вычислите:

1. $\sin \frac{11\pi}{6};$
2. $\cos \left(-\frac{8\pi}{3}\right);$
3. $\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{4}\right);$
4. $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{2};$
5. $\sin \left(-\frac{55\pi}{4}\right)$
6. $\cos \frac{29\pi}{6};$
7. $\operatorname{tg} \left(-\frac{41\pi}{4}\right)$
8. $\operatorname{ctg} \left(-\frac{47\pi}{6}\right);$
9. $\sin \frac{100\pi}{3};$
10. $\cos \frac{123\pi}{4};$
11. $\operatorname{tg} \left(-\frac{51\pi}{3}\right)$
12. $\operatorname{ctg} \frac{37\pi}{3}.$

Задание 1.4

Найдите значение выражения:

1. $\sin 240°;$
2. $\operatorname{tg} 300°;$
3. $\cos 330°;$
4. $\operatorname{ctg} 315°;$
5. $\cos 300°;$
6. $\sin(-330°);$
7. $\sin 210°;$
8. $\cos(-420°).$

Задание 1.5

Найдите значение выражения:

1. $36\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4};$
2. $4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3};$
3. $\dfrac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)};$
4. $-4\sqrt{3} \cos(-750°);$
5. $2\sqrt{3} \operatorname{tg}(-300°);$
6. $-18\sqrt{2} \sin(-135°);$
7. $24\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$
8. $12 \sin 150° \cos 120°.$

▶ Пример к заданию 1.6:

Может ли функция $y = \cos x$ принимать значения:

1. $-\frac{1}{5}$;
2. -2;
3. $\sqrt{3}$;
4. $\frac{9}{10}$.

Решение:

Косинус угла может принимать любые значения от -1 до 1. Это можно понять с помощью тригонометрической окружности. Следовательно, для значений из промежутка $[-1; 1]$ ответ будет "да".
А для значений, больших 1 или меньших -1 ответ будет "нет".

1. Так как $-\frac{1}{5} \in [-1; 1]$, то $\cos x$ может принимать значение $-\frac{1}{5}$;
2. Так как $-2 < -1$, то $\cos x$ не может принимать значение -2;
3. Так как $\sqrt{3} > 1$, то $\cos x$ не может принимать значение $\sqrt{3}$;
4. Так как $\frac{9}{10} \in [-1; 1]$, то $\cos x$ может принимать значение $\frac{9}{10}$.

Примечание:

Синус угла так же как и косинус угла может принимать любые значения от -1 до 1.
Тангенс и котангенс угла могут принимать любые значения.

Задание 1.6

1.6.1 Может ли функция $y = \cos x$ принимать значения:

1. $-\frac{2}{5}$;
2. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$;
3. -2;
4. $\frac{\sqrt{2}}{4}$;
5. $\frac{5}{8}$;
6. $\sqrt{1}$;
7. $-\frac{10}{9}$;
8. 0,99.

1.6.2 Может ли функция $y = \sin x$ принимать значения:

1. $\frac{2}{3}$;
2. $-\frac{\sqrt{24}}{5}$;
3. 2;
4. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$;
5. $\frac{15}{16}$;
6. $-\sqrt{3}$;
7. 0,25;
8. $\frac{249}{248}$.

1.6.3 Может ли функция $y = \operatorname{tg} x$ принимать значения:

1. $\frac{1}{3}$;
2. -100;
3. 5;
4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. $\frac{15}{7}$;
6. -1000;
7. 0,35;
8. $\frac{251}{248}$.

1.6.4 Может ли функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимать значения:

1. $\frac{7}{3}$;
2. -3;
3. 7;
4. $-\frac{\sqrt{144}}{5}$;
5. $\frac{21}{16}$;
6. $-\sqrt{7}$;
7. $0{,}75$;
8. $\frac{51}{32}$.

2. Тригонометрические уравнения. Уровень 1

Для решения задач этого раздела вам может быть полезно следующее видео:

⟹ **Простейшие тригонометрические уравнения**

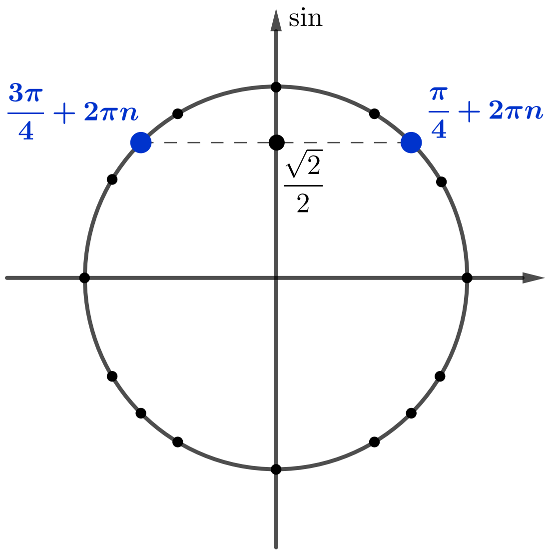
▶ Примеры к заданию 2.1:

Решите уравнение:

1. Решите уравнения:
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Решение:

   Отметим на тригонометрической окружности точки соответствующие решению уравнения $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

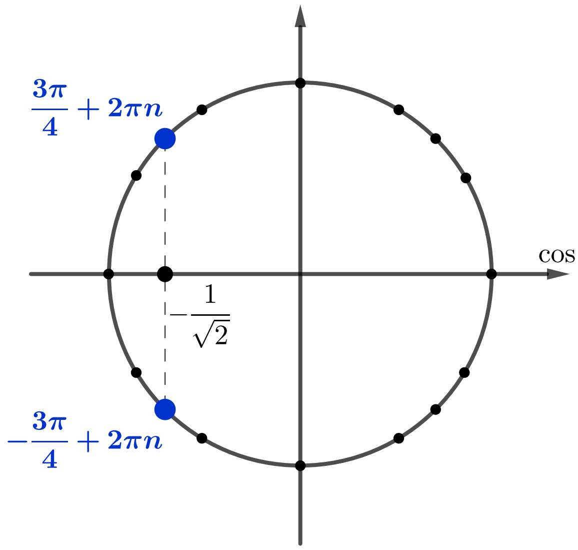


   Эти точки соответствуют : $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. Решите уравнение:
$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Решение:

   Отметим на тригонометрической окружности точки соответствующие $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:



Эти точки соответствуют : $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

1. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
2. $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задание 2.1

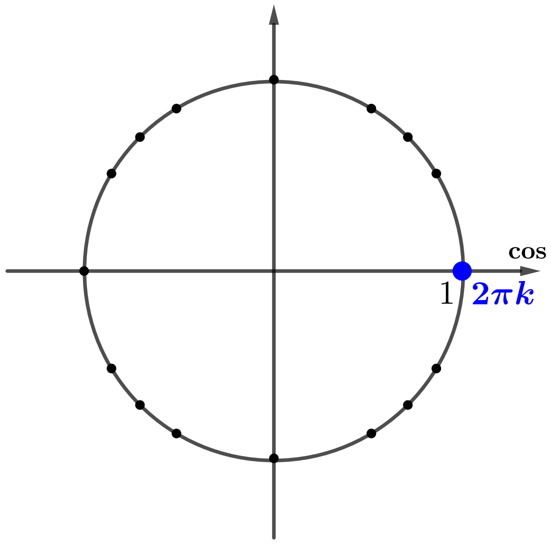
Решите уравнения:

1. $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $\sin x = -\frac{1}{2}$;
3. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
6. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
7. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
8. $\cos x = \frac{1}{2}$;
9. $\cos x = -\frac{1}{2}$;
10. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
11. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
12. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
13. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
14. $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

▶ **Примеры к заданию 2.2:**

1. Решите уравнение $\cos x = 1$.

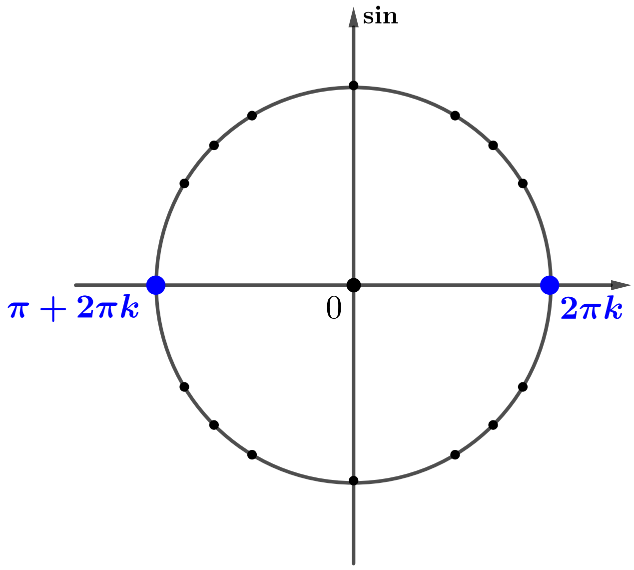
   Решение:
   Отметим на тригонометрической окружности точки соответствующие $\cos x = 1$:

   Эти точки соответствуют: $x = 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\sin x = 0$.

   Решение:
   Отметим на тригонометрической окружности точки соответствующие решению уравнения $\sin x = 0$:

   Эти точки соответствуют: $\left[\begin{aligned} &x = 2\pi k, \\ &x = \pi + 2\pi k. \end{aligned}\right.$
   Две полученных в решении серии можно объединить в одну $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Допустимы обе формы записи ответа, но обычно используют более короткий вариант $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

1. $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2. $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 2.2

Решите уравнения:

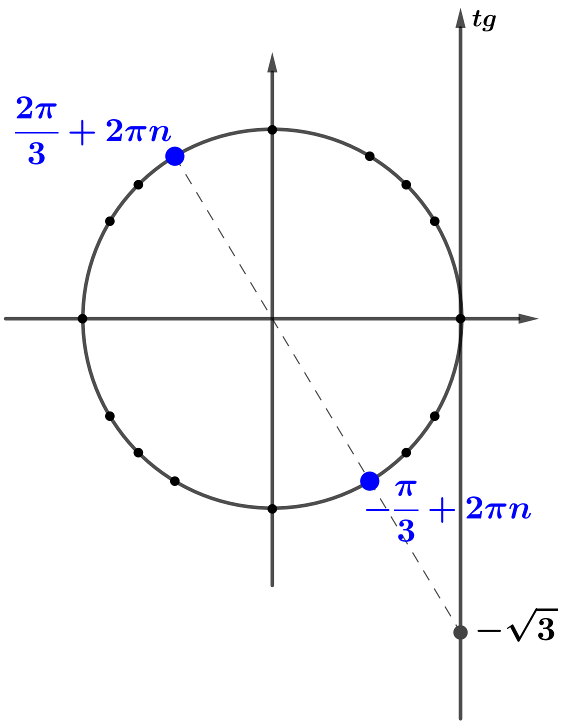
1. $\cos x = 0$;
2. $\cos x = 1$;
3. $\cos x = 2$;
4. $\cos x = -2$;
5. $\sin x = 2$;
6. $\sin x = -2$;
7. $\sin x = 1$;
8. $\sin x = -1$.

▶ Примеры к заданию 2.3:

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

Решение:



Зная табличные значения, поймем, что тангенс равен $-\sqrt{3}$ в точке $-\dfrac{\pi}{3}$.
Тангенс имеет период π. То есть, если мы будем прибавлять или вычитать из точки $-\dfrac{\pi}{3}$ любое целое количество раз число π, то будем получать точки с таким же значением тангенса. Значит, эти точки тоже будут являться решениями нашего уравнения. Тогда наш ответ можно записать в виде:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi \cdot n,$$

где n – целое число, которое показывает, сколько раз мы добавим число π к точке $-\dfrac{\pi}{3}$, чтобы получить точку с тем же значением тангенса.
По-другому можно записать ответ с использованием $n \in \mathbb{Z}$.
Окончательный ответ:

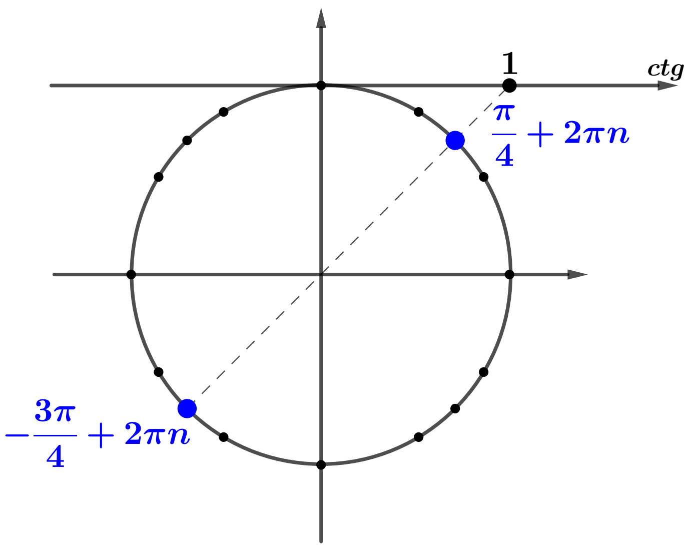
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = 1.$$

Решение:

Отметим на тригонометрической окружности точки соответствующие решению уравнения $\operatorname{ctg} x = 1$:



Эти точки соответствуют: $\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n. \end{aligned}\right.$

Две полученных в решении серии можно объединить в одну $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
Допустимы обе формы записи ответа, но обычно используют более короткий вариант $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

1. $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

2. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задание 2.3

Решите уравнения:

1. $\operatorname{tg} x = 0$;
2. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
3. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
4. $\operatorname{tg} x = 1$;
5. $\operatorname{tg} x = -1$;
6. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
7. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
8. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
9. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
10. $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
11. $\operatorname{ctg} x = 1$;
12. $\operatorname{ctg} x = -1$;
13. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
14. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
15. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
16. $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

▶ Пример к заданию 2.4:

Решите уравнение:

$$2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

Решение:

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зная табличные значения, поймём, что косинус равен $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в точках $\dfrac{5\pi}{6}$ и $-\dfrac{5\pi}{6}$. Косинус имеет период 2π. То есть если мы будем прибавлять или вычитать из точки $\dfrac{5\pi}{6}$ или из точки $-\dfrac{5\pi}{6}$ любое целое количество раз число 2π, то будем получать точки с таким же значением косинуса. Значит, эти точки тоже будут являться решениями нашего уравнения. Тогда наш ответ можно записать в виде:

$$\left[\begin{aligned} x&=\frac{5\pi}{6}+2\pi\cdot n,\\ x&=-\frac{5\pi}{6}+2\pi\cdot n,\end{aligned}\right.$$

где n – целое число, которое показывает, сколько раз мы добавляем число 2π к точке $\dfrac{5\pi}{6}$ или к точке $-\dfrac{5\pi}{6}$, чтобы получить точку с тем же значением косинуса.
По-другому можно записать ответ с использованием $n\in\mathbb{Z}$.

Окончательный ответ:

$$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задание 2.4

Решите уравнения:

1. $\sin x-1=0$;
2. $\cos x+1=0$;
3. $1+2\sin x=0$;
4. $2\cos x-1=0$.

▶ Пример к заданию 2.5:

Решите уравнение:

$$\sqrt{12}\sin x+3=0.$$

Решение:

$$\sin x=-\frac{3}{\sqrt{12}}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{3}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зная табличные значения, поймём, что синус равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ в точках $-\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$. Синус имеет период 2π. То есть если мы будем прибавлять или вычитать из точки $-\frac{\pi}{3}$ или из точки $-\frac{2\pi}{3}$ любое целое количество раз число 2π, то будем получать точки с таким же значением синуса. Значит, эти точки тоже будут являться решениями нашего уравнения. Тогда наш ответ можно записать в виде:

$$\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot n,\\&x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot n,\end{aligned}\right.$$

где n – целое число, которое показывает, сколько раз мы добавляем число 2π к точке $-\frac{\pi}{3}$ или к точке $-\frac{2\pi}{3}$, чтобы получить точку с тем же значением синуса.

По-другому можно записать ответ с использованием $n\in\mathbb{Z}$.

Окончательный ответ:

$$\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\&x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.5

Решите уравнения:

1. $10\sin x = \sqrt{25}$;
2. $\sqrt{32}\sin x + 4 = 0$;
3. $4\cos x - \sqrt{8} = 0$;
4. $4\cos x = -\sqrt{12}$.

▶ Пример к заданию 2.6:

Решите уравнение:

$$5\sin x + \sqrt{26} = 0.$$

Решение:

$$5\sin x + \sqrt{26} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, а $-\frac{\sqrt{26}}{5} < -1$, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.6

Решите уравнения:

1. $4\sin x = 3\sqrt{2}$;
2. $4\sqrt{5}\sin x = -9$;
3. $7\cos x - 5\sqrt{2} = 0$;
4. $4\sqrt{3}\cos x + 7 = 0$.

▶ Пример к заданию 2.7

Решите уравнение

$$2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Решение:

$$2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Вынесем общий множитель $\sin x$ за скобки

$$\sin x(2\sin x - 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k, \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.7

Решите уравнение

1. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0;$
2. $2\sin^2 x + \sin x = 0.$

▶ Пример к заданию 2.8

Решите уравнение:

$$2\sin^2 x - 1 = 0.$$

Решение:

$$2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Решение уравнения, полученное выше, состоит из 4 серий решений. Отметим их на окружности и заметим, что между соседними решениями по окружности одинаковые дуги равные $\dfrac{\pi}{2}$, следовательно, ответ можно записать в виде одной серии

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Обе записи ответа верные и с четырьмя сериями, и с одной, и имеют право на существование, но обычно записывают более короткий вариант.
Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.8

Решите уравнения:

1. $4\cos^2 x-3=0$,
2. $4\sin^2 x-3=0$,
3. $\sin^2 x-\frac{1}{4}=0$,
4. $4\cos^2 x-2=0$.

▶ Пример к заданию 2.9

Решите уравнение:

$$2\sin^2 x-7\sin x+3=0.$$

Решение:

Пусть $\sin x=t$ при этом $t\in[-1;1]$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$2t^2-7t+3=0.$$

Решая квадратное уравнение относительно переменной t, получим следующие корни:

$$\left[\begin{array}{l} t=3\ (\text{не подходит, т.к. } t\in[-1;1]),\\ t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.9

Решите уравнения:

1. $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0,$
2. $\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0.$

▶ Пример к заданию 2.10

Решите уравнение:

$$2\cos^2 x + 5\sin x = 5.$$

Решение:

Преобразуем уравнение, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 5 \Rightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0.$$

Пусть $\sin x = t,\ t \in [-1; 1]$, тогда:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая уравнение относительно переменной t, получим следующие корни:

$$\left[\begin{aligned} &t = \frac{3}{2} \text{ (не подходит, т.к. } t \in [-1;1]), \\ &t = 1. \end{aligned}\right.$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2.10

Решите уравнения:

1. $2\cos^2 x + 2\sin x = 2{,}5,$
2. $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0,$
3. $4\sin^2 x - 4\cos x = 5,$
4. $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0.$

3. Нахождение корней простейшего уравнения на заданном промежутке

Для решения задач этого раздела Вам могут быть полезны следующие видео:

$\Longrightarrow$ **Корни простейших тригонометрических уравнений с помощью окружности**

$\Longrightarrow$ **Корни простейших тригонометрических уравнений**

$\Longrightarrow$ **Метод артиллериста**

▶ Пример 1

Найти все корни уравнения $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$

Решение:

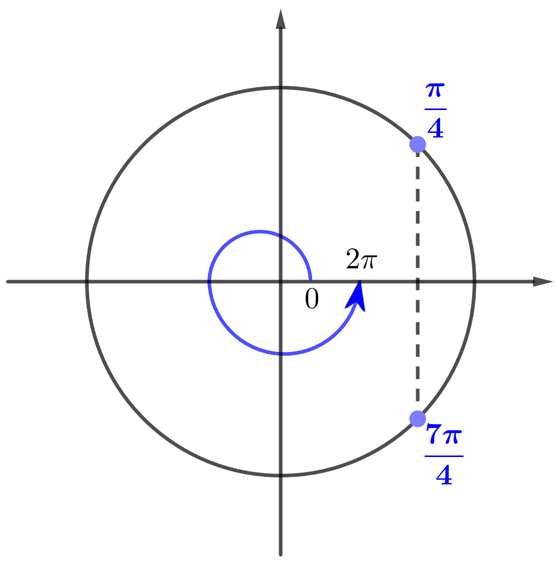
1) Решим уравнение $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x &= -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n. \end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$

2)Найдём решения уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

<u>Способ 1.</u> При помощи тригонометрической окружности:

Нанесем точки, соответствующие сериям $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $= -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ на тригонометрическую окружность. Отметим "улиткой-дугой" на окружности промежуток $[0; 2\pi]$, на котором мы будем искать корни. Чтобы нарисовать "улитку-дугу", следует отметить начало промежутка на окружности и подписать значение угла. Далее следует вести дугу против часовой стрелки, пока не дойдём до правого конца промежутка 2π. Его тоже следует подписать. Видим, что нашему промежутку принадлежит 2 корня. Теперь приступаем к отбору корней. Мы стартуем из точки 0. До ближайшей отмеченной точки нам нужно пройти дугу длины $\dfrac{\pi}{4}$. Тогда мы попадем в точку $0 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$. От второй отмеченной точки до конца отрезка 2π надо пройти так же длину дуги равную $\dfrac{\pi}{4}$. Тогда вторая отмеченная точка: $2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$.

Нашему отрезку $[0; 2\pi]$ принадлежат два корня: $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{7\pi}{4}$.



Способ 2. При помощи двойного неравенства:
Для начала найдём решения вида $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, принадлежащие отрезку $x \in [0; 2\pi]$.
Запишем двойное неравенство и решим его:

Запишем двойное неравенство	$0 \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2\pi$
поделим каждую часть неравенства на π	$0 \leqslant \frac{1}{4} + 2n \leqslant 2$
умножим каждую часть неравенства на 4	$0 \leqslant 1 + 8n \leqslant 8$
вычтем 1 из каждой части неравенства	$-1 \leqslant 8n \leqslant 7$
поделим каждую часть неравенства на 8	$-\frac{1}{8} \leqslant n \leqslant \frac{7}{8}$
найдем целые n, удовлетворяющие неравенству	$n = 0$
подставляем в $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ найденные n	$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4}$

Получаем корень, принадлежащий нашему промежутку.

Теперь найдём решения уравнения $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, принадлежащие отрезку $x \in [0; 2\pi]$.
Запишем двойное неравенство и решим его:

Запишем двойное неравенство	$0 \leqslant -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2\pi$
поделим каждую часть неравенства на π	$0 \leqslant -\frac{1}{4} + 2n \leqslant 2$
умножим каждую часть неравенства на 4	$0 \leqslant -1 + 8n \leqslant 8$
прибавим 1 к каждой части неравенства	$1 \leqslant 8n \leqslant 9$
поделим каждую часть неравенства на 8	$\frac{1}{8} \leqslant n \leqslant \frac{9}{8}$
найдем целые n, удовлетворяющие неравенство	$n = 1$
подставляем в $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ найденные значения n	$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{4}$

Получаем корень, принадлежащий нашему промежутку.

Способ 3. При помощи таблицы:
Представим наш промежуток $[0; 2\pi]$ в виде $\left[0; \frac{8\pi}{4}\right]$. Составим таблицу для значений x при заданных значения n:

n	$\ldots$	-1	0	1	2	$\ldots$
$\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$\ldots$	$-\frac{7\pi}{4}$	$\boxed{\frac{\pi}{4}}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\ldots$	$\ldots$
$-\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$\ldots$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\boxed{\frac{7\pi}{4}}$	$\frac{15\pi}{4}$	$\ldots$

Из таблицы видим, что промежутку $[0;2\pi]$ принадлежат два корня $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$. При $n>1$, получаем, что $x\geqslant\frac{15\pi}{4}$, а при $n<-1$, получаем, что $x\leqslant-\frac{7\pi}{4}$, значит при остальных значениях n корней принадлежащих отрезку нет.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

▶ **Пример 2**

Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$

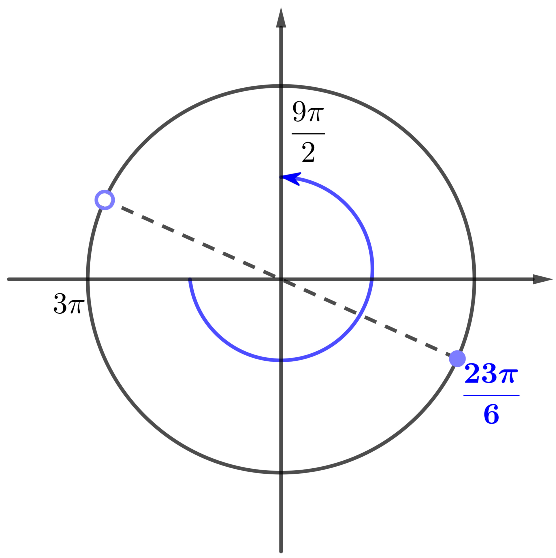
Решение:

1) Решим уравнение $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) Найдём решения уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$:

Способ 1. При помощи тригонометрической окружности:

Нанесем точки, соответствующие $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ на тригонометрическую окружность. Этих точек две. Отметим «улиткой-дугой» на окружности промежуток $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ на котором мы будем искать корни. Чтобы нарисовать «улитку-дугу», следует отметить начало промежутка на окружности и подписать значение угла. Далее следует вести дугу против часовой стрелки, пока не дойдём до правого конца промежутка $\dfrac{9\pi}{2}$. Его тоже следует подписать. Теперь приступаем к отбору корней. Видим, что нашему промежутку принадлежит только 1 корень. Мы стартуем из точки 3π. До ближайшей отмеченной точки нам нужно пройти дугу длины $\dfrac{5\pi}{6}$. Тогда мы попадем в точку $3\pi+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{23\pi}{6}$.



Нашему отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ принадлежит один корень: $x=\dfrac{23\pi}{6}$.

<u>Способ 2.</u> При помощи двойного неравенства:
Найдём решения вида $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, принадлежащие отрезку $x\in\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.
Запишем двойное неравенство и решим его:

Запишем двойное неравенство	$3\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{6}+\pi n \leqslant \dfrac{9\pi}{2}$
поделим каждую часть неравенства на π	$3 \leqslant -\dfrac{1}{6}+n \leqslant \dfrac{9}{2}$
умножим каждую часть неравенства на 6	$18 \leqslant -1+6n \leqslant 27$
прибавим 1 к каждой части неравенства	$19 \leqslant 6n \leqslant 28$
поделим каждую часть неравенства на 6	$\dfrac{19}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{28}{6}$
найдем целые n, удовлетворяющие неравенству	$n=4$
подставляем в $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ найденное n	$x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi\cdot 4=\dfrac{23\pi}{6}$

Получаем корень, принадлежащий нашему промежутку.

<u>Способ 3.</u> При помощи таблицы:
Представим наш промежуток $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ в виде $\left[\dfrac{18\pi}{6}; \dfrac{27\pi}{6}\right]$. Составим таблицу для значений x при заданных значения n:

n	$\dots$	3	4	5	$\dots$
$-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$	$\dots$	$\dfrac{17\pi}{6}$	$\boxed{\dfrac{23\pi}{6}}$	$\dfrac{29\pi}{6}$	$\dots$

Из таблицы видим, что промежутку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ принадлежит один корень $\dfrac{23\pi}{6}$. При $n \geqslant 5$, получаем, что $x > \dfrac{9\pi}{2}$, а при $n \leqslant 3$, получаем, что $x < 3\pi$, значит при остальных значениях n корней принадлежащих отрезку нет.

Ответ: $\dfrac{23\pi}{6}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 3.1

Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку, тремя способами, показанными выше:

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$, $x \in \left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$;
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;
3. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in \left[2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$;
4. $\operatorname{ctg} x = 0$, $x \in \left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$;
5. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x \in \left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$;
6. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$;
7. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in [\pi; 4\pi]$;
8. $\operatorname{ctg} x = -1$, $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

4. Тригонометрические уравнения в первой части

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Тригонометрические уравнения первой части.**

Примечание. Если вы посмотрели видео и всё поняли, то переходите сразу к заданию 4.3.

▶ **Пример к заданию 4.1:**

При целом значении n найдите наибольшее отрицательное и наименьшее положительное значение выражения:

$$5n + 8.$$

Решение:

Заметим, что при $n = 0$:

$$5n + 8 = 5 \cdot 0 + 8 = 8.$$

Если брать n больше, то мы получим значение больше 8.

Будем брать отрицательные n:

$$n = -1: \ 5 \cdot (-1) + 8 = 3,$$
$$n = -2: \ 5 \cdot (-2) + 8 = -2.$$

При меньших n будет результат ещё меньше.

Таким образом:

наибольшее отрицательное значение выражения достигается при $n = -2$ и равно -2.

наименьшее положительное значение выражения достигается при $n = -1$ и равно 3.

Ответ: -2; 3.

Задание 4.1

При каком целом значении k выражение

1. $2k + 3$ — принимает наибольшее отрицательное значение? Чему оно равно?
2. $6k - 7$ — принимает наименьшее положительное значение? Чему оно равно?
3. $3k + 5$ — принимает наименьшее положительное значение? Чему оно равно?
4. $4k - 5$ — принимает наибольшее отрицательное значение? Чему оно равно?

▶ Пример к заданию 4.2:

Решите уравнение относительно x:

$$\frac{\pi(3x-4)}{4}=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Решение:
Разделим обе части уравнения на π, а затем домножим обе части на 12:

$$\frac{\pi(3x-4)}{4}=\frac{\pi}{6}+2\pi n\ \Leftrightarrow\ \frac{3x-4}{4}=\frac{1}{6}+2n\ \Leftrightarrow\ 3(3x-4)=2+24n\ \Leftrightarrow\ 9x-12=2+24n.$$

Теперь выразим x:

$$9x-12=2+24n\ \Leftrightarrow\ 9x=14+24n\ \Leftrightarrow\ x=\frac{24n+14}{9}.$$

Ответ: $x=\dfrac{24n+14}{9},\ n\in\mathbb{Z}$.

Задание 4.2

Решите уравнение относительно x:

1. $x-4=5k+3,\ k\in\mathbb{Z}$;
2. $\dfrac{x+3}{2}=6n,\ n\in\mathbb{Z}$;
3. $\pi(x-4)=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;
4. $\dfrac{\pi(x+1)}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi t,\ t\in\mathbb{Z}$.

▶ Пример к заданию 4.3:

Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi(x+8)}{18}=\sqrt{3}.$$

Решение:
Сделаем замену $\dfrac{\pi(x+8)}{18}=t$ и решим полученное уравнение:

$$\operatorname{ctg}t=\sqrt{3}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Сделаем обратную замену и найдём x:

$$\frac{\pi(x+8)}{18}=\frac{\pi}{6}+\pi n\Leftrightarrow\frac{x+8}{18}=\frac{1}{6}+n\Leftrightarrow x+8=3+18n\Leftrightarrow x=18n-5.$$

Заметим, что при $n=0$:

$$18\cdot 0-5=-5.$$

Если брать n меньше, то мы получим значение меньше -5.
Будем брать положительные n:

$$n=1:\ \ 18\cdot 1-5=13,$$

$$n=2:\ \ 18\cdot 2-5=31.$$

Таким образом:
наибольший отрицательный корень уравнения достигается при $n = 0$ и равен -5.
наименьший положительный корень уравнения достигается при $n = 1$ и равен 13.

Ответ: -5; 13.

Задание 4.3

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$\cos\frac{\pi(x-3)}{3} = \frac{1}{2};$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

$$\sin\frac{\pi x}{12} = -\frac{1}{2};$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

$$\cos\frac{\pi(x+7)}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

4. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(4x+3)}{3} = -\sqrt{3};$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$\sin\frac{\pi(8x-7)}{4} = 1.$$

5. Преобразование тригонометрических выражений. Тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1; \qquad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Так же полезно помнить, что:

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha; \quad 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Напомним формулы сокращённого умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Тригонометрические тождества.**

▶ Пример к заданию 5.1:

1. Упростите выражение:

$$\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}.$$

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством преобразуем наше выражение и получим ответ:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \Leftrightarrow 1 - \cos^2 t = \sin^2 t.$$

Значит:

$$\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t.$$

2. Упростите выражение:
$$\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t.$$

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и тем, что $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x =$ $= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$. Преобразуем наше выражение:

$\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t = \frac{\sin^2 t - (\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^2 t - (\sin^2 t + \cos^2 t)} + 1 = \frac{\sin^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t} + 1 = \frac{-\cos^2 t}{-\sin^2 t} +$ $+1 = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1.$

Приведём сумму выражений к одному знаменателю, снова воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим ответ:
$$\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1 = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

3. Упростите выражение:
$$\operatorname{ctg}^2 t(\cos^2 t - 1) + 1.$$

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow$ $\cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$ и распишем $\operatorname{ctg} t$ через $\sin t$ и $\cos t$.
$$\operatorname{ctg}^2 t(\cos^2 t - 1) + 1 = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}(-\sin^2 t) + 1 = -\cos^2 t + 1 = \sin^2 t.$$

4. Упростите выражение:
$$(3\sin t + 4\cos t)^2 + (4\sin t - 3\cos t)^2.$$

Решение:

Раскроем скобки и преобразуем наше выражение:

$(3\sin t + 4\cos t)^2 + (4\sin t - 3\cos t)^2 = 9\sin^2 t + 24\sin t\cos t + 16\cos^2 t + 16\sin^2 t -$

$-24\sin t\cos t + 9\cos^2 t = 25\sin^2 t + 25\cos^2 t = 25(\sin^2 t + \cos^2 t) = 25.$

Ответ:

1. $\operatorname{tg}^2 t$;
2. $\frac{1}{\sin^2 t}$;
3. $\sin^2 t$;
4. 25.

Задание 5.1

Упростите выражения:

1. $1-\sin^2 t$;
2. $\cos^2 t-1$;
3. $1-\cos^2 t$;
4. $\sin^2 t-1$;
5. $(1-\sin t)(1+\sin t)$;
6. $\cos^2 t+1-\sin^2 t$;
7. $(1-\cos t)(1+\cos t)$;
8. $\sin^2 t+2\cos^2 t-1$;
9. $\dfrac{1}{\cos^2 t}-1$;
10. $\dfrac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t}$;
11. $1-\dfrac{1}{\sin^2 t}$;
12. $\dfrac{(\sin t+\cos t)^2}{1+2\sin t\cos t}$;
13. $\dfrac{1-2\sin t\cos t}{(\cos t-\sin t)^2}$;
14. $\dfrac{\cos^2 t-\operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t-\operatorname{tg}^2 t}$;
15. $\operatorname{ctg}^2 t-(\sin^{-2} t-1)$;
16. $\cos^2 t-\sin^2 t(\operatorname{ctg}^2 t+1)$;
17. $\dfrac{\sin t}{1+\cos t}+\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$;
18. $\dfrac{\cos t}{1+\sin t}+\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$;
19. $\dfrac{\operatorname{tg} t+1}{1+\operatorname{ctg} t}$;
20. $(\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t)^2-(\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t)^2$;
21. $\sin t\cos t(\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t)$;
22. $\sin^2 t\cos^2 t(\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{ctg}^2 t+2)$;
23. $\dfrac{1-\sin^2 t}{1-\cos^2 t}+\operatorname{tg} t\operatorname{ctg} t$;
24. $\dfrac{\cos^2 t+\operatorname{tg}^2 t}{\sin^2 t+\operatorname{ctg}^2 t}$;
25. $(\sin t+\cos t)^2-2\sin t\cos t$;
26. $\dfrac{2-\sin^2 t-\cos^2 t}{3\sin^2 t+3\cos^2 t}$;
27. $\sin^4 t+\cos^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t$;
28. $\dfrac{\sin^4 t-\cos^4 t}{\sin^2 t-\cos^2 t}$.

▶ Пример к заданию 5.2:

1. Докажите тождество:

$$\sin^3 t\cdot(1+\operatorname{ctg} t)+\cos^3 t\cdot(1+\operatorname{tg} t)=\sin t+\cos t.$$

Решение:

Приведём левую часть тождества к виду, записанному в его правой части. Для начала воспользуемся формулами $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$:

$$\sin^3 t\cdot(1+\operatorname{ctg} t)+\cos^3 t\cdot(1+\operatorname{tg} t)=\sin^3 t\cdot\left(1+\frac{\cos t}{\sin t}\right)+\cos^3 t\cdot\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right).$$

Раскроем скобки:

$$\sin^3 t + \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\sin t} + \cos^3 t + \frac{\cos^3 t \cdot \sin t}{\cos t} = \sin^3 t + \sin^2 t \cos t + \cos^3 t + \cos^2 t \sin t.$$

Теперь сгруппируем слагаемые и вынесем $\sin^2 t$ из первых двух слагаемых и $\cos^2 t$ из вторых двух слагаемых:

$$\left(\sin^3 t + \sin^2 t \cos t\right) + \left(\cos^3 t + \cos^2 t \sin t\right) = \sin^2 t(\sin t + \cos t) + \cos^2 t(\cos t + \sin t).$$

Вынесем за скобки общий множитель $(\sin t + \cos t)$, затем применим основное тригонометрическое тождество и тождество будет доказано:

$$\sin^2 t(\sin t + \cos t) + \cos^2 t(\sin t + \cos t) = (\sin t + \cos t)(\sin^2 t + \cos^2 t) = \sin t + \cos t.$$

Получим выражение, равное правой части исходного тождества. Следовательно, тождество доказано.

2. Докажите тождество:

$$\frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} + 2\sin t \cos t = 1.$$

Решение:

Приведём левую часть тождества к виду, записанному в его правой части.

Приведём выражения в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} + 2\sin t \cos t = \frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t + 2\sin t \cos t(\sin t + \cos t)^2}{(\sin t + \cos t)^2}.$$

Заметим, что:

$$(\sin t + \cos t)^2 = \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t = (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2\sin t \cos t = 1 + 2\sin t \cos t.$$

Раскроем скобки, преобразуем выражение:

$$\frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t + 2\sin t \cos t(\sin t + \cos t)^2}{(\sin t + \cos t)^2} = \frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t + 2\sin t \cos t(1 + 2\sin t \cos t)}{1 + 2\sin t \cos t} =$$

$$= \frac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t + 2\sin t \cos t + 4\sin^2 t \cos^2 t}{1 + 2\sin t \cos t} = \frac{1 + 2\sin t \cos t}{1 + 2\sin t \cos t} = 1.$$

Получим выражение, равное правой части исходного тождества. Следовательно, тождество доказано.

3. Докажите тождество:

$$\cos^4 t - \sin^4 t = 1 - 2\sin^2 t.$$

Решение:

Приведём левую часть тождества к виду, записанному в его правой части.

Распишем разность квадратов и применим основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^4 t - \sin^4 t = (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t.$$

Получим выражение, равное правой части исходного тождества. Следовательно, тождество доказано.

4. Докажите тождество:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \operatorname{tg}^2 t.$$

Решение:

Способ 1.

Приведём левую часть к виду, записанному в правой части.

Распишем в левой части $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ через $\sin t$ и $\cos t$ и применим основное тригонометрическое тождество:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \frac{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{1}{\cos^2 t} : \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\sin^2 t}{1} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t.$$

Получим выражение, равное правой части исходного тождества. Следовательно, тождество доказано.

Способ 2.

Упростим левую часть тождества, используя формулу связи $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\frac{\operatorname{tg}^2 t+1}{\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1} : \frac{\operatorname{tg}^2 t+1}{\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{1} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t+1} = \operatorname{tg}^2 t.$$

Получим выражение, равное правой части, как и при решении способом 1.

Задание 5.2

Докажите тождество:

1. $\dfrac{\cos^2 t}{1-\sin t} - \sin t = 1;$
2. $\dfrac{\sin^2 t}{1+\cos t} + \cos t = 1;$
3. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \sin^2 t;$
4. $\dfrac{1+\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{ctg} t} = \operatorname{tg} t;$
5. $\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \cos^2 t;$
6. $\dfrac{1-\operatorname{ctg} t}{1-\operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg} t;$
7. $1+\sin t = \dfrac{\cos t + \operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} t};$
8. $\dfrac{1-\sin t}{\cos t} = \dfrac{\cos t}{1+\sin t};$
9. $1+\cos t = \dfrac{\sin t + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t};$
10. $\dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \dfrac{1+\cos t}{\sin t};$
11. $\dfrac{(\sin t+\cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t\cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t;$
12. $\dfrac{(\sin t+\cos t)^2 - 1}{\operatorname{tg} t - \sin t\cos t} = 2\operatorname{ctg}^2 t;$

13. $(1-\sin t)(1+\sin t)=\cos^2 t;$
14. $\dfrac{\cos^2 t}{1-\cos^2 t}=\operatorname{ctg}^2 t;$
15. $(1+\operatorname{ctg}^2 t)(1-\cos^2 t)=1;$
16. $(1+\operatorname{tg}^2 t)(1-\sin^2 t)=1;$
17. $\left(1+\operatorname{tg}^2 t+\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)\sin^2 t\cos^2 t=1;$
18. $(\sin^2 t-\cos^2 t)^2+4\sin^2 t\cos^2 t=1;$
19. $\dfrac{1+\cos t}{\sin t}+\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\dfrac{2}{\sin t};$
20. $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}+\dfrac{\cos t}{1+\sin t}=\dfrac{2}{\cos t};$
21. $\operatorname{tg}^2 t-\sin^2 t=\operatorname{tg}^2 t\sin^2 t;$
22. $\operatorname{ctg}^2 t-\cos^2 t=\operatorname{ctg}^2 t\cos^2 t;$
23. $\dfrac{\sin^3 t-\cos^3 t}{\sin t-\cos t}-\sin t\cos t=1;$
24. $\dfrac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\sin t+\cos t}+\sin t\cos t=1.$

▶ **Пример к заданию 5.3:**

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(t)=\sin^2 t-\cos^2 t+1$.

Решение:

Используя основное тригонометрическое тождество, упростим данное выражение:

$$f(t)=\sin^2 t-\cos^2 t+1=\sin^2 t-\cos^2 t+\sin^2 t+\cos^2 t=\sin^2 t+\sin^2 t=2\sin^2 t.$$

Наименьшее значение $\sin t$ равно -1, а наибольшее 1. Тогда наибольшее значение $\sin^2 t$ равно 1, а наименьшее 0, так как квадрат числа всегда неотрицателен. Следовательно, наибольшее значение $2\sin^2 t$ равно 2, а наименьшее 0.

Таким образом:

$$f_{min}(t)=0; \qquad f_{max}(t)=2.$$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(t)=5\sin^2 t+\cos^2 t$.

Решение:

Используя основное тригонометрическое тождество, упростим данное выражение:

$$f(t)=5\sin^2 t+\cos^2 t=4\sin^2 t+\sin^2 t+\cos^2 t=4\sin^2 t+1.$$

Наименьшее значение $\sin t$ равно -1, а наибольшее 1. Тогда наибольшее значение $\sin^2 t$ равно 1, а наименьшее 0. Тогда наибольшее значение $4\sin^2 t$ равно 4, а наименьшее 0, в свою очередь наибольшее значение $4\sin^2 t+1$ равно 5, а наименьшее равно 1. Таким образом:

$$f_{min}(t)=1; \qquad f_{max}(t)=5.$$

Ответ:

1. 0, 2;
2. 1, 5.

Задание 5.3

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(t)$, если:

1. $f(t) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)$;
2. $f(t) = 5\cos^2 t - \sin^2 t$;
3. $f(t) = \dfrac{\cos^4 t - 1}{\cos^2 t + 1}$;
4. $f(t) = \sin t + 3\sin^2 t + 3\cos^2 t$.

6. Связь тригонометрических функций одного аргумента

Для решения задач из задания 6 Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Как зная одну тригонометрическую функцию найти остальные тригонометрические функции.**

▶ **Примеры:** По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1. $\sin\alpha = -\dfrac{20}{29}$, $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

   Решение:

   Найдём значение $\cos\alpha$.

   Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

   $$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{20}{29}\right)^2 = 1 - \frac{400}{841} = \frac{441}{841},$$

   $$\cos\alpha = \pm\frac{21}{29}.$$

   Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{21}{29}$.

   Найдём значение $\operatorname{tg}\alpha$.

   Мы знаем значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, тогда:

   $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{20}{29}}{-\frac{21}{29}} = \frac{20}{21}.$$

Найдём значение $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{21}{29}}{-\frac{20}{29}} = \frac{21}{20}.$$

2. $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{35}{12}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Решение:

Найдём $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1, \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{35}{12}} = -\frac{12}{35}.$$

Найдём $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\left(-\frac{35}{12}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1369}{144} \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{144}{1369} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \pm\frac{12}{37}.$$

Так как $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, то $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{12}{37}$.
Найдём $\sin\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{37}\right)^2 = 1 - \frac{144}{1369} = \frac{1225}{1369} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{35}{37}.$$

Так как $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, то $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{35}{37}$.

Задание 6

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

6.1 а) $\sin t = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\sin t = \dfrac{5}{13}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sin t = -0{,}6$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$;

г) $\sin t = -0{,}28$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

6.2 а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\cos t = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

в) $\cos t = 0{,}6$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

г) $\cos t = -\dfrac{24}{25}$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

6.3 а) $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2};$

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4, \quad \pi < t < \dfrac{3\pi}{2};$

в) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{3}{4}, \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi;$

г) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{5}{12}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi.$

6.4 а) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{12}{5}, \quad 3\pi < t < \dfrac{7\pi}{2};$

б) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{7}{24}, \quad 2\pi < t < \dfrac{5\pi}{2};$

в) $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{5}{12}, \quad \dfrac{7\pi}{2} < t < 4\pi;$

г) $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{8}{15}, \quad \dfrac{5\pi}{2} < t < 3\pi.$

7. Формулы приведения

Напомним, как выносить «−», из аргументов тригонометрических функций.

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\cos(-x) = \cos x; \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Для решения задач из этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Формулы приведения за 20 минут.**

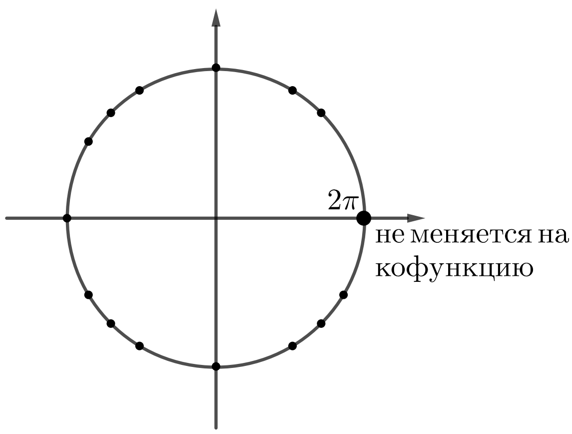
▶ **Пример к заданию 7.1:**

1. Упростите выражение:

$$\cos(2\pi - x).$$

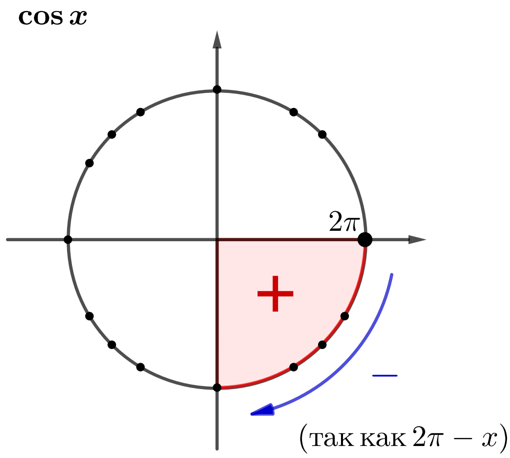
Решение:

Нанесем точку 2π на тригонометрической окружность:



В этой точке функция не меняется на кофункцию, значит у нас останется косинус.

Далее выбираем четверть в отрицательном направлении:



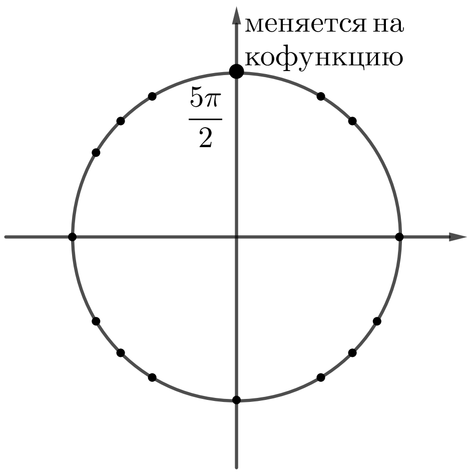
В этой четверти знак исходной функции, то есть косинуса, «+», значит у нас будет, то же знак «+».

Тогда получаем, что $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

2. Упростите выражение:
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

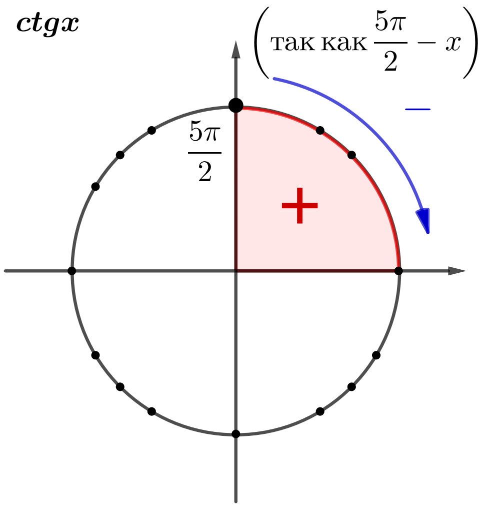
Решение:

Нанесем точку $\frac{5\pi}{2}$ на тригонометрической окружность:



В этой точке функция меняется на кофункцию, значит у нас получится тангенс.

Далее выбираем четверть в отрицательном направлении:



В этой четверти знак исходной функции, то есть котангенса, «+», значит у нас будет, то же знак " + ".

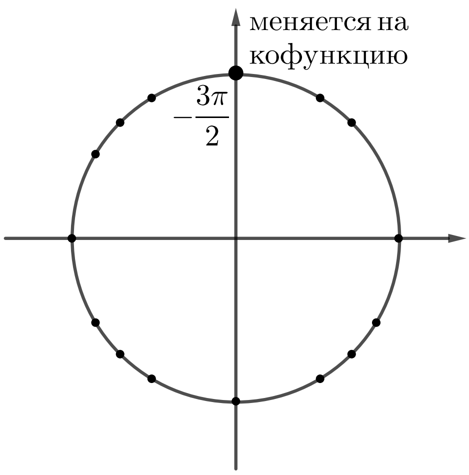
Тогда получаем, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

3. Упростите выражение:

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2}\right).$$

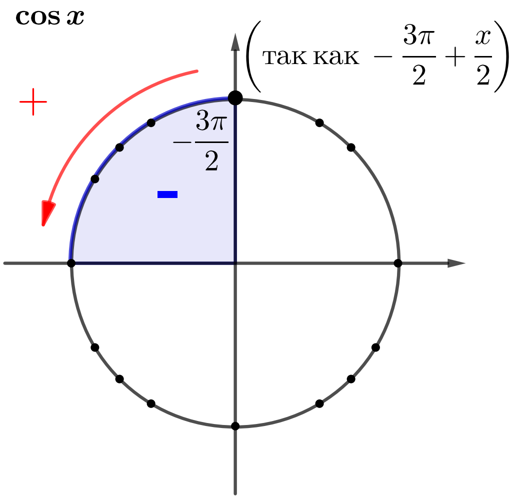
Решение:

Нанесем точку $-\frac{3\pi}{2}$ на тригонометрической окружность:



В этой точке функция меняется на кофункцию, значит у нас получится синус.

Далее выбираем четверть в положительном направлении:



В этой четверти знак исходной функции, то есть косинуса, «−», значит у нас будет, то же знак «−».

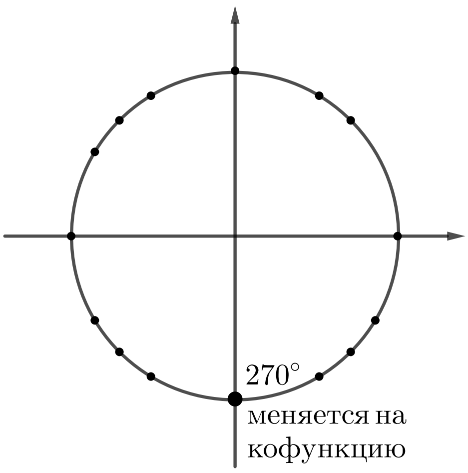
Тогда получаем, что $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{x}{2}$.

4. Упростите выражение:

$$\sin(270^\circ + x).$$

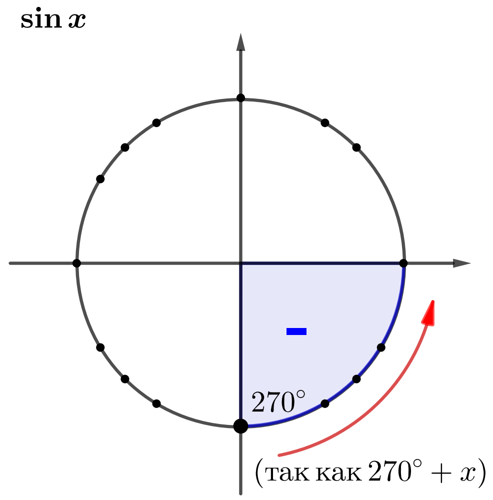
Решение:

Нанесем точку 270° на тригонометрической окружность:



В этой точке функция меняется на кофункцию, значит у нас получится косинус.

Далее выбираем четверть в отрицательном направлении:



В этой четверти знак исходной функции, то есть синуса, «−», значит у нас будет, то же знак «−».

Тогда получаем, что $\sin(270° + x) = -\cos x$.

Ответ: 1. $\cos x$; 2. $\operatorname{tg} x$; 3. $-\sin\dfrac{x}{2}$; 4. $-\cos x$.

Задание 7.1

Упростить выражение:

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;
2. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$;
3. $\sin(\pi + x)$;
4. $\sin(\pi - x)$;
5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$;
6. $\cos(2\pi + x)$;
7. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$;
8. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$;
9. $\operatorname{ctg}(\pi - x)$;
10. $\operatorname{tg}(\pi + x)$;
11. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$;
12. $\cos(4x - \pi)$;
13. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$;
14. $\sin(4x - \pi)$;
15. $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{3\pi}{2}\right)$;
16. $\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$;
17. $\operatorname{tg}(4x - \pi)$;
18. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{3\pi}{2}\right)$;
19. $\cos(90° + x)$;
20. $\sin(360° - x)$;
21. $\cos(180° + x)$;
22. $\operatorname{tg}(90° - x)$;
23. $\operatorname{ctg}(180° - x)$;
24. $\operatorname{tg}(270° + x)$;
25. $\operatorname{ctg}(360° + x)$.

Задание 7.2

Упростить выражение:

1. $\sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ + x) + \operatorname{tg}(270^\circ + x) + \operatorname{ctg}(360^\circ + x)$;
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$;
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$;
4. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x)}$;
5. $\sin(\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\operatorname{ctg}(\pi - x)$;
7. $\dfrac{\cos(-x)\cos(180^\circ + x)}{\sin(-x)\sin(90^\circ + x)}$;
8. $\dfrac{\sin(-x)\operatorname{ctg}(-x)}{\cos(360^\circ - x)\operatorname{tg}(180^\circ + x)}$;
9. $\dfrac{\sin(\pi + x)\cos(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\cos(x - \pi)}$;
10. $\dfrac{\sin(\pi + x)\sin(2\pi + x)}{\operatorname{tg}(\pi + x)\cos(1{,}5\pi + x)}$;
11. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$;
12. $\dfrac{\sin(\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi + x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(-x)}$;
13. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}(\pi - x)$;
14. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}(\pi + x)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$;
15. $\sin^2(\pi - x)\operatorname{tg}^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$;
16. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\operatorname{ctg}^2(\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$;
17. $\dfrac{\cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin(2\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$;
18. $\dfrac{\sin^2(\pi - x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin(\pi - x)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - x)$;
19. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi + x)\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)}{\cos(\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$;
20. $\dfrac{\sin(2\pi + x)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\sin(-\pi - x)}$.

Задание 7.3

Упростить выражение:

1. $\dfrac{\cos(180^\circ + x)\cos(-x)}{\sin(-x)\sin(90^\circ + x)}$;
2. $\dfrac{\sin(\pi - x)\cos(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\cos(\pi - x)}$;

3. $\dfrac{\sin(-x)\,\mathrm{ctg}\,(-x)}{\cos(360^\circ - x)\,\mathrm{tg}\,(180^\circ + x)}$;

4. $\dfrac{\sin(\pi + x)\sin(2\pi + x)}{\mathrm{tg}\,(\pi + x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$.

► Пример к заданию 7.4:

Упростить выражение:

$$\cos^2(90^\circ + x) + \sin^2(270^\circ + x).$$

Решение:

Обратим внимание, что когда у нас тригонометрическая функция возводится в квадрат, то неважно какого знака получается результат применения формулы приведения, так как после возведения в квадрат знак все равно пропадает, даже если он был.

Тогда:

1. По формулам приведения $\cos^2(90^\circ + x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$.
2. По формулам приведения $\sin^2(270^\circ + x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.
3. Подставим полученные результаты в начальное выражение и преобразуем его, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2(90^\circ + x) + \sin^2(270^\circ + x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 7.4

Упростить выражение:

1. $\sin^2(180^\circ - x) + \sin^2(270^\circ - x)$;
2. $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$;
3. $\sin(\pi - x)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - x)$;
4. $\sin(\pi + x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi + x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

Задание 7.5

Докажите тождество:

1. $\dfrac{\mathrm{tg}\,(\pi - x)}{\cos(\pi + x)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)} = \mathrm{tg}^2 x$;
2. $\dfrac{\sin(\pi - x)}{\mathrm{tg}(\pi + x)} \cdot \dfrac{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - x)}{\sin(-x)} = \sin x$;

3. $$\frac{\cos^2(\pi - x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x)\cos(2\pi - x)}{\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \cos^2 x;$$

4. $$\frac{\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi - x)}{\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = \cos x.$$

профиматика

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

90+
Набрал каждый 3-ий наш ученик

98%
Выпускников студенты топовых вузов

7500+
Учеников прошли наши годовые курсы

6 лет
Опыта подготовки к экзаменам

Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ

Игорь Уколов

отец Профиматики

- Выпускник мехмата МГУ
- Лично подготовил 30+ стобалльников
- 3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый

Влад Вуль

отец корги и не только

- Диплом факультета прикладной математики МГОУ
- Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU
- 8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.

Антон Гурко

преподаватель математики

- Выпускник ВМК МГУ
- Учитель высшей категории со стажем более 10 лет
- Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

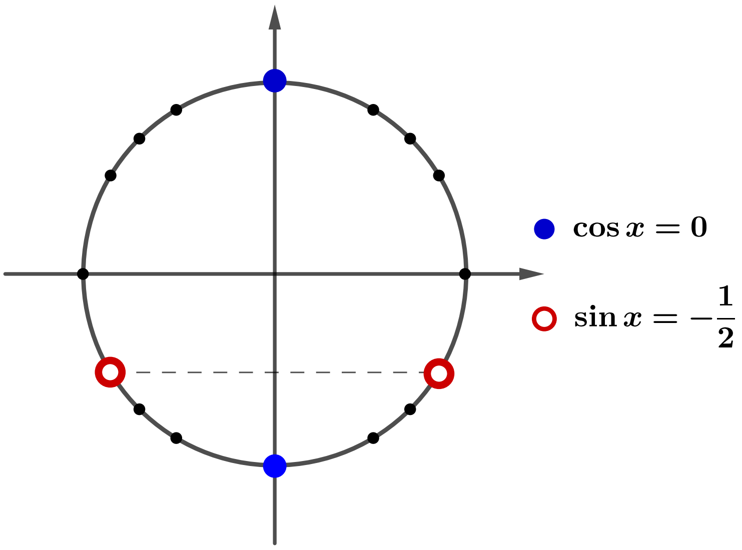
8. Тригонометрические уравнения. Уровень 2

▶ **Примеры к заданию 8.1:**

1. Решите уравнение $2\cos x(2\sin x+1)=0$.

   Решение:
   Мы знаем, что произведение множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует, то есть получаем следующее:

$$2\cos x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x=0, \\ 2\sin x+1=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sin x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n. \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$$



$\Longrightarrow$ **Решение**

2. Решите уравнение $\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

   Решение:
   Мы знаем, что произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует, то есть получаем следующее:

$$\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\dfrac{1}{2}=0, \\ \sin x-\dfrac{1}{2}=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ:

1. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \;\; n \in \mathbb{Z};$
2. $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \;\; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \;\; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \;\; n \in \mathbb{Z}.$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 8.1

Решите уравнение:

1. $\sin t(2\cos t + 1) = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $(\sin t - 1)(\cos t + 1) = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $\cos t(2\sin t + 1) = 0;$
4. $(2\sin t - \sqrt{2})(2\cos t + 1) = 0.$

► **Пример к заданию 8.2:**

1. Решите уравнение $\sqrt{1-\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Решение:
   Из основного тригонометрического тождества: $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Как мы знаем из свойств квадратных корней: $\sqrt{x^2} = |x|$. Тогда:

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|.$$

   Наше уравнение принимает вид:

$$|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зададимся вопросом: «У каких чисел модуль равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?»

Таких чисел два. Это $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значит:

$$|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. Решите уравнение $|\cos x| = 1$.

   Решение:
   Зададимся вопросом: "У каких чисел модуль равен 1?"
   Таких чисел два. Это 1 и -1. Значит:

$$|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 + 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi k. \end{array}\right.$$

   Две полученных в решении серии можно объединить в одну $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Допустимы обе формы записи ответа, но обычно используют более короткий вариант $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

1. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2. $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 8.2

Решите уравнения:

1. $|\cos x| = \dfrac{1}{2}$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sqrt{1-\cos^2 x} = 0{,}5$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $|\sin x| = 1$;

4. $\sqrt{1-\sin^2 x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

▶ Пример к заданию 8.3

Решите уравнение

$$\sin(\pi - t) = \frac{1}{2}.$$

Решение:

Первый способ решения.

Воспользуемся формулой приведения, чтобы упростить вид нашего уравнения

$$\sin(\pi - t) = \sin t.$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ t = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Второй способ решения.

Сделаем замену. Пусть $(\pi - t) = x$, тогда $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вернёмся к исходной переменной.

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi - t = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \pi - t = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pi - \dfrac{\pi}{6} - 2\pi k, \\ t = \pi - \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi k, \\ t = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ t = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 8.3

Решите уравнение:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 1;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\cos(t - \pi) = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 1;$

4. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{2}.$

▶ Примеры к заданию 8.4

1. Решите уравнение $2\sin^2 t + \sin t = 0$.

   Решение:
   Сделаем замену переменной $\sin t = x \Rightarrow 2x^2 + x = 0$

   Найдём корни уравнения:

$$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

   Вернёмся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin t = 0, \\ \sin t = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pi k, \\ t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. Решите уравнение $3 - 4\cos^2 t = 0$.

   Решение:
   Выразим $\cos^2 t$ и решим уравнение:

$$3 - 4\cos^2 t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

1. $\pi k, \ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z};$
2. $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

Задание 8.4

Решите уравнения:

1. $3 - 4\sin^2 t = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin^2 t - \sin t = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $4\sin^2 t - 1 = 0;$
4. $2\cos^2 t - \cos t = 0;$
5. $4\cos^2 t - 1 = 0;$
6. $2\cos^2 t + \cos t = 0.$

► Пример к заданию 8.5

Решите уравнение:

$$2\cos^2 t - 5\cos t + 2 = 0.$$

Решение:

Сделаем замену переменной $\cos t = x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$.
Найдём корни уравнения:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \cos t = \frac{1}{2}, \\ \cos t = 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ t = \varnothing, \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Задание 8.5

Решите уравнения:

1. $2\sin^2 t+3\sin t-2=0;$

   $\Longrightarrow$ **Решение**

2. $2\sin^2 t+\sin t-1=0;$
3. $4\cos^2 t+9\cos t+5=0.$

▶ Пример к заданию 8.6

Решите уравнение:

$$\sin^2 t+3\cos t-3=0.$$

Решение:

Для того чтобы свести это уравнение к квадратному относительно $\cos t$, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ и заменим $\sin^2 t$ на $1-\cos^2 t$:

$$\sin^2 t+3\cos t-3=0\Leftrightarrow 1-\cos^2 t+3\cos t-3=0.$$

Домножим обе части на -1:

$$1-\cos^2 t+3\cos t-3=0\Leftrightarrow \cos^2 t-3\cos t+2=0.$$

Сделаем замену переменной $\cos t=x\Rightarrow x^2-3x+2=0.$
Найдём корни уравнения:

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\cos t=1,\\ \cos t=2,\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\pi k,\\ \\ t=\varnothing,\end{array}\right.\Leftrightarrow t=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Задание 8.6

Решите уравнения:

1. $2\cos^2 t+\sin t+1=0;$

   $\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin^2 t+3\cos t-3=0.$

▶ Пример к заданию 8.7

Решите уравнение:

$$\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sqrt{3}.$$

Решение:

Используя формулы приведения, преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t - \sin t = -2\sin t.$$

Решим уравнение:

$$-2\sin t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ t = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 8.7

Решите уравнения:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi + t) = 1;$

   $\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin(\pi + t) + \sin(2\pi - t) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + 1{,}5 = 0;$

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(\pi + t) = \sqrt{2}.$

▶ Пример к заданию 8.8

Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0.$$

Решение:

Сделаем замену переменной $\dfrac{x}{2} = t$, тогда уравнение примет вид:

$$\operatorname{ctg} t = 0.$$

Решим это уравнения:

$$\operatorname{ctg} t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем обратную замену и решим исходное уравнение:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 8.8

Решите уравнения:

1. $\sin \frac{x}{2} = 1$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$;

3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

4. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

5. $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0$;

6. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

9. Различные варианты записи точек на тригонометрической окружности

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Различные варианты записи точек на тригонометрической окружности.**

▶ Пример к заданию 9.1

Дано множество точек $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

а) Какое значение принимает выражение $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ при:

$$1)\, n = 1; \quad 2)\, n = 0; \quad 3)\, n = -3.$$

б) Обозначьте данное множество точек на тригонометрической окружности.

Решение:

а) Подставим в уравнение, задающее множество точек,

$n = 1$:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{2\pi + 6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

$n = 0$:

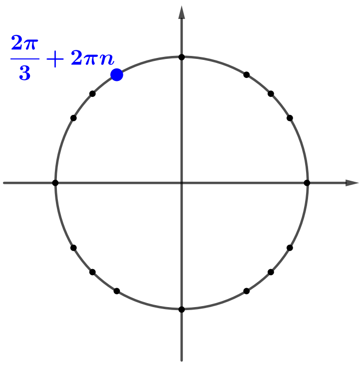
$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \frac{2\pi}{3},$$

$n = -3$:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot (-3) = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = \frac{2\pi - 18\pi}{3} = -\frac{16\pi}{3}.$$

Ответ:

а) $\dfrac{8\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{16\pi}{3}$;

б) 

.

Задание 9.1

1. Дано множество точек $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

   а) Какое значение принимает выражение $-\frac{\pi}{6}+\pi n$ при:

   $$1)\ n=1;\quad 2)\ n=0;\quad 3)\ n=-3.$$

   б) Обозначьте данное множество точек на тригонометрической окружности.

2. Дано множество точек $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

   а) Какое значение принимает выражение $\frac{\pi}{4}+\pi n$ при:

   $$1)\ n=1;\quad 2)\ n=0;\quad 3)\ n=-3.$$

   б) Обозначьте данное множество точек на тригонометрической окружности.

3. Дано множество точек $\frac{\pi k}{6},\ k\in\mathbb{Z}$.

   а) Какое значение принимает выражение $\frac{\pi k}{6}$ при:

   $$1)\ k=1;\quad 2)\ k=0;\quad 3)\ k=-3.$$

   б) Обозначьте данное множество точек на тригонометрической окружности.

4. Дано множество точек $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

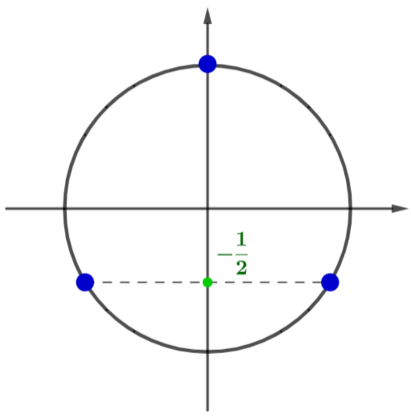
   а) Какое значение принимает выражение $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ при:

   $$1)\ k=1;\quad 2)\ k=0;\quad 3)\ k=-3.$$

   б) Обозначьте данное множество точек на тригонометрической окружности.

Задание 9.2

Выберите верные формы записи для множества точек представленного на тригонометрической окружности.



1. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$

2. $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

3. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \\ -\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$

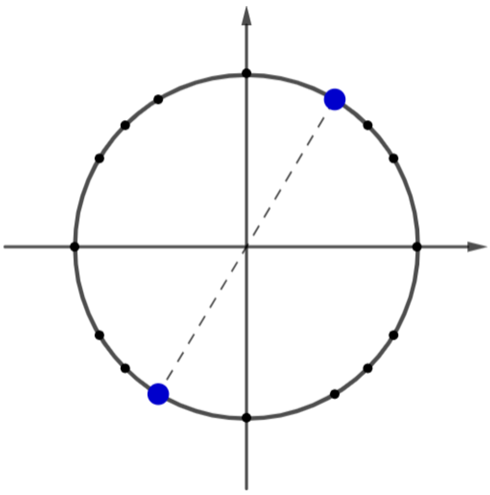
4. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n, \\ \dfrac{11\pi}{6}+2\pi n, \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$

5. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

6. $\left[\begin{array}{l} 2\pi n, \\ (-1)^n\cdot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi n, \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$

► **Примеры к задаче 9.3:**

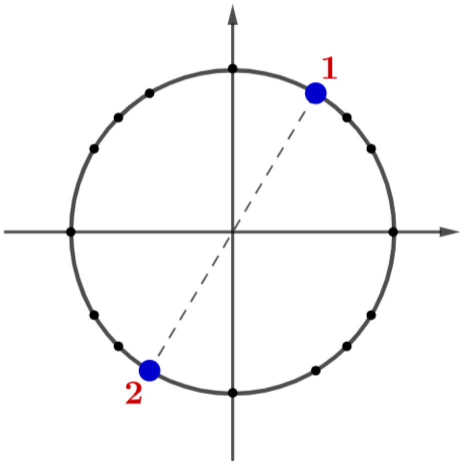
1. Задать одной или несколькими формулами множество точек, изображённых на тригонометрической окружности. Найти различные способы записи этих множеств, в том числе и объединяющие несколько точек на окружности. Отмеченные точки соответствуют табличным углам.



Решение:

Первый способ решения. (задаём формулой каждую точку)

1. Пронумеруем точки на окружности.



2. Точка 1 совпадает с точкой $\dfrac{\pi}{3}$ на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Поэтому множество точек 1 задается формулой $\dfrac{\pi}{3}+$ $+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

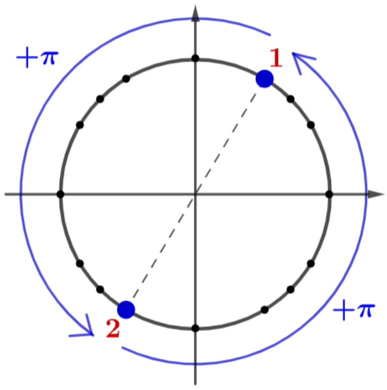
3. Перейдём к точке 2. На окружности она совпадает с точкой $-\dfrac{2\pi}{3}$. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Поэтому множество точек 2 задается формулой $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

4. Мы задали формулами и точку 1, и точку 2. Объединяя обе формулы в совокупность, запишем ответ:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\\[2ex] -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Второй способ решения. (Пытаемся записать как можно больше точек в одной серии)

1. Заметим, что при движении по окружности из точки 1 в точку 2 мы поворачиваемся на π. Из точки 2 в точку 1 нам тоже надо повернуть по окружности на π. (смотри рисунок). Это значит, что каждый раз прибавляя по π, мы будем получать либо точку 1, либо точку 2.



2. Точка 1 совпадает с точкой $\dfrac{\pi}{3}$ на окружности. Учитывая сказанное в первом пункте можем записать ответ:

$$\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

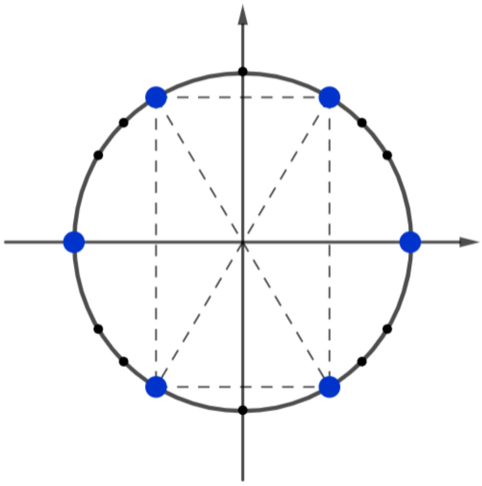
Замечание: мы могли стартовать из точки 2, которая совпадает с точкой $-\dfrac{2\pi}{3}$ на окружности. Тогда ответ будет выглядеть, как:

$$-\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Мы могли бы стартовать и из точки 2, если бы задали её как $\dfrac{4\pi}{3}$. Тогда ответ будет выглядеть, как:

$$\frac{4\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

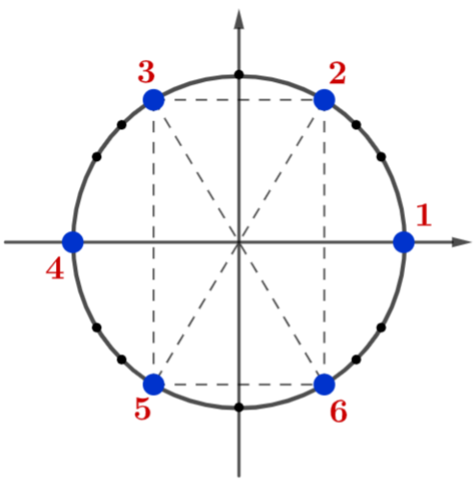
2. Задать одной или несколькими формулами множество точек, изображённых на тригонометрической окружности. Найти различные способы записи этих множеств, в том числе и объединяющие несколько точек на окружности. Отмеченные точки соответствуют табличным углам.



Решение:

Первый способ решения. (задаём своей формулой каждую точку)

1. Пронумеруем точки на окружности.



2. Точка 1 совпадает с точкой 0 на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Множество точек 1 задается формулой $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3. Точка 2 совпадает с точкой $\frac{\pi}{3}$ на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Следовательно, множество точек 2 задается формулой $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

4. Точка 3 совпадает с точкой $\frac{2\pi}{3}$ на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Следовательно, множество точек 3 задается формулой $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

5. Точка 4 совпадает с точкой π на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Следовательно, множество точек 4 задается формулой $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вместо π мы могли бы, например, взять $-\pi$.

6. Точка 5 совпадает с точкой $-\frac{2\pi}{3}$ на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Следовательно, множество точек 5 задается формулой $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вместо $-\frac{2\pi}{3}$ мы могли бы, например, взять $\frac{4\pi}{3}$.

7. Точка 6 совпадает с точкой $-\frac{\pi}{3}$ на окружности. Каждая такая точка получается из предыдущей поворотом на 2π. Следовательно, множество точек 6 задается формулой $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

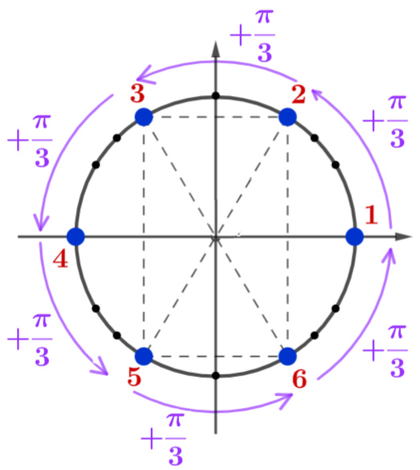
Вместо $-\frac{\pi}{3}$ мы могли бы, например, взять $\frac{5\pi}{3}$.

8. Мы задали формулами точки 1, 2, 3, 4, 5 и точку 6. Объединяя все формулы в совокупность, запишем ответ:

$$\left[\begin{aligned} &2\pi n, \\ &\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ &\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ &\pi + 2\pi n, \end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Второй способ решения. (Пытаемся записать как можно больше точек в одной серии)

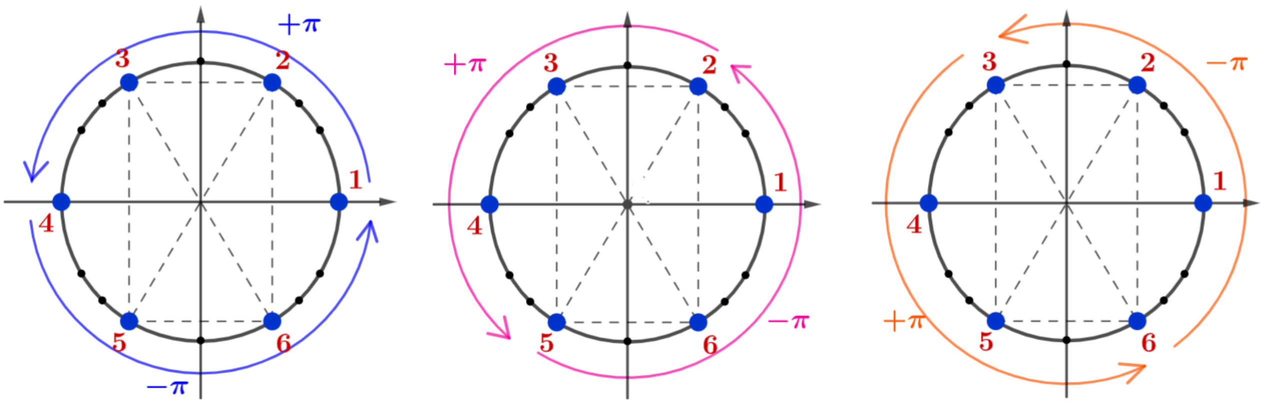
1. Заметим, что при движении по окружности из точки 1 в точку 2, из точки 2 в точку 3, из точки 3 в точку 4, из точки 4 в точку 5, из точки 5 в точку 6 и из точки 6 в точку 1 мы каждый раз осуществляем поворот на $\frac{\pi}{3}$ (смотри рисунок). Это значит, что каждый раз прибавляя по $\frac{\pi}{3}$, мы будем получать одну из наших 6 точек.



2. Точка 1 совпадает с точкой 0 на окружности. Учитывая сказанное в первом пункте, можем записать ответ:

$$0 + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi n}{3}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Третий способ решения. Можно также записать ответ 3 сериями, при помощи поворотов на πn пар точек 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 (смотри рисунки).

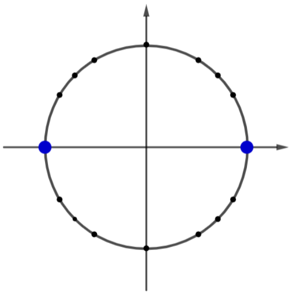


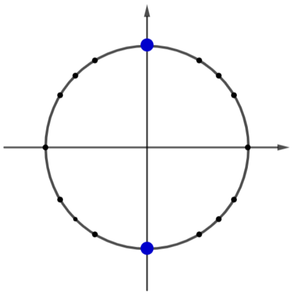
Объединяя все серии в совокупность, запишем ответ:

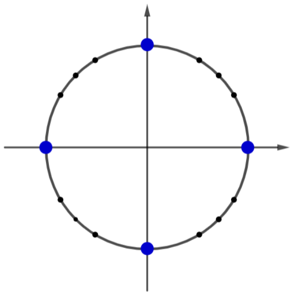
$$\left[\begin{array}{l} \pi n, \\ \dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ \dfrac{2\pi}{3} + \pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

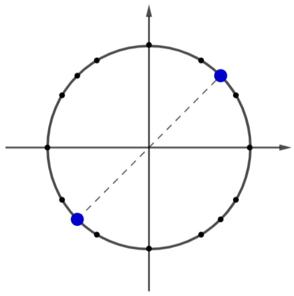
Задание 9.3

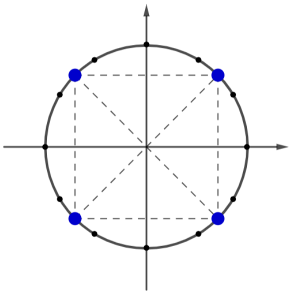
Задать одной или несколькими формулами множество точек, изображённых на тригонометрической окружности. Найти различные способы записи этих множеств, в том числе и объединяющие несколько точек на окружности. Отмеченные точки соответствуют табличным углам.

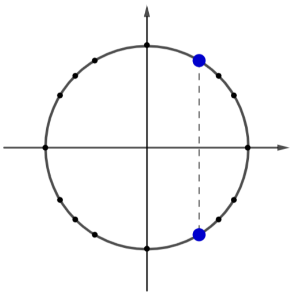
1.


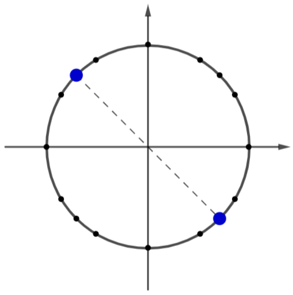
2.


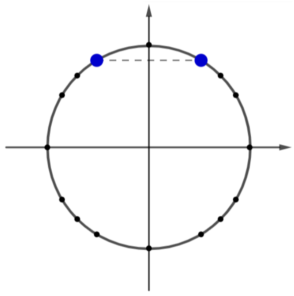
3.


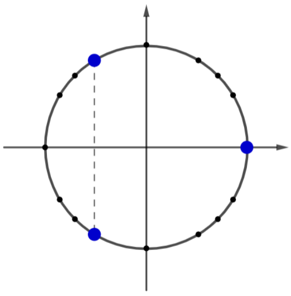
4.


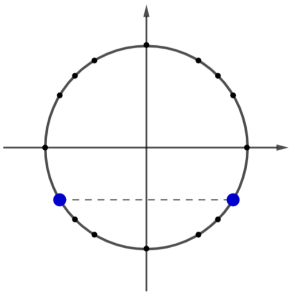
5.


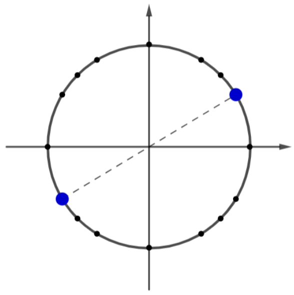
6.


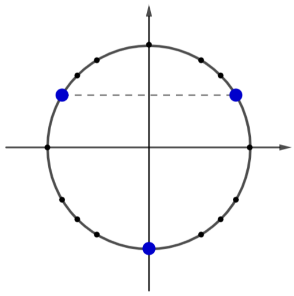
7.


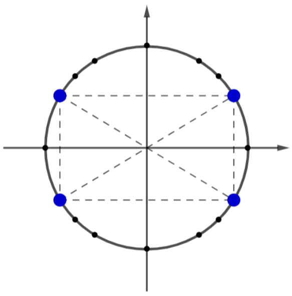
8.


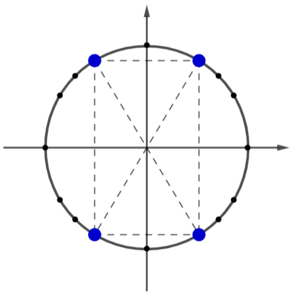
9.


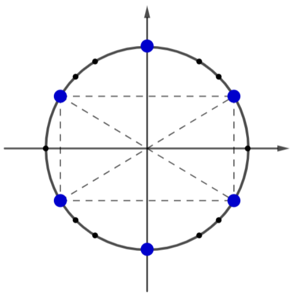
10.


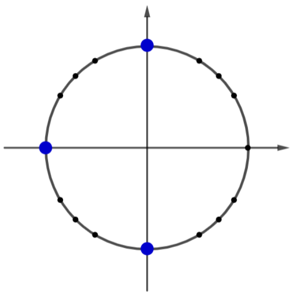
11.


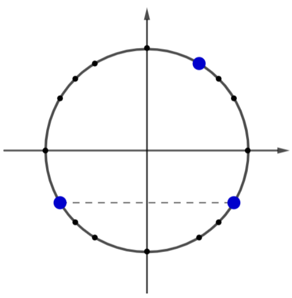
12.


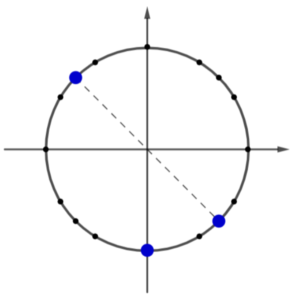
13.


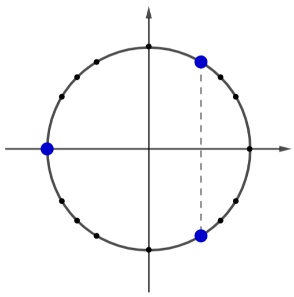
14.


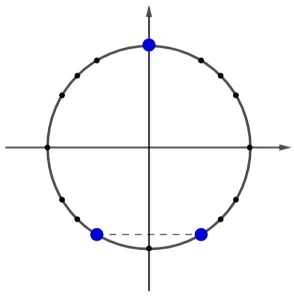
15.


16.


17.


18.


19.


20.


10. Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x; \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x; \quad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Формулы сложения и лайфхак для их запоминания.**

▶ Примеры к заданию 10.1:

1. Упростите выражение

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Решение:

Распишем $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ используя формулу для синуса суммы и подставим числовые значения $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Подставим полученное выражения для $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ в нашу задачу и упростим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.$$

2. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right).$$

Решение:

Распишем $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$, используя формулу для косинуса разницы, и подставим числовые значения $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\alpha\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

Подставим полученное выражения для $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$ в нашу задачу и упростим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

3. Упростите выражение

$$\sin\left(\alpha - 30^\circ\right).$$

Решение:

Распишем $\sin\left(\alpha - 30^\circ\right)$, используя формулу для синуса разности, и подставим числовые значения $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$:

$$\sin\left(\alpha - 30^\circ\right) = \sin\alpha\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

4. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\alpha - \beta\right) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos\left(\alpha - \beta\right)}.$$

Решение:

Распишем $\sin\left(\alpha - \beta\right)$ и $\cos\left(\alpha - \beta\right)$, воспользовавшись формулами разности:

$$\sin\left(\alpha - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\alpha - \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\left(\alpha + \beta\right)}{\cos\left(\alpha + \beta\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\alpha + \beta\right).$$

Ответ:

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha;$
2. $\dfrac{1}{2}\cos\alpha;$
3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha;$
4. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

Задание 10.1

Упростите выражения:

1. $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta;$
2. $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta);$
3. $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha.$
4. $\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta;$
5. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta);$
6. $\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha-\beta);$
7. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta).$
8. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\cos\alpha;$
9. $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right);$
10. $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha.$
11. $\sin(60^\circ-\beta);$
12. $\cos(\beta-30^\circ);$
13. $\cos(60^\circ-\alpha);$
14. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta};$
15. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right);$
16. $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right);$
17. $\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)};$
18. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)}.$

▶ Примеры к заданию 10.2

1. Докажите тождество:

$$\cos 2x\cos 12x-\sin 2x\sin 12x=\cos 14x.$$

Решение:

Свернём левую часть равенства, применив формулу косинуса суммы:

$$\cos 2x\cos 12x-\sin 2x\sin 12x=\cos(2x+12x)=\cos 14x.$$

2. Докажите тождество:

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\beta\cos\alpha.$$

Решение:

Распишем косинус суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin(-\alpha)\sin(-\beta).$$

Заметим, что, если вынести минусы из аргументов синусов, то получим:

$$\sin(-\alpha)\sin(-\beta) = (-\sin\alpha)(-\sin\beta) = \sin\alpha\sin\beta.$$

Подставим это в левую часть и докажем тождество:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta.$$

3. Докажите тождество:

$$\cos(\alpha-\beta) + \sin(-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta.$$

Решение:

Распишем косинус разности:

$$\cos(\alpha-\beta) + \sin(-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \sin(-\alpha)\sin\beta.$$

Заметим, что, если вынести минус из аргумента синуса, то получим:

$$\sin(-\alpha)\sin\beta = -\sin\alpha\sin\beta.$$

Подставим это в левую часть и докажем тождество:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \sin(-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta.$$

4. Докажите тождество:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Решение:

Распишем в левой части косинус суммы:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right).$$

Подставим значения для $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и раскроем скобки:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Задание 10.2

Докажите тождества:

1. $\sin 5x\cos 3x + \cos 5x\sin 3x = \sin 8x$;
2. $\cos 5x\cos 3x + \sin 5x\sin 3x = \cos 2x$;
3. $\sin 7x\cos 4x + \cos 7x\sin 4x = \sin 11x$;
4. $\sin 2x\sin 3x - \cos 2x\cos 3x = -\cos 5x$
5. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin\beta\cos\alpha$;

6. $\sin(30^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;
7. $\sin(\alpha - \beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$;
8. $\sin(30^\circ - \alpha) + \sin(30^\circ + \alpha) = \cos\alpha$;
9. $2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$;
10. $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$;
11. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\alpha + \sin\alpha$;
12. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\alpha - \sin\alpha$;
13. $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$;
14. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;
15. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;
16. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
17. $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

► Примеры к заданию 10.3

1. Вычислите:
$$\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ.$$

   Решение:

   Преобразуем выражение, использовав формулу синуса суммы:
$$\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ = \sin(63^\circ + 27^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$$

2. Вычислите:
$$\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}.$$

   Решение:

   Преобразуем выражение, использовав формулу синуса суммы:
$$\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20} = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Вычислите:

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}.$$

Решение:

Преобразуем выражение, использовав формулу косинуса суммы:

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Ответ:

1. 1;
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
3. $\frac{1}{2}$.

Задание 10.3

Вычислите:

1. $\sin 74^\circ\cos 16^\circ+\cos 74^\circ\sin 16^\circ$;
2. $\cos 23^\circ\cos 22^\circ-\sin 23^\circ\sin 22^\circ$;
3. $\sin 89^\circ\cos 1^\circ+\cos 89^\circ\sin 1^\circ$;
4. $\cos 178^\circ\cos 2^\circ-\sin 178^\circ\sin 2^\circ$;
5. $\cos 107^\circ\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\sin 17^\circ$;
6. $\cos 36^\circ\cos 24^\circ-\sin 36^\circ\sin 24^\circ$;
7. $\sin 62^\circ\sin 28^\circ-\cos 28^\circ\cos 62^\circ$;
8. $\sin 51^\circ\cos 21^\circ-\cos 51^\circ\sin 21^\circ$;
9. $\cos\frac{\pi}{20}\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}$;
10. $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}$;
11. $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}$;
12. $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;
13. $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$;
14. $\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;
15. $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}$;
16. $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$.

▶ Примеры к заданию 10.4

1. Докажите тождество:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}.$$

Решение:

Распишем в правой части $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+1\right):\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-1\right)=$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} : \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Пользуясь формулами косинусов разности и суммы преобразуем числитель и знаменатель:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

2. Докажите тождество:

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta.$$

Решение:

Распишем множители левой части по формулам косинусов разности и суммы аргументов:

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Можно заметить, что произведение скобок представляет собой формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. В нашем случае

$$a = \cos\alpha\cos\beta,\ b = \sin\alpha\sin\beta.$$

Тогда

$$(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:
$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta +$
$+\cos^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta.$

3. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Решение:

Распишем в левой части $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ и приведём к общему знаменателю:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Заметим, что выражение в числителе есть ничто иное, как синус суммы:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Задание 10.4

Докажите тождества:

1. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$;
2. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

3. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha;$

4. $\dfrac{\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha;$

5. $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$

6. $\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$

7. $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$

8. $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$

9. $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

► **Пример к заданию 10.5:**

Зная, что $\sin t = -\dfrac{4}{5}$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$, вычислите:

1. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+t\right);$
2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right);$
3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right);$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+t\right).$

Решение:

Нам известно значение $\sin t = -\dfrac{4}{5}$, а так же то, что $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$.

Найдём $\cos t$. По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{9}{25}.$$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$, то $\cos t > 0$. Отсюда:

$$\cos t = \frac{3}{5}.$$

1. Распишем наше выражение через формулу синуса суммы:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+t\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos t + \sin t\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

2. Распишем наше выражение через формулы косинуса суммы или приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos t-\sin\frac{\pi}{2}\sin t=0-1\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

3. Распишем наше выражение через формулы синуса суммы или приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos t+\sin t\cos\frac{\pi}{2}=1\cdot\frac{3}{5}-0=\frac{3}{5}.$$

4. Распишем наше выражение через формулу косинуса суммы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos t-\sin\frac{\pi}{3}\sin t=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

Ответ:

1. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$;
2. $\frac{4}{5}$;
3. $\frac{3}{5}$;
4. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

Задание 10.5

Зная, что $\sin t=\frac{3}{5}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, вычислите:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$;
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$;
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$.

Задание 10.6

Зная, что $\cos t=-\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, вычислите:

1. $\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$;
2. $\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$;
3. $\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$;
4. $\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Задание 10.7

Зная, что $\sin t=\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, вычислите:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)$;
2. $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.

Задание 10.8

Зная, что $\sin t=-\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$, вычислите:

1. $\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$;
2. $\cos\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$.

▶ Пример к заданию 10.9:

Зная, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения:

1. $\sin(\alpha+\beta)$;
2. $\cos(\alpha+\beta)$.

Решение:

Найдём сначала $\sin\alpha$ и $\sin\beta$:

Так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, то $\sin\alpha<0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\frac{9}{25}=1\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Так как $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\beta>0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1\Leftrightarrow\sin^2\beta+\frac{1}{4}=1\Rightarrow\sin^2\beta=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Распишем наше выражение через формулу синуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}.$$

2. Распишем наше выражение через формулу косинуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

Задание 10.9

Зная, что $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, найдите значения выражений:

1. $\sin(\alpha+\beta)$;
2. $\cos(\alpha+\beta)$.

Задание 10.10

Зная, что $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, найдите значения выражений:

1. $\sin(\alpha+\beta)$;
2. $\cos(\alpha+\beta)$.

Задание 10.11

Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите значения выражений:

1. $\sin(\alpha - \beta)$;
2. $\cos(\alpha - \beta)$.

Задание 10.12

Зная, что $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = -\frac{40}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, найдите значения выражений:

1. $\sin(\alpha + \beta)$;
2. $\cos(\alpha + \beta)$.

Задание 10.13

Зная, что $\sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -0{,}8$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, найдите значения выражений:

1. $\sin(\alpha - \beta)$;
2. $\cos(\alpha - \beta)$.

▶ **Примеры к заданию 10.14:**

1. Вычислить: $\sin 105°$.

   Решение:

   Представим $105°$ как сумму $45° + 60°$, тогда мы можем расписать синус суммы:

   $$\sin(45° + 60°) = \sin 45° \cos 60° + \cos 45° \sin 60°.$$

   Подставим значения синуса и косинуса $45°$ и $60°$, получим:

   $$\sin(45° + 60°) = \sin 45° \cos 60° + \cos 45° \sin 60° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

2. Вычислить: $\cos 135°$.

   Решение:

   Представим $135°$ как сумму $45° + 90°$, тогда мы можем расписать косинус суммы:

   $$\cos(45° + 90°) = \cos 45° \cos 90° - \sin 45° \sin 90°.$$

   Подставим значения синуса и косинуса $45°$ и $90°$, получим:

   $$\cos(45° + 90°) = \cos 45° \cos 90° - \sin 45° \sin 90° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Или мы можем воспользоваться формулой приведения:

   $$\cos 135° = \cos(45° + 90°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ:

1. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;
2. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задание 10.14

Вычислить:

1. $\sin 75°$;
2. $\cos 75°$;
3. $\sin 105°$;
4. $\cos 105°$.

Задание 10.15

Вычислить:

1. $\sin 15°$;
2. $\cos 15°$;
3. $\sin 15° \cos 15°$;
4. $\cos^2 15° - \sin^2 15°$.

► Пример к заданию 10.16:

Вычислить $\sin 67° \cos 37° - \sin 23° \cos 53°$.

Решение:

В выражении много различных углов, следовательно, для решения этой задачи нам стоит поискать связи между ними.
Заметим, что:

$$37° = 90° - 53°,$$
$$23° = 90° - 67°.$$

Тогда, используя формулы приведения

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

и

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$

получаем:

$$\cos 37° = \cos(90° - 53°) = \sin 53°,$$
$$\sin 23° = \sin(90° - 67°) = \cos 67°.$$

Теперь наше выражение можно переписать в следующем виде:

$$\sin 67° \cos 37° - \sin 23° \cos 53° = \sin 67° \sin 53° - \cos 67° \cos 53° = -(\cos 67° \cos 53° - \sin 67° \sin 53°).$$

Применяя к выражению в скобках формулу косинуса суммы, получаем:

$$-(\cos 67° \cos 53° - \sin 67° \sin 53°) = -\cos(67° + 53°) = -\cos 120° = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Задание 10.16

Вычислить:

1. $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ$;
2. $\cos 125^\circ \cos 5^\circ + \sin 55^\circ \cos 85^\circ$.

▶ Пример к заданию 10.17

Вычислить

$$\frac{\cos 173^\circ \cos 63^\circ + \sin 173^\circ \cos 27^\circ}{\sin 203^\circ \cos 3^\circ + \cos 203^\circ \sin 183^\circ}.$$

Решение:

В выражении много различных углов, следовательно, для решения этой задачи нам стоит поискать связи между ними.

Заметим, что:

$$63^\circ = 90^\circ - 27^\circ,$$
$$183^\circ = 180^\circ + 3^\circ.$$

Тогда, используя формулы приведения

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

и

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

получаем:

$$\cos 63^\circ = \cos(90^\circ - 27^\circ) = \sin 27^\circ,$$
$$\sin 183^\circ = \sin(180^\circ + 3^\circ) = -\sin 3^\circ.$$

Теперь наше выражение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\cos 173^\circ \cos 63^\circ + \sin 173^\circ \cos 27^\circ}{\sin 203^\circ \cos 3^\circ + \cos 203^\circ \sin 183^\circ} = \frac{\cos 173^\circ \sin 27^\circ + \sin 173^\circ \cos 27^\circ}{\sin 203^\circ \cos 3^\circ - \cos 203^\circ \sin 3^\circ}.$$

Применяя к числителю формулу синуса суммы, а к знаменателю формулу синуса разности мы получаем:

$$\frac{\cos 173^\circ \sin 27^\circ + \sin 173^\circ \cos 27^\circ}{\sin 203^\circ \cos 3^\circ - \cos 203^\circ \sin 3^\circ} = \frac{\sin(173^\circ + 27^\circ)}{\sin(203^\circ - 3^\circ)} = \frac{\sin 200^\circ}{\sin 200^\circ} = 1.$$

Задание 10.17

Вычислить:

1. $\dfrac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cos 85^\circ}{\sin 185^\circ \cos 5^\circ - \cos 185^\circ \sin 185^\circ}$;
2. $\dfrac{\sin 75^\circ \cos 5^\circ - \cos 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 365^\circ}$.

Задание 10.18

Представив $2x$ в виде $x + x$, докажите тождество:

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

11. Формулы двойного угла

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}; \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}.$$

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Формулы синуса и косинуса двойного угла.**

▶ **Пример к заданию 11.1:**

1. Вычислите $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

   Решение:
   По формуле синуса двойного угла:

$$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Вычислите $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4}$.

   Решение:

   Для начала попробуем понять, что нам делать с выражением $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$. Анализируя решение предыдущего примера, мы понимаем, что

$$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

   Тогда

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} + \frac{3}{4} = \frac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{3}{4} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{2} + \frac{3}{4} = \frac{\dfrac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

3. Вычислите $\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

   Решение:
   Раскроем скобки по формуле квадрата разности $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ и применим формулы синус двойного угла $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ и основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

   $$\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=\cos^2\frac{\pi}{8}-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$$
   $$=1-\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=1-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Вычислите $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

   Решение:
   По формуле тангенса двойного угла:

   $$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Задание 11.1

Вычислите:

1. $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;
2. $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$;
3. $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;
4. $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;
5. $2\cos^2 75^\circ-1$;
6. $1-2\sin^2\frac{7\pi}{12}$;
7. $1-2\cos^2\frac{5\pi}{8}$;
8. $2\sin^2 165^\circ-1$;
9. $4\sin 75^\circ\cos 75^\circ$;
10. $(\cos 75^\circ-\sin 75^\circ)^2$;
11. $(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)^2$;
12. $\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$;
13. $\left(\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2$;
14. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$;
15. $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$;
16. $\frac{1}{2}\sin 105^\circ\cos 105^\circ$;
17. $\dfrac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$;
18. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$;
19. $\dfrac{\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$;
20. $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-1}$.

▶ Пример к заданию 11.2:

1. Упростите выражение $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$.

   Решение:

   Распишем в числителе косинус двойного угла по формуле $\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1$:
   $$\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = \frac{1+2\cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = 2\cos x.$$

2. Упростите выражение $\dfrac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$.

   Решение:

   Распишем в числителе синус двойного угла по формуле $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$:
   $$\frac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}{2\cos 50^\circ} = \sin 50^\circ.$$

   Ответ:

   1. $2\cos x$;
   2. $\sin 50^\circ$.

Задание 11.2

Упростите выражения:

1. $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;
2. $\dfrac{2\sin^2 x}{\sin 2x}$;
3. $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x}$;
4. $\cos^2 x - \cos 2x$;
5. $\sin 2x + (\sin x - \cos x)^2$;
6. $\sin 2x \operatorname{ctg} x - 1$;
7. $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} - \sin x$;
8. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\sin 2x$;
9. $\dfrac{\cos 2x - \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$;
10. $\dfrac{\cos 2x - \sin 2x}{\cos 4x}$;
11. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \sin x$;
12. $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$;
13. $\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$;
14. $\dfrac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$;
15. $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$;
16. $\dfrac{\cos 10^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} + \sin 5^\circ$;
17. $\dfrac{\sin 6x}{\cos^2 3x}$;
18. $\dfrac{\sin 4x}{\cos 2x}$;
19. $(\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)$;
20. $\dfrac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}$;

21. $\dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}$;
22. $2\sin\dfrac{\pi+x}{2}\cos\dfrac{\pi+x}{2}$;
23. $\cos^2\dfrac{\pi+x}{4}-\sin^2\dfrac{\pi+x}{4}$;
24. $\dfrac{2}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$;
25. $\dfrac{2}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}$.

► **Пример к заданию 11.3:**

1. Докажите тождество $\sin 2x\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$.

   Решение:

   Распишем $\sin 4x$ по формуле синуса двойного угла:

   $$\frac{1}{2}\sin 4x=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x\cos 2x=\sin 2x\cos 2x.$$

2. Докажите тождество $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.

   Решение:

   Распишем в левой части $\cos^4 x-\sin^4 x$, как разность квадратов и применим формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество:

   $$\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=1\cdot\cos 2x=\cos 2x.$$

3. Докажите тождество $\sin x\cos^3 x-\cos x\sin^3 x=\dfrac{1}{4}\sin 4x$.

   Решение:

   Домножим каждую из частей тождества на 4:

   $$4\sin x\cos^3 x-4\cos x\sin^3 x=\sin 4x$$

   Вынесем общий множитель в левой части и воспользуемся формулой синуса и косинуса двойного угла:

   $$4\sin x\cos^3 x-4\cos x\sin^3 x=2\cdot 2\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x.$$

4. Докажите тождество $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)$.

   Решение:

   Сделаем замену $\alpha+\beta=x$, получим формулу косинуса двойного угла:

   $$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

   Тогда, очевидно, что тождество верно.

Задание 11.3

Докажите тождества:

1. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x;$
2. $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x;$
3. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x;$
4. $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x;$
5. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x;$
6. $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2};$
7. $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x;$
8. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$
9. $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \operatorname{ctg} x \cos 2x;$
10. $\sin 2x - \operatorname{tg} x = \cos 2x \operatorname{tg} x;$
11. $(1 + \cos 2x)\operatorname{tg} x = \sin 2x;$
12. $\dfrac{\cos 2x}{\sin x\cos x + \sin^2 x} = \operatorname{ctg} x - 1;$
13. $\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right)\sin 2x = 4\sin x;$
14. $\dfrac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \operatorname{ctg} x;$
15. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\operatorname{ctg} x;$
16. $(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)\sin 2x = 2\cos 2x;$
17. $\dfrac{\sin 2x - 2\cos x}{\sin x - \sin^2 x} = -2\operatorname{ctg} x;$
18. $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)\sin 2x = 4\cos x;$
19. $\sin(2\alpha + 2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta);$
20. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2;$
21. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$

▶ Пример к заданию 11.4:

Известно, что $\sin x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$ Найдите:

1. $\sin 2x;$
2. $\cos 2x.$

Решение:

Найдём сначала $\cos x$, при $180° < x < 270°$ оказывается, что $\cos x < 0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}.$$

1. Распишем наше выражение по формуле синуса двойного угла:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 5} = \frac{24}{25}.$$

2. Распишем наше выражение по одной из трёх формул косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Ответ:

1. $\dfrac{24}{25}$;
2. $-\dfrac{7}{25}$.

Задание 11.4

1. Известно, что $\sin x = \dfrac{4}{5}$, $0^\circ < x < 90^\circ$ Найдите:

1. $\sin 2x$;
2. $\cos 2x$.

2. Известно, что $\operatorname{tg} x = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ Найдите:

1. $\sin 2x$;
2. $\cos 2x$.

3. Известно, что $\sin x = \dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Найдите:

1. $\sin 2x$;
2. $\cos 2x$;
3. $\operatorname{tg} 2x$;
4. $\operatorname{ctg} 2x$.

4. Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Найдите:

1. $\sin 2x$;
2. $\cos 2x$;
3. $\operatorname{tg} 2x$;
4. $\operatorname{ctg} 2x$.

▶ Примеры к заданию 11.5:

1. Вычислить $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

   Решение:
   Запишем формулу косинуса двойного угла через синус $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, подставляя $\dfrac{\pi}{12}$; вместо x получим соотношение, из которого мы найдём $\sin \dfrac{\pi}{12}$:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2}.$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

   Заметим, что $\dfrac{\pi}{12} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, значит $\sin \dfrac{\pi}{12} > 0$.

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

2. Вычислить $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Решение:
Запишем формулу косинуса двойного угла через косинус $\cos 2x = \cos^2 x - 1$, подставляя $\dfrac{\pi}{12}$; вместо x получим соотношение, из которого мы найдём $\cos\dfrac{\pi}{12}$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)+1}{2}.$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)+1}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

Заметим, что $\dfrac{\pi}{12} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, значит $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$$

Ответ:

1. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;
2. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Задание 11.5

Вычислить:

1. $\sin\dfrac{\pi}{8}$;
2. $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

12. Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

Для решения задач этого раздела Вам может быть полезно следующее видео:

$\Longrightarrow$ **Формулы понижения степени.**

▶ Примеры к заданию 12.1

1. Докажите тождество $2\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$.

   Решение:
   Воспользуемся формулой понижения степени:
   $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}.$$
   Тогда
   $$2\cdot\frac{1-\cos x}{2} + \cos x = 1 - \cos x + \cos x = 1.$$

2. Докажите тождество $2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{x}{2}\right) = 1 - \sin x$.

   Решение:
   Воспользуемся формулой для понижения степени для sin:
   $$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = \frac{1-\sin x}{2}.$$
   Тогда
   $$2\cdot\frac{1-\sin x}{2} = 1 - \sin x.$$

Задание 12.1

Докажите тождества:

1. $\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2}$;
2. $2\sin^2 2x = 1 + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4x\right)$;
3. $2\cos^2 x - \cos 2x = 1$;
4. $1 + \sin x = 2\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{x}{2}\right)$;

5. $2\sin^2(45^\circ - x) + \sin 2x = 1;$
6. $2\cos^2(45^\circ + x) + \sin 2x = 1.$

► Пример к заданию 12.2:

Вычислить (с помощью формул понижения степени):

$$\cos\frac{\pi}{12}.$$

Решение:

По формуле понижение степени:

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)+1}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

Заметим, что $\frac{\pi}{12} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, значит $\cos\frac{\pi}{12} > 0$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Задание 12.2

Вычислить (с помощью формул понижения степени):

1. $\sin 22{,}5^\circ;$
2. $\cos 22{,}5^\circ;$
3. $\sin\frac{3\pi}{8};$
4. $\cos\frac{3\pi}{8}.$

13. Уравнения. Разное

$\Longrightarrow$ **Примеры решения уравнений.**

▶ Пример к заданию 13.1

Решите уравнение

$$\sin 2x - \sin x = 0.$$

Решение:
Воспользуемся формулой двойного угла: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0.$$

Вынесем $\sin x$ за скобку:

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно 0, когда один из них равен 0, а другой при этом существует:

$$\left[\begin{aligned}&\sin x = 0,\\&2\cos x - 1 = 0,\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x = \pi k,\\&\cos x = \frac{1}{2},\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x = \pi k,\\&x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\end{aligned}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k,\ \ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 13.1

Решите уравнения:

1. $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin 2x + \sqrt{5}\cos x = 0$;

3. $\sin 2x + \sin x = 0$;

4. $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$.

▶ Пример к заданию 13.2

Решите уравнение

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x.$$

Решение:

Для решения данного уравнения следует раскрыть $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и воспользоваться методом группировки:
$\cos^2 x - \sin x\cos x + \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) - \sin x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - {}$ ${}- \sin x)(\cos x + 1) = 0$. Произведение двух множителей равно 0, когда один из них равен 0, а другой при этом существует:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 0, \mid\ : \cos x \neq 0\\ \cos x = -1,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}1 - \operatorname{tg} x = 0,\\ x = \pi + 2\pi k,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ x = \pi + 2\pi k,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\\ x = \pi + 2\pi k,\end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 13.2

Решите уравнения:

1. $\sin 2x - 2\cos x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 0$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3}$;

3. $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x - \sin x = \cos x$;

4. $\sqrt{12}\sin^2 x + \sin 2x = \sqrt{12}\cos^2 x + 3\sin 2x$.

▶ Пример к заданию 13.3:

Решите уравнение:

$$\cos^2 x - \sin x = \cos 2x.$$

Решение:

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Тогда

$$\cos^2 x - \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \ \Rightarrow\ \sin^2 x - \sin x = 0 \ \Rightarrow\ \sin x(\sin x - 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно 0, когда один из них равен 0, а другой при этом существует:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x - 1 = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ \sin x = 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Задание 13.3

Решите уравнения:

1. $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0;$
3. $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0;$
4. $3\cos 2x + 11\sin x = 7.$

▶ Пример к заданию 13.4:

Решите уравнение:

$$2\sin^3 x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = -\sqrt{2}.$$

Решение:

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Тогда:

$$2\sin^3 x - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x + \sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin^3 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = 0.$$

Пусть $t = \sin x$:

$$2t^3 + 2\sqrt{2}t^2 + t = 0 \;\Rightarrow\; t(2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \;\Rightarrow\; t(\sqrt{2}t + 1)^2 = 0.$$

Произведение двух множителей равно 0, когда один из них равен 0, а другой при этом существует:

$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ (\sqrt{2}t + 1)^2 = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k,\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{7\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 13.4

Решите уравнения:

1. $2\cos 2x-6\cos^3 x+\cos x+3=0;$

   $\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\cos 2x+4\sin^2 x-3\sqrt{2}\cos x-5=0;$
3. $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos^2 x+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x-\dfrac{\cos 2x}{2\sqrt{2}}=0;$
4. $\cos^3 x+2\cos^2 x-\cos x-1=\cos 2x$

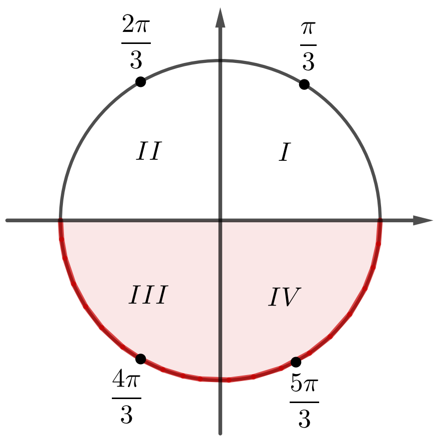
▶ Пример к заданию 13.5:

Найдите все решения уравнения: $\cos 2x+\sin^2 x=0{,}25$, удовлетворяющие условию $\sin x<0$.

Решение:
Воспользуемся формулой двойного угла: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.
Тогда:

$$\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x=0{,}25\ \Rightarrow\ \cos^2 x=0{,}25\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x=-\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Нам нужны корни, удовлетворяющие условию $\sin x<0$. Это будут все корни из III и IV четвертей. Изобразим это:



Ответ: $\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

Задание 13.5

1. Найдите все решения уравнения:

$$\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0, \text{ удовлетворяющие условию } \sin x < 0.$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. Найдите все решения уравнения:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin x = 1, \text{ удовлетворяющие условию } \cos x > 0.$$

3. Найдите все решения уравнения:

$$\cos 2x - 3\cos x + 1 = 0, \text{ удовлетворяющие условию } \sin x < 0.$$

4. Найдите все решения уравнения:

$$\cos 2x + 4\sin x = 1, \text{ удовлетворяющие условию } \cos x > 0.$$

► Пример к заданию 13.6:

Найдите все решения уравнения:

$$\cos^2(x+\pi) + 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0.$$

Решение:

Упростим равенство, применив формулы приведения:

$$\cos^2(x+\pi) + 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0.$$

Упростим равенство, свернув в левой части полный квадрат:

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)^2 = 0.$$

Мы знаем, что если квадрат числа равен нулю, то это число равно нулю. Тогда:

$$(\cos x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x + 1 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13.6

Решите уравнения:

1. $2\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin x=0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $2\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+2=0;$

4. $5-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=2\cos^2(\pi-x).$

▶ Пример к заданию 13.7:

Решите уравнение:

$$6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x=3.$$

Решение:

Заметим, что

$$\cos\frac{15\pi}{4}=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Выразим $\cos x$ через формулу половинного угла:

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\ \Rightarrow\ \cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1.$$

Получим следующее уравнение:

$$6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-3=0\ \Rightarrow\ 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}-2=0.$$

Сделаем замену переменной $\cos\dfrac{x}{2}=y,\ y\in[-1;1]$:

$$3\sqrt{2}y-2y^2-2=0\Rightarrow 2y^2-3\sqrt{2}y+2=0;$$

$$D=(-3\sqrt{2})^2-4\cdot2\cdot2=18-16=2;$$

$$y_1=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1;1];\quad y_2=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\cdot2}=\sqrt{2}\notin[-1;1].$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \left[\begin{aligned}\frac{x}{2}&=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\\ \frac{x}{2}&=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\end{aligned}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{aligned}x&=\frac{\pi}{2}+4\pi k,\\ x&=-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\end{aligned}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{2}+4\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$

Задание 13.7

Решите уравнения:

1. $2\sin^2(\pi+3x)+\cos 3x+1=0$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\cos x+3\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}=4$;

3. $2\sin^2(\pi-3x)+5\cos 3x+1=0$;

4. $\cos 2x+3\sqrt{3}\cos x+1=0$.

▶ Пример к заданию 13.8:

Решите уравнение:

$$\cos 4x-2\cos^2 x+1=0.$$

Решение:

Преобразуем левую часть равенства по формулам $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$ и $2\cos^2 x-1=\cos 2x$:

$$\cos 4x-2\cos^2 x+1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1-\cos 2x=0\Rightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

Решим квадратное уравнение относительно $\cos 2x$:

$$2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\cos 2x=1,\\&\cos 2x=-\frac{1}{2},\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&2x=2\pi k,\\&2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x=\pi k,\\&x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\end{aligned}\right.\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k,\ \ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Задание 13.8

Решите уравнения:

1. $\cos 4x-6\cos^2 x+5=0$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin 4x+2\sin^2 x=1$;

3. $\sin 4x+4\cos^2 x=2$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

4. $\cos 4x+4\sin^2 x=1+2\sin^2 2x$.

▶ Пример к заданию 13.9:

Решите уравнение:

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=0.$$

Решение:

Заметим, что если x такой, что $\cos x=0$, то $\sin x=1$ или $\sin x=-1$. Действительно, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, тогда $\sin^2 x=1$, а значит $\sin x=\pm 1$. Тогда мы понимаем, что x, при котором $\cos x=0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos x \neq 0$, а значит мы может разделить левую и правую части на $\cos x$. В результате получаем:

$$1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13.9

Решите уравнения:

1. $\cos x + \sin x = 0$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

3. $\cos x - \sin x = 0$;

4. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

▶ Пример к заданию 13.10:

Решите уравнение:

$$\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0.$$

Решение:

Применим формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Затем вынесем $2\sin x$ за скобки:

$$\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0.$$

Мы знаем, что произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой при этом существует. Тогда:

$$2\sin x(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x = 0, \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0, & (1) \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Решим (1):

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Решим (2):

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

Заметим, что если x такой, что $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Действительно, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тогда $\sin^2 x = 1$, а значит $\sin x = \pm 1$. Тогда мы понимаем, что x, при котором $\cos x = 0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos x \neq 0$, а значит мы может разделить левую и правую части на $\cos x$. В результате получаем:

$$1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда можем переписать нашу совокупность:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pi k, \\ &x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \end{aligned}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k, \ \ -\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

Задание 13.10

Решите уравнения:

1. $\sin 2x - 2\sin^2 x = 0;$

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin 2x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 0;$
3. $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0;$
4. $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0.$

► Пример к заданию 13.11:

Решите уравнение:

$$\sin x + 2\sin^2 x + \sin 2x + \cos x = 0.$$

Решение:

Применим формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Сгруппируем слагаемые, для этого вынесем $\sin x$ за скобки у первых двух слагаемых и $\cos x$ у двух последних. Получим:

$$\sin x + 2\sin^2 x + \sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + 2\sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Мы знаем, что произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой при этом существует. Тогда:

$$(\sin x + \cos x)(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin x + \cos x = 0, \quad (1) \\ &2\sin x + 1 = 0. \qquad\quad (2) \end{aligned}\right.$$

Решим (1):

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Заметим, что если x такой, что $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Действительно, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тогда $\sin^2 x = 1$, а значит $\sin x = \pm 1$. Тогда мы понимаем, что x, при котором $\cos x = 0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos x \neq 0$, а значит, мы может разделить левую и правую части на $\cos x$. В результате получаем:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Решим (2):

$$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{aligned}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда можем переписать нашу совокупность:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x + \cos x = 0, \\ &2\sin x + 1 = 0, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{aligned}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

Задание 13.11

Решите уравнения:

1. $\sin x + 2\sin^2 x = \sin 2x + \cos x$;

$\Longrightarrow$ **Решение**

2. $\sin x + \sin 2x + \cos x + 2\cos^2 x = 0$;
3. $\sin x + 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$;
4. $\sin x + 2\cos^2 x = \sin 2x + \cos x$.

▶ Пример к заданию 13.12:

Решите уравнение:

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0.$$

Решение:

Сделаем замену $2x = y$:

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin y - \cos y = 0.$$

Заметим, что если y такой, что $\cos y = 0$, то $\sin y = 1$ или $\sin y = -1$. Действительно, $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, тогда $\sin^2 y = 1$, а значит $\sin y = \pm 1$. Тогда мы понимаем, что y, при котором $\cos y = 0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos y \neq 0$, а значит мы может разделить левую и правую части на $\cos y$.

В результате получаем:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} y - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем обратную замену $y = 2x$:

$$y = \frac{\pi}{6} + \pi k \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13.12

Решите уравнения:

1. $\cos x + \sin x = 0$;
2. $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$;
3. $\cos 3x - \sin 3x = 0$;
4. $\sqrt{3}\sin 4x - 3\cos 4x = 0$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

▶ Пример к заданию 13.13:

Решите уравнение:

$$(\sin^3 x - \cos^3 x) = -\frac{1}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x).$$

Решение:

Раскроем в левой части разность кубов, а в правой распишем по формуле синус двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x) = -\sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и упростим наше равенство:

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) = -\sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

Перенесём всё в левую часть и вынесем общий множитель за скобки:

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) + \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + 2\sin x\cos x) = 0.$$

Упростим наше выражение, применив формулу $2\sin x\cos x = \sin 2x$:

$$(\sin x - \cos x)(1 + 2\sin x\cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) = 0.$$

Мы знаем, что произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой при этом существует. Тогда

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0, & (1) \\ 1 + \sin 2x = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Решим (1): $\sin x - \cos x = 0$.
Заметим, что, если x такой, что $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Действительно, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тогда $\sin^2 x = 1$, а значит $\sin x = \pm 1$. Тогда мы понимаем, что x, при котором $\cos x = 0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos x \neq 0$, а значит мы может разделить левую и правую части на $\cos x$. В результате получаем:

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Решим (2):

$$1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда можем переписать нашу совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0, \\ 1 + \sin 2x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13.13

Решите уравнение:

$$2(\sin^3 x + \cos^3 x) = \sin 2x(\sin x + \cos x).$$

$\Longrightarrow$ **Решение**

▶ Пример к заданию 13.14:

Решите уравнение:

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = \cos 2x - \sin 2x.$$

Решение:

Применим в правой части формулы синуса и косинуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Получим:

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = \cos 2x - \sin 2x \Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x.$$

Перенесём все слагаемые влево и приведём подобные слагаемые:

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2 + 2\sin x \cos x = 0.$$

Разделим уравнение на 2 и заменим 1 по основному тригонометрическому тождеству $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Получим

$$2\cos^2 x - 2 + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$-\sin^2 x + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow -\sin x(\sin x - \cos x) = 0.$$

Мы знаем, что произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой при этом существует. Тогда

$$\sin x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0, & (1) \\ \sin x = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Решим (1): $\sin x - \cos x = 0$.
Заметим, что, если x такой, что $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Действительно, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тогда $\sin^2 x = 1$, а значит $\sin x = \pm 1$. Тогда мы понимаем, что x, при котором $\cos x = 0$, не может являться корнем нашего уравнения. Тогда, можно считать, что $\cos x \neq 0$, а значит мы может разделить левую и правую части на $\cos x$. В результате получаем:

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1.$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Решим (2):

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда можем переписать нашу совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0, \\ \sin x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pi k, \end{array}\right.,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k,\ \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Задание 13.14

Решите уравнение:

$$\sin^2 x - 5\cos^2 x + 1 = \sin 2x - 2\cos 2x.$$

14. Задания из ЕГЭ

14.1. Задания 1 части

Задание 1. Непосредственное вычисление значений

► **Пример.** Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})}$.

Решение:

Заметим, что $-\dfrac{27\pi}{4} = -6\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ и $\dfrac{31\pi}{4} = 7\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. Тогда мы получаем, что

$$\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(-6\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{31\pi}{4}\right) = \cos\left(7\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Наконец можем найти значение нашего выражения:

$$\frac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})} = \frac{8}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = -16.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $36\sqrt{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{7\pi}{3}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $28\sqrt{6}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $2\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}\,\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.
7. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)$.
8. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.
9. Найдите значение выражения $24\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Задание 2. Нахождение неизвестного значения функции по известному значению

► **Пример 1.** По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

$\sin\alpha = -\frac{20}{29}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение:

Найдём значение $\cos\alpha$.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{20}{29}\right)^2 = 1 - \frac{400}{841} = \frac{441}{841},$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{21}{29}.$$

Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{21}{29}$.

Найдём значение $\operatorname{tg}\alpha$.

Мы знаем значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{20}{29}}{-\frac{21}{29}} = \frac{20}{21}.$$

Найдём значение $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{21}{29}}{-\frac{20}{29}} = \frac{21}{20}.$$

► **Пример 2.** По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{35}{12}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение:

Найдём $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{35}{12}} = -\frac{12}{35}.$$

Найдём $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\left(-\frac{35}{12}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1369}{144} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha = \frac{144}{1369} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \pm\frac{12}{37}.$$

Так как $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{12}{37}$.

Найдём $\sin\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{37}\right)^2 = 1 - \frac{144}{1369} = \frac{1225}{1369} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{35}{37}.$$

Так как $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{35}{37}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{3}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
6. Найдите $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
7. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Задание 3. Вычисление значений с помощью формул приведения

► **Пример 1.** Найдите значение выражения

$$\frac{5\sin(3\pi-\alpha)+7\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin(\pi-\alpha)}.$$

Решение: По формулам приведения получаем:

$$\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha.$$

Теперь мы легко можем найти значение нашего выражения:

$$\frac{5\sin(3\pi-\alpha)+7\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin(\pi-\alpha)}=\frac{5\sin\alpha+7\sin\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{12\sin\alpha}{2\sin\alpha}=6.$$

$\Longrightarrow$ Решение задачи

► **Пример 2.** Найдите значение $13\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Решение: По формуле приведения получаем, что

$$13\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=13\sin\alpha.$$

Далее воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longleftrightarrow\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}.$$

Так как угол α лежит во второй четверти, то $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Значит

$$13\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=13\cdot\frac{5}{13}=5.$$

$\Longrightarrow$ Решение задачи

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)-3\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\alpha-3\pi\right)}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin(\alpha-3\pi)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{5\sin(\alpha-\pi)}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\beta+3\pi\right)}$.

5. Найдите значение выражения $7\cos\left(\pi+\beta\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\dfrac{1}{3}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите значение выражения $5\sin(\alpha-7\pi)-11\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}25$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7. Найдите $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

8. Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ и $\alpha \in (\pi; 1{,}5\pi)$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

9. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}(5\pi-\gamma) - \operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg}\gamma = 7$.
10. Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
11. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$.

Задание 4. Приведение к функциям одного угла

► **Пример.** Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos 121^\circ}{\cos 59^\circ}$.

Решение: Заметим, что $121^\circ = 180^\circ - 59^\circ$, значит, по формулам приведения получаем:

$$\cos 121^\circ = \cos(180^\circ - 59^\circ) = -\cos 59^\circ.$$

Найдём значение нашего выражения:

$$\frac{4\cos 121^\circ}{\cos 59^\circ} = -\frac{4\cos 59^\circ}{\cos 59^\circ} = -4.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $\dfrac{5\operatorname{tg}163^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $\dfrac{-8\sin 422^\circ}{\sin 62^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.
6. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.
7. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.
8. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}17^\circ\cdot\operatorname{tg}107^\circ$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

9. Найдите значение выражения $7\operatorname{tg}13^\circ\cdot\operatorname{tg}77^\circ$.

Задание 5. Применение основного тригонометрического тождества

► **Пример.** Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{2\sin(180^\circ + \alpha)}$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Решение: Заметим, что $70^\circ = 90^\circ - 20^\circ$. Значит, по формулам приведения получаем:

$$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ.$$

Тогда по основному тригонометрическому тождеству имеем:

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos 20^\circ = 1.$$

Для преобразования знаменателя вновь воспользуемся формулами приведения:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Найдем значение выражения:

$$\frac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{2\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -1{,}5.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $-\dfrac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $\dfrac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$.

Задание 6. Преобразования с помощью тангенса и котангенса

▶ **Пример 1.** Найдите $\dfrac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

Решение: Мы знаем, что $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, следовательно, так как $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, то $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -3$.

Умножим полученное равенство на $\sin\alpha$, получим $\cos\alpha = -3\sin\alpha$.
А теперь заменим в искомом выражении все косинусы на $-3\sin\alpha$ и упростим полученную дробь

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{3(-3\sin\alpha) - 2\sin\alpha}{4\sin\alpha + 5(-3\sin\alpha)} = \frac{-9\sin\alpha - 2\sin\alpha}{4\sin\alpha - 15\sin\alpha} = \frac{-11\sin\alpha}{-11\sin\alpha} = 1.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

▶ **Пример 2.** Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2}{\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6} = \dfrac{1}{3}$.

Решение: Умножим наше равенство на $3\cdot(\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6)$:

$$3(3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2) = \sin\alpha + 3\cos\alpha + 6 \iff 9\sin\alpha - 15\cos\alpha + 6 = \sin\alpha + 3\cos\alpha + 6 \iff$$

$$\iff 8\sin\alpha = 18\cos\alpha.$$

Поделим полученное выражение на $8\cos\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{18}{8} \iff \operatorname{tg}\alpha = 2{,}25.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\dfrac{13\sin\alpha+14\cos\alpha}{15\sin\alpha-16\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{8}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите $\dfrac{10\cos\alpha+4\sin\alpha+15}{2\sin\alpha+5\cos\alpha+3}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}5$.

3. Найдите $\dfrac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

4. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{5\sin\alpha-4\cos\alpha-2}{5\sin\alpha+\cos\alpha-3}=\dfrac{2}{3}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5\sin\alpha-17\cos\alpha}=3$.

7. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\dfrac{5\sin\alpha-6\cos\alpha}{6\sin\alpha-10\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задание 7. Синус двойного угла

► **Пример.** Найдите значение выражения $\dfrac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$.

Решение: Воспользуемся формулой для синуса двойного угла:

$$12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ = 6 \cdot (2\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ) = 6 \cdot \sin 22^\circ.$$

Тогда получаем:

$$\frac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{6 \cdot \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = 6.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $8\sin\dfrac{5\pi}{12} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{12}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \cdot \sin 41^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 126^\circ}{4\sin 63^\circ \sin 27^\circ}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ}{5\sin 40^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите $\dfrac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}6$.

Задание 8. Косинус двойного угла

▶ **Пример 1.** Найдите $98\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{7}$.

Решение: Воспользуемся формулой для нахождения косинуса двойного угла:

$$98\cos 2\alpha = 98(2\cos^2\alpha - 1) = 98\left(2\cdot\frac{16}{49} - 1\right) = \frac{98\cdot(-17)}{49} = -34.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

▶ **Пример 2.** Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos^2\dfrac{5\pi}{12} - \sqrt{3}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$.

Решение: Воспользуемся формулой для нахождения косинуса двойного угла:

$$\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sin^2\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1.5$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

▶ **Пример 3.** Найдите значение выражения $\sqrt{48}\cos^2\dfrac{19\pi}{12} - \sqrt{12}$.

Решение: Вынесем за скобки общий числовой множитель $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, получим:

$$\sqrt{48}\cos^2\frac{19\pi}{12} - \sqrt{12} = \sqrt{12}\cdot\left(\sqrt{4}\cos^2\frac{19\pi}{12} - 1\right) = 2\sqrt{3}\cdot\left(2\cos^2\frac{19\pi}{12} - 1\right).$$

Выражение, полученное в скобках, свернём по формуле косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и вычислим полученную функцию

$$2\sqrt{3}\cdot\left(2\cos^2\frac{19\pi}{12} - 1\right) = 2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{19\pi}{6} = 2\sqrt{3}\cdot\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -3.$$

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}2$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите $-20\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

4. Найдите $-47\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}4$.

5. Найдите $\sqrt{5}\cdot\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите значение выражения $4\cos 4\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}4$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7. Найдите значение выражения $\sqrt{75}\cos^2\dfrac{7\pi}{12} - \sqrt{75}\sin^2\dfrac{7\pi}{12}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

8. Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

9. Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

10. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

11. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\sin^2\frac{5\pi}{8}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

12. Найдите значение выражения $\dfrac{24(\sin^2 17^\circ-\cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

13. Найдите значение выражения $\dfrac{18(\sin^2 24^\circ-\cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

14. Найдите значение выражения $\dfrac{6\cos^2 34^\circ - 3}{\cos 169^\circ \cdot \cos 79^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

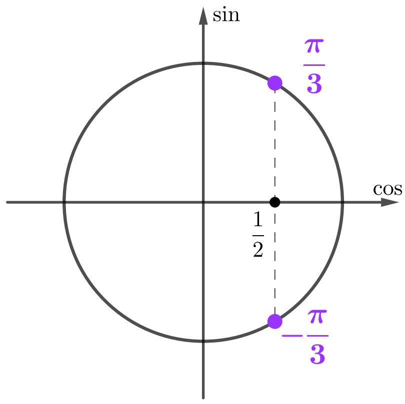
Задание 9. Тригонометрические уравнения 1 части

► **Пример 1.** Решите уравнение и в ответе запишите его наибольший отрицательный корень

$$\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}.$$

С помощью тригонометрической окружности разберемся, при каких значениях угла, его косинус равен $\frac{1}{2}$. Для этого:

1. Найдем на горизонтальной оси косинусов точку $\frac{1}{2}$.
2. Проведем через эту точку вертикальную прямую и найдем точки пересечения этой прямой с окружностью.
3. Выявим значения углов, косинус которых равен $\frac{1}{2}$.



Таким образом, искомые значения – это $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$.

Учтем, что пройдя любое целое количество целых оборотов по окружности относительно точек $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$, мы будем попадать в точки, косинус которых тоже равен $\frac{1}{2}$, а значит они являются решениями нашего уравнения. Множество всех таких точек, мы запишем с помощью периода. Один полный оборот по окружности равен 2π. Пусть количество оборотов равно некоторому целому числу k. Тогда множество решений нашего уравнения можно записать как $\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Итого, сделаем следующий переход:

$$\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\\&\frac{\pi(x-1)}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k.\end{aligned}\right.$$

Разделим обе части каждого уравнения в совокупности на $\frac{\pi}{3}$.

$$\left[\begin{aligned}&\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\\&\frac{\pi(x-1)}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x-1=1+6k,\\&x-1=-1+6k.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2+6k,\\&x=6k.\end{aligned}\right.$$

Найдем наибольший отрицательный корень нашего уравнения. Вспомним, что k – целое число. Заметим, что x может быть отрицательным только при $k < 0$, причем, чем меньше k, тем меньше x. Таким образом, нам нужно брать k как можно больше, но так, чтобы $k < 0$. Делаем вывод, что нам подойдет $k = -1$. Подставим это значение k в верхнее и нижнее уравнение и получим.

$$\text{При } k = -1: \quad \left[\begin{aligned} x &= 2 + 6 \cdot (-1) = -4, \\ x &= 6 \cdot (-1) = -6. \end{aligned}\right.$$

Из этих двух значений больше -4. Это число и будет являться нашим ответом.

► Пример 2.

Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi(x+8)}{18} = \sqrt{3}.$$

Решение:
Сделаем замену $\dfrac{\pi(x+8)}{18} = t$ и решим полученное уравнение:

$$\operatorname{ctg} t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем обратную замену и найдём x:

$$\frac{\pi(x+8)}{18} = \frac{\pi}{6} + \pi n \Leftrightarrow \frac{x+8}{18} = \frac{1}{6} + n \Leftrightarrow x + 8 = 3 + 18n \Leftrightarrow x = 18n - 5.$$

Заметим, что при $n = 0$:

$$18 \cdot 0 - 5 = -5.$$

Если брать n меньше, то мы получим значение меньше -5.
Будем брать положительные n:

$$n = 1: \ \ 18 \cdot 1 - 5 = 13,$$

$$n = 2: \ \ 18 \cdot 2 - 5 = 31.$$

Таким образом:
Наибольший отрицательный корень нашего уравнения достигается при $n = 0$ и равен -5.
Наименьший положительный корень нашего уравнения достигается при $n = 1$ и равен 13.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = -1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения: $\sin\dfrac{\pi x}{12} = -\dfrac{1}{2}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

3. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

4. Решите уравнение $\cos\dfrac{\pi\,(x-7)}{3} = \dfrac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения: $\cos\dfrac{\pi(x-3)}{3} = \dfrac{1}{2}$.

$\Longrightarrow$ Решение задачи

6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения: $\cos\dfrac{\pi(x+7)}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(4x+3)}{3} = -\sqrt{3};$$

$\Longrightarrow$ Решение задачи

8. Найдите наименьший положительный корень уравнения: $\sin\dfrac{\pi(8x-7)}{4} = 1$.

14.2. Задания 2 части

Задание 1

а) Решите уравнение: $2\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 2

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задание 3

а) Решите уравнение $\cos^2(\pi-x)-\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Задание 4

а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 5

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 6

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 7

а) Решите уравнение $\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Задание 8

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Задание 9

а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 5 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 10

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Задание 11

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 12

а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin(-x) - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Задание 13

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sin(-x) = 1 + \cos(-x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 14

а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\cos(-x) - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 15

а) Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Задание 16

а) Решите уравнение $2\cos^3(x - \pi) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 17

а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 18

а) Решите уравнение $\sin^3 x + \cos 2x + \sin x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 19

а) Решите уравнение $\dfrac{7}{1-\cos^2 x}+\dfrac{9}{\sin x}=10.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right].$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 20

а) Решите уравнение $\dfrac{4}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}-\dfrac{11}{\cos x}+6=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right].$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 21

а) Решите уравнение: $16\sin^4 x+8\cos 2x-7=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right].$

Задание 22

а) Решите уравнение: $4\cos^4 x+9\cos 2x-1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right].$

Задание 23

а) Решите уравнение $2\cos^4 x+3\sin^2 x-2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-\dfrac{5\pi}{2}\right].$

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 24

а) Решите уравнение $4\sin^4 x + 7\cos^2 x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

Задание 25

а) Решите уравнение: $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Задание 26

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 27

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 28

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 29

а) Решите уравнение $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 30

а) Решите уравнение $2\sin^3 x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = -\sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 31

а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 32

а) Решите уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 33

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 34

а) Решите уравнение $2\sin 2x + 2\sin(-x) - 2\cos(-x) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Задание 35

а) Решите уравнение $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 36

а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 37

а) Решите уравнение $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задание 38

а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задание 39

а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sin x + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 40

а) Решите уравнение $7\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\sqrt{3}\sin x\cos x = 4\cos^3 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 41

а) Решите уравнение $5\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 42

а) Решите уравнение $7\cos x - 4\cos^3 x = 2\sqrt{3}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.

Задание 43

а) Решите уравнение: $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 44

а) Решите уравнение $\cos x+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{3}\sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\dfrac{11\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 45

а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 46

а) Решите уравнение $\sin x+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 47

а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 48

а) Решите уравнение $\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 49

а) Решите уравнение $\sin\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задание 50

а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\dfrac{x}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 51

а) Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{4} - \cos^4\frac{x}{4} = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

Задание 52

а) Решите уравнение $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 53

а) Решите уравнение $1-4\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 54

а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin 2x+4\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}+x\right)=2+\sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 55

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Задание 56

а) Решите уравнение: $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Задание 57

а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 58

а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Задание 59

а) Решите уравнение: $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Задание 60

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Задание 61

а) Решите уравнение $5^{2\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$.

6) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 62

а) Решите уравнение: $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 63

а) Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x.}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

Задание 64

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \dfrac{13\pi}{2}\right]$.

Задание 65

а) Решите уравнение $(32^{\cos x})^{\sin x} = 4\sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 66

а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задание 67

а) Решите уравнение $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\cos x} + 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos x} - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 4\pi]$.

Задание 68

а) Решите уравнение $4^{\sin x} + 4^{\sin(x+\pi)} = \dfrac{5}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 69

а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

Задание 70

а) Решите уравнение $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi, -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 71

а) Решите уравнение $16^{\sin x} - 1{,}5 \cdot 4^{\sin x + 1} + 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 72

а) Решите уравнение $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 73

а) Решите уравнение $2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos^2 x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 74

а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 75

а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Задание 76

а) Решите уравнение $2\log_{0,5}^2(2\sin x) + 7\log_{0,5}(2\sin x) + 3 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Задание 77

а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2\sin^2 x - 3\cos 2x + 6) = -2.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задание 78

а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3\cos 2x - 2\cos^2 x + 5) = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \dfrac{13\pi}{2}\right]$.

Задание 79

а) Решите уравнение: $\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 80

а) Решите уравнение $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x) = x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 81

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{\log_7(\cos x)} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 82

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\log_2(\cos x)} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 83

а) Решите уравнение $\log_{\sin x}(\cos 2x - \sin x + 1) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Задание 84

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Задание 85

а) Решите уравнение $\dfrac{3^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4}{\sin x + 1} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{11\pi}{2}; 7\pi\right]$.

Задание 86

а) Решите уравнение $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{2\sin x + 1} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 87

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

$\Longrightarrow$ **Решение**

Задание 88

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

Задание 89

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right].$

Задание 90

а) Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}\right].$

Задание 91

а) Решите уравнение $\dfrac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11\sin x}} = 0.$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right].$

Задание 92

а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}} = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2}; -5\pi\right].$

Задание 93

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right].$

Задание 94

а) Решите уравнение $(2\cos^2 x + \sin x - 2)\sqrt{5\operatorname{tg} x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 95

а) Решите уравнение: $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 96

а) Решите уравнение: $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Задание 97

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 98

а) Решите уравнение: $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Задание 99

а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 100

а) Решите уравнение $\left(6\sin^2 x + 5\sin x - 4\right)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Задание 101

а) Решите уравнение $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 102

а) Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\cdot(3\cos x + \cos 2x + 2) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 103

а) Решите уравнение $2^{4\sin^2 x+1} + 2^{4\cos^2 x} = 18$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 104

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Задание 105

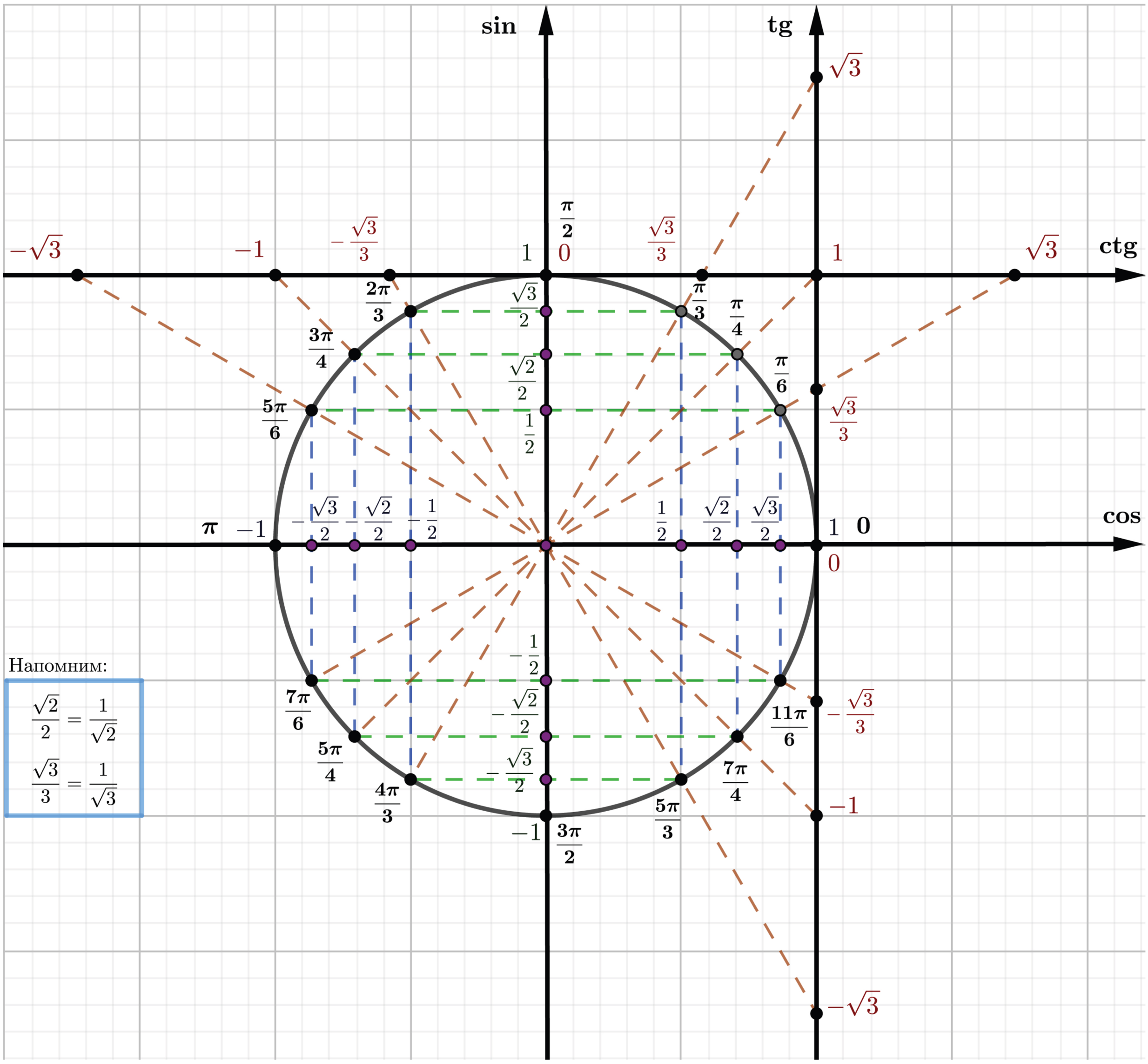
а) Решите уравнение: $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

15. Ответы

Тригонометрическая Окружность. Табличные значения углов. Область значений синуса и косинуса

Задание 1.1



Задание 1.2

1. $\sin t = 0$, $\cos t = 1$, $\operatorname{tg} t = 0$, $\operatorname{ctg} t \in \varnothing$;
2. $\sin t = 1$, $\cos t = 0$, $\operatorname{tg} t \in \varnothing$, $\operatorname{ctg} t = 0$;
3. $\sin t = -1$, $\cos t = 0$, $\operatorname{tg} t \in \varnothing$, $\operatorname{ctg} t = 0$;
4. $\sin t = 0$, $\cos t = -1$, $\operatorname{tg} t = 0$, $\operatorname{ctg} t \in \varnothing$;
5. $\sin t = 0$, $\cos t = 1$, $\operatorname{tg} t = 0$, $\operatorname{ctg} t \in \varnothing$;
6. $\sin t = -1$, $\cos t = 0$, $\operatorname{tg} t \in \varnothing$, $\operatorname{ctg} t = 0$;

7. $\sin t = 1$, $\cos t = 0$, $\operatorname{tg} t \in \varnothing$, $\operatorname{ctg} t = 0$;
8. $\sin t = 0$, $\cos t = -1$, $\operatorname{tg} t = 0$, $\operatorname{ctg} t \in \varnothing$;
9. $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$;
10. $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} t = 1$, $\operatorname{ctg} t = 1$;
11. $\sin t = -\frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$;
12. $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} t = -1$, $\operatorname{ctg} t = -1$;
13. $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} t = 1$, $\operatorname{ctg} t = 1$;
14. $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
15. $\sin t = -\frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$;
16. $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 1.3

1. $-\frac{1}{2}$;
2. $-\frac{1}{2}$;
3. 1;
4. 0;
5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
7. -1;
8. $\sqrt{3}$
9. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
10. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
11. 0;
12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 1.4

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $-\sqrt{3}$;
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4. -1;
5. $\frac{1}{2}$;
6. $\frac{1}{2}$;
7. $-\frac{1}{2}$;
8. $\frac{1}{2}$.

Задание 1.5

1. 36;
2. 2;
3. -16;
4. -6;
5. 6;
6. 18;
7. -12;
8. -3.

Задание 1.6

1.6.1

1. да;
2. да;
3. нет;
4. да;
5. да;
6. да;
7. нет;
8. да.

1.6.2

1. да;
2. да;
3. нет;
4. да;
5. да;
6. нет;
7. да;
8. нет.

1.6.3

1. да;
2. да;
3. да;
4. да;
5. да;
6. да;
7. да;
8. да.

1.6.4

1. да;
2. да;
3. да;
4. да;
5. да;
6. да;
7. да;
8. да.

Тригонометрические уравнения. Уровень 1

Задание 2.1

1. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
5. $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
6. $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
7. $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
8. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
9. $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
10. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
11. $\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
12. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
13. $\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
14. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 2.2

1. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\{2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$;
3. $\varnothing$;
4. $\varnothing$;
5. $\varnothing$;
6. $\varnothing$;
7. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
8. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 2.3

1. $\{\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$;
2. $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
5. $\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
6. $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
7. $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
8. $\left\{\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
9. $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
10. $\left\{\frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
11. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
12. $\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
13. $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
14. $\left\{\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
15. $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
16. $\left\{\frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 2.4

1. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\right\}$
2. $\{\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\}$
3. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\right\}$
4. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\right\}$

Задание 2.5

1. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\right\}$
2. $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\right\}$
3. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\right\}$
4. $\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\right\}$

Задание 2.6

1. $\varnothing$;
2. $\varnothing$;
3. $\varnothing$;
4. $\varnothing$.

Задание 2.7

1. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\right\}$
2. $\left\{\pi k,\ \ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\right\}$

Задание 2.8

1. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

Задание 2.9

1. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\right\}$
2. $\{\pi+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\}$

Задание 2.10

1. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\right\}$
2. $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\right\}$
3. $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\right\}$
4. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\right\}$

Нахождение корней простейшего уравнения на заданном промежутке

Задание 3.1

1. $\dfrac{7\pi}{3}$;
2. $\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$;
3. $\dfrac{13\pi}{6}$;
4. $\dfrac{7\pi}{2},\ \dfrac{9\pi}{2}$;
5. $-\dfrac{5\pi}{4},\ -\dfrac{3\pi}{4}$;
6. $\dfrac{11\pi}{3}$;
7. $\dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{13\pi}{6},\ \dfrac{19\pi}{6}$;
8. $-\dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

Тригонометрические уравнения в задаче №1

Задание 4.1

1. -1, при $k=-2$;
2. 5, при $k=2$;
3. 2, при $k=-1$;
4. -1, при $k=1$.

Задание 4.2

1. $5k+7,\ k\in\mathbb{Z}$;
2. $x=12n-3,\ n\in\mathbb{Z}$;
3. $2m+4,\ m\in\mathbb{Z}$;
4. $1+4t,\ t\in\mathbb{Z}$.

Задание 4.3

1. 2;
2. -2;
3. -6;
4. $0{,}5$;
5. $0{,}125$.

Преобразование тригонометрических выражений. Уровень 1

Задание 5.1

1. $\cos^2 t$;
2. $-\sin^2 t$;
3. $\sin^2 t$;
4. $-\cos^2 t$;
5. $\cos^2 t$;
6. $2\cos^2 t$;
7. $\sin^2 t$;
8. $\cos^2 t$;
9. $\operatorname{tg}^2 t$;
10. 1;
11. $-\operatorname{ctg}^2 t$;
12. 1;
13. 1;
14. $\operatorname{ctg}^6 x$;
15. 0;
16. $-\sin^2 t$;
17. $\dfrac{2}{\sin t}$;
18. $\dfrac{2}{\cos t}$;
19. $\operatorname{tg} t$;
20. 4;
21. 1;
22. 1;
23. $\dfrac{1}{\sin^2 t}$;
24. $\operatorname{tg}^2 t$;
25. 1;
26. $\dfrac{1}{3}$;
27. 1;
28. 1.

Задание 5.3

1. $f_{\min}(t)=0,\ f_{\max}(t)=2$;
2. $f_{\min}(t)=-1,\ f_{\max}(t)=5$;
3. $f_{\min}(t)=-1,\ f_{\max}(t)=0$;
4. $f_{\min}(t)=2,\ f_{\max}(t)=4$.

Связь тригонометрических функций одного аргумента

Задание 6.1

а) $\cos t=-\dfrac{3}{5}$; $\operatorname{tg} t=-\dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t=-\dfrac{3}{4}$.

б) $\cos t=\dfrac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t=\dfrac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} t=\dfrac{12}{5}$.

в) $\cos t=0{,}8$; $\operatorname{tg} t=-\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t=-\dfrac{4}{3}$.

г) $\cos t=-0{,}96$; $\operatorname{tg} t=\dfrac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t=\dfrac{24}{7}$.

Задание 6.2

а) $\sin t = 0{,}6$; $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \dfrac{4}{3}$.

б) $\sin t = \dfrac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\dfrac{12}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{5}{12}$.

в) $\sin t = -0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -\dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{3}{4}$.

г) $\sin t = -\dfrac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \dfrac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t = \dfrac{24}{7}$.

Задание 6.3

а) $\sin t = \dfrac{3}{5}$; $\cos t = \dfrac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = \dfrac{4}{3}$.

б) $\sin t = -\dfrac{12}{13}$; $\cos t = -\dfrac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = \dfrac{5}{12}$.

в) $\sin t = \dfrac{3}{5}$; $\cos t = -\dfrac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{4}{3}$.

г) $\sin t = -\dfrac{5}{13}$; $\cos t = \dfrac{12}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{12}{5}$.

Задание 6.4

а) $\sin t = -\dfrac{5}{13}$; $\cos t = -\dfrac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = \dfrac{5}{12}$.

б) $\sin t = \dfrac{24}{25}$; $\cos t = \dfrac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \dfrac{24}{7}$.

в) $\sin t = -\dfrac{12}{13}$; $\cos t = \dfrac{5}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\dfrac{12}{5}$.

г) $\sin t = \dfrac{15}{17}$; $\cos t = -\dfrac{8}{17}$; $\operatorname{tg} t = -\dfrac{15}{8}$.

Формулы приведения

Задание 7.1

1. $\sin x$;
2. $\sin x$;
3. $-\sin x$;
4. $\sin x$;
5. $-\sin x$;
6. $\cos x$;
7. $-\cos x$;
8. $-\operatorname{ctg} x$;
9. $-\operatorname{ctg} x$;
10. $\operatorname{tg} x$;
11. $\sin 2x$;
12. $-\cos 4x$;
13. $-\cos 2x$;
14. $-\sin 4x$;
15. $\cos \frac{x}{2}$;
16. $-\operatorname{ctg} 2x$;
17. $\operatorname{tg} 4x$;
18. $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;
19. $-\sin x$;
20. $-\sin x$;
21. $-\cos x$;
22. $\operatorname{ctg} x$;
23. $-\operatorname{ctg} x$;
24. $-\operatorname{ctg} x$;
25. $\operatorname{ctg} x$.

Задание 7.2

1. 0;
2. $2\cos x$;
3. 0;
4. -1;
5. $-\cos x$;
6. $\cos x$;
7. $\operatorname{ctg} x$;
8. $\operatorname{ctg} x$;
9. $-\cos x$;
10. $-\cos x$;
11. $\operatorname{tg}^2 x$;
12. $\sin x$;
13. 1;
14. 2;
15. $\cos^2 x$;
16. $\cos x$;
17. -1;
18. $-\frac{1}{\cos x}$;
19. $\operatorname{tg}^2 x$;
20. $-\sin x$.

Задание 7.3

1. $\operatorname{ctg} x$;
2. $\cos x$;
3. $\operatorname{ctg} x$;
4. $-\cos x$.

Задание 7.4

1. 1;
2. 1;
3. 1;
4. 1.

Тригонометрические уравнения. Уровень 2

Задание 8.1

1. $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 8.2

1. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 8.3

1. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\{\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$;
4. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 8.4

1. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
   или $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
   или $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
5. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
   или $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
6. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 8.5

1. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
2. $\left\{\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
3. $\{\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Задание 8.6

1. $\left\{\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
2. $\{2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Задание 8.7

1. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
2. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
3. $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Задание 8.8

1. $\{\pi+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\};$
2. $\left\{\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
3. $\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
4. $\{\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\};$
5. $\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
6. $\left\{\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Различные варианты записи точек на тригонометрической окружности

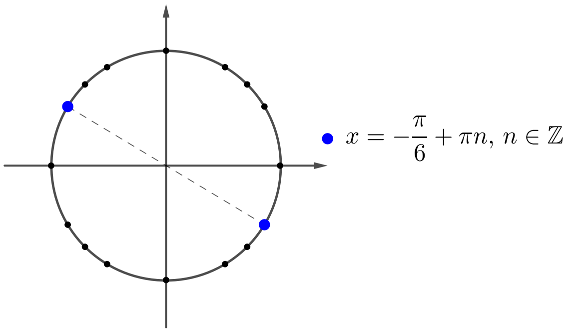
Задание 9.1

а) 1) $\dfrac{5\pi}{6};$

2) $-\dfrac{\pi}{6};$

3) $-\dfrac{19\pi}{6}.$

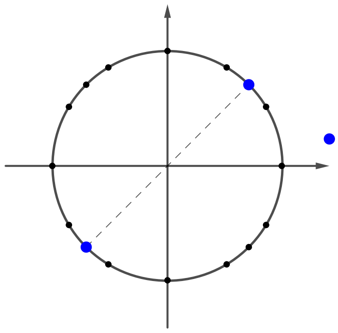
б)



а) 1) $\dfrac{5\pi}{4}$; б)

2) $\dfrac{\pi}{4}$;

3) $-\dfrac{11\pi}{4}$.

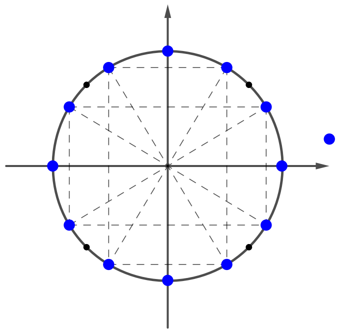


• $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

а) 1) $\dfrac{\pi}{6}$; б)

2) 0;

3) $-\dfrac{\pi}{2}$.

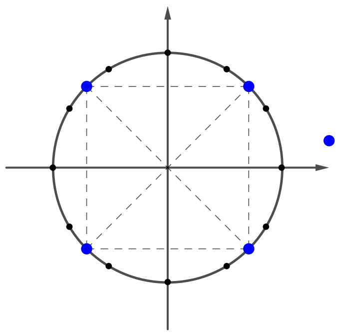


• $x = \dfrac{\pi k}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

а) 1) $\dfrac{3\pi}{4}$; б)

2) $\dfrac{\pi}{4}$;

3) $-\dfrac{5\pi}{4}$.



• $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Задание 9.2

2, 4, 5

Задание 9.3

1. $\{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$;

   $\{2\pi k,\ \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

   $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. $\left\{\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pi m,\ \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{2\pi p,\ \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi p,\ \pi + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{2\pi q,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi q,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi q,\ \pi + 2\pi q,\ q \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi p,\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi p,\ p \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi q,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi q,\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi q,\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi q,\ q \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. $\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

9. $\left\{\dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{2\pi m,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$.

10. $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

11. $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

12. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

13. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ -\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ \ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi p,\ \ -\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ \ -\frac{5\pi}{6}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}\right\}$.

14. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ -\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ \ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi p,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi p,\ \ -\frac{\pi}{3}+2\pi p,\ \ -\frac{2\pi}{3}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}\right\}$.

15. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ \pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+\pi m,\ \ -\frac{\pi}{6}+\pi m,\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ \ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi p,\ \frac{\pi}{2}+\pi p,\ p\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi q,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi q,\ \ -\frac{\pi}{6}+2\pi q,\ \ -\frac{5\pi}{6}+2\pi q,\ \frac{\pi}{2}+2\pi q,\ \ -\frac{\pi}{2}+2\pi q,\ q\in\mathbb{Z}\right\}$.

16. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ \pi+2\pi m,\ \ -\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$.

17. $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

18. $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\};$
$\left\{\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

19. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}\right\};$
$\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\};$
$\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ \pi+2\pi m, -\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\right\}.$

20. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$

Формулы сложения

Задание 10.1

1. $\cos\alpha\sin\beta$;
2. $\cos\alpha\cos\beta$;
3. $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$;
4. $\sin\alpha\sin\beta$;
5. $2\sin\alpha\cos\beta$;
6. $-\cos\alpha\cos\beta$;
7. $2\cos\alpha\cos\beta$;
8. $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$;
9. $-\sin\alpha$;
10. $-\cos\alpha$;
11. $\dfrac{\sqrt{3}\cos\beta-\sin\beta}{2}$;
12. $\dfrac{\sqrt{3}\cos\beta+\sin\beta}{2}$;
13. $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$;
14. 1;
15. 0;
16. 0;
17. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;
18. $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Задание 10.3

1. 1;
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
3. 1;
4. -1;
5. 0;
6. 0,5;
7. 0;
8. 0,5;
9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
10. -1;
11. 0;
12. 0,5;
13. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
14. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
15. $-0{,}5$;
16. $-0{,}5$.

Задание 10.5

1. $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}+\dfrac{3}{10}$;
2. $-\dfrac{3}{5}$;
3. $\dfrac{4}{5}$;
4. $\dfrac{2}{5}-\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.

Задание 10.6

1. $\dfrac{12\sqrt{3}-5}{26}$;
2. $\dfrac{12}{13}$;
3. $\dfrac{-5\sqrt{3}-12}{26}$;
4. $\dfrac{5}{13}$.

Задание 10.7 дальше надо исправить весь 10 раздел

1. $-\dfrac{\sqrt{357}+5}{24}$;
2. $\dfrac{5}{12}$.

Задание 10.8

1. $-\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$;
2. $\dfrac{3}{5}$.

Задание 10.9

1. $-\dfrac{77}{85}$;
2. $\dfrac{36}{85}$.

Задание 10.10

1. $-\dfrac{84}{85}$;
2. $\dfrac{13}{85}$.

Задание 10.11

1. $-\dfrac{36}{85}$;
2. $\dfrac{77}{85}$.

Задание 10.12

1. $-\dfrac{1519}{1681}$;
2. $\dfrac{720}{1681}$.

Задание 10.13

1. $-\dfrac{63}{65}$;
2. $-\dfrac{16}{65}$.

Задание 10.14

1. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;
2. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;
4. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Задание 10.15

1. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;
2. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;
3. $\dfrac{1}{4}$;
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 10.16

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $-\dfrac{1}{2}$.

Задание 10.17

1. 1;
2. 1.

Формулы двойного угла

Задание 11.1

1. $\dfrac{1}{2}$;
2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
5. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
6. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
8. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
9. 1;
10. $\dfrac{1}{2}$;
11. $\dfrac{3}{2}$;
12. $\dfrac{3}{2}$;
13. $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
14. -1;
15. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$;
16. $-\dfrac{1}{8}$;
17. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
18. $\dfrac{1}{2}$;
19. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;
20. $-\sqrt{3}$.

Задание 11.2

1. $2\sin x$;
2. $\operatorname{tg} x$;
3. $2\sin x$;
4. $\sin^2 x$;
5. 1;
6. $\cos 2x$;
7. $\sin x$;
8. 2;
9. -1;
10. $\dfrac{1}{\cos 2x+\sin 2x}$;
11. $\cos x$;
12. $2\cos 20°$;
13. $\cos 18°$;
14. 1;
15. $\cos 40°-\sin 40°$;
16. $\cos 5°$;
17. $2\operatorname{tg} 3x$;
18. $2\sin 2x$;

19. $\cos 6x$;
20. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;
21. $\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}$;
22. $-\sin x$;
23. $-\sin\dfrac{x}{2}$;
24. $\sin 2x$;
25. $-\operatorname{tg} 2x$.

Задание 11.4

1.

1. $\dfrac{24}{25}$;
2. $-\dfrac{7}{25}$.

2.

1. $-\dfrac{120}{169}$;
2. $\dfrac{119}{169}$.

3.

1. $-\dfrac{120}{169}$;
2. $\dfrac{119}{169}$;
3. $-\dfrac{120}{119}$;
4. $-\dfrac{119}{120}$.

4.

1. $\dfrac{24}{25}$;
2. $\dfrac{7}{25}$;
3. $\dfrac{24}{7}$;
4. $\dfrac{7}{24}$.

Задание 11.5

1. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
2. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Формулы понижения степени

Задание 12.2

1. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
2. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
3. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
4. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Уравнения.Разное

Задание 13.1

1. $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
   или $\left\{\dfrac{2\pi k}{3},\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.2

1. $\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.3

1. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.4

1. $\{2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$;
2. $\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.5

1. $\left\{\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\{2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Задание 13.6

1. $\left\{\pi k,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.7

1. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3},\ \dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.8

1. $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ \dfrac{5\pi}{12}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.9

1. $\left\{\dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.10

1. $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.11

1. $\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{11\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.12

1. $\left\{\dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
3. $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;
4. $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задание 13.13

$$\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\text{ или }\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Задание 13.14

$$\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\text{ или }\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Задачи из ЕГЭ

15.1. Задания 1 части

Задание 1. Непосредственное вычисление значений

1. 36;
2. 2;
3. -3;
4. -42;
5. -3;
6. -6;
7. 6;
8. 18;
9. -12.

Задание 2. Нахождение неизвестного значения функции по известному значению

1. 0,4;
2. 1,5;
3. $-0{,}3$;
4. -3;
5. 5;
6. 1;
7. -1.

Задание 3. Вычисление значений с помощью формул приведения

1. 1;
2. -2;
3. 1;
4. 2;
5. 3;
6. 4;
7. 0,6;
8. -24;
9. -28;
10. -10;
11. $-2{,}5$.

Задание 4. Приведение к функциям одного угла

1. -14;
2. -5;
3. -5;
4. -8;
5. -4;
6. 5;

7. 14;
8. -5;
9. 7.

Задание 5. Применение основного тригонометрического тождества

1. -22;
2. 12;
3. 12;
4. 6.

Задание 6. Преобразования с помощью тангенса и котангенса

1. $25{,}25$;
2. 5;
3. 5;
4. 7;
5. $2{,}8$;
6. 8;
7. $0{,}8$.

Задание 7. Синус двойного угла

1. 2;
2. 10;
3. 10;
4. $0{,}5$;
5. $0{,}2$;
6. 12.

Задание 8. Косинус двойного угла

1. $22{,}08$;
2. $5{,}6$;
3. -7;
4. $31{,}96$;
5. $0{,}25$;
6. $2{,}72$;
7. $-7{,}5$;
8. $-1{,}5$;
9. $-1{,}5$;
10. -1;
11. -2;
12. -24;
13. -18;
14. -6.

Задание 9. Тригонометрические уравнения 1 части

1. -1;
2. -2;
3. $0{,}5$;
4. -4;
5. 2;
6. -6;
7. $0{,}5$;
8. $0{,}125$.

15.2. Задания 2 части

Задание 1

а) $\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-3\pi,\ -2\pi,\ -\dfrac{5\pi}{3}$.

Задание 2

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{7\pi}{2},\ -\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

Задание 3

а) $\left\{\pi + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 4

а) $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $3\pi,\ 4\pi,\ \dfrac{10\pi}{3}$.

Задание 5

а) $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi,\ 3\pi$.

Задание 6

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{19\pi}{4},\ -\dfrac{17\pi}{4}$.

Задание 7

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{3\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{4},\ 2\pi$.

Задание 8

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{23\pi}{6}$.

Задание 9

а) $\left\{\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{7\pi}{6}$.

Задание 10

а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi$.

Задание 11

а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $2\pi,\ \frac{19\pi}{6}$.

Задание 12

а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}$.

Задание 13

а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\frac{19\pi}{6},\ -3\pi$.

Задание 14

а) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{8\pi}{3},\ 3\pi,\ \frac{10\pi}{3}$.

Задание 15

а) $\left\{\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{11\pi}{3},\ 4\pi,\ \frac{13\pi}{3}$.

Задание 16

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{9\pi}{2},\ \frac{11\pi}{2},\ \frac{19\pi}{4},\ \frac{21\pi}{4}$.

Задание 17

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{19\pi}{6},\ -3\pi,\ -\dfrac{17\pi}{6}$.

Задание 18

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{5\pi}{2},\ 2\pi,\ 3\pi$.

Задание 19

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{17\pi}{6},\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

Задание 20

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 21

а) $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\ \dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{7\pi}{12},\ \dfrac{11\pi}{12},\ \dfrac{13\pi}{12},\ \dfrac{17\pi}{12},\ \dfrac{19\pi}{12},\ \dfrac{23\pi}{12}$.

Задание 22

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{13\pi}{4},\ \dfrac{15\pi}{4},\ \dfrac{17\pi}{4}$.

Задание 23

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{11\pi}{4},\ -3\pi,\ -\dfrac{13\pi}{4}$.

Задание 24

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{14\pi}{3},\ -\dfrac{9\pi}{2},\ -\dfrac{13\pi}{3}$.

Задание 25

а) $\left\{\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{7\pi}{6},\ -\dfrac{5\pi}{6}$.

Задание 26

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
или $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{5\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{4},\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

Задание 27

а) $\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{2}$.

Задание 28

а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\pi,\ \dfrac{5\pi}{4}$.

Задание 29

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{13\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 30

а) $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi,\ 3\pi$.

Задание 31

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 32

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pi\pm\arccos\dfrac{1}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{\pi}{2},\ \pi\pm\arccos\dfrac{1}{4}$.

Задание 33

а) $\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 34

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{17\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{3}$.

Задание 35

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\pi,\ 2\pi,\ \dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 36

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{7\pi}{4},\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

Задание 37

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-3\pi,\ -\dfrac{13\pi}{6},\ -2\pi$.

Задание 38

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{13\pi}{4},\ -3\pi,\ -2\pi$.

Задание 39

а) $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\pi,\ -2\pi,\ -\dfrac{9\pi}{4}$.

Задание 40

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{7\pi}{3},\ -\dfrac{3\pi}{2}$.

Задание 41

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-2\pi,\ -3\pi,\ -\dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 42

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{11\pi}{3},\ -\dfrac{7\pi}{2},\ -\dfrac{10\pi}{3}$.

Задание 43

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{11\pi}{6},\ -2\pi,\ -3\pi$.

Задание 44

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{9\pi}{2},\ \dfrac{14\pi}{3},\ \dfrac{16\pi}{3},\ \dfrac{11\pi}{2}$.

Задание 45

а) $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-2\pi,\ -\pi,\ -\dfrac{5\pi}{6}$.

Задание 46

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{19\pi}{6},\ -3\pi,\ -2\pi$.

Задание 47

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{7\pi}{4}$.

Задание 48

а) $\left\{2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{4\pi}{3},\ 2\pi$.

Задание 49

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{9\pi}{4},\ -2\pi$.

Задание 50

а) $\left\{\pi+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-3\pi,\ -\dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 51

а) $\left\{\pi+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+4\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{3}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\pi,\ -\dfrac{\pi}{3},\ \pi$.

Задание 52

а) $\left\{-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ -\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{37\pi}{12},\ -\frac{41\pi}{12}$.

Задание 53

а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{13\pi}{4},\ -\frac{17\pi}{4}$.

Задание 54

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Задание 55

а) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}$.

Задание 56

а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k, \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$.

Задание 57

а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-2\pi,\ -3\pi,\ -\frac{11\pi}{4}$.

Задание 58

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{4}, \frac{9\pi}{2}$.

Задание 59

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-3\pi,\ -\dfrac{15\pi}{4},\ -4\pi.$

Задание 60

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{7\pi}{2},\ \dfrac{15\pi}{4},\ \dfrac{9\pi}{2}.$

Задание 61

а) $\left\{\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $2\pi,\ \dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi.$

Задание 62

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-3\pi.$

Задание 63

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi k}{3},\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{17\pi}{6},\ -\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{13\pi}{6}.$

Задание 64

а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{21\pi}{4},\ \dfrac{25\pi}{4}.$

Задание 65

а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{15\pi}{4}.$

Задание 66

а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

Задание 67

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2}$.

Задание 68

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{17\pi}{6},\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6}$.

Задание 69

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{13\pi}{6},\ -\frac{17\pi}{6},\ -\frac{19\pi}{6}$.

Задание 70

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$.

Задание 71

а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\frac{23\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{2}$.

Задание 72

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}$.

Задание 73

а) $\left\{\pi+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $3\pi,\ \frac{11\pi}{3},\ \frac{13\pi}{3}$.

Задание 74

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{11\pi}{6},\ \dfrac{13\pi}{6}$.

Задание 75

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{7\pi}{4}$.

Задание 76

а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Задание 77

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{10\pi}{3},\ -\dfrac{8\pi}{3},\ -\dfrac{7\pi}{3}$.

Задание 78

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{21\pi}{4},\ \dfrac{23\pi}{4},\ \dfrac{25\pi}{4}$.

Задание 79

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2}$.

Задание 80

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{2},\ \dfrac{10\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 81

а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{23\pi}{6}$.

Задание 82

а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{11\pi}{6}$.

Задание 83

а) $\left\{\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k,\ \pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$.

Задание 84

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.

Задание 85

а) $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) 6π, $\frac{13\pi}{2}$, 7π.

Задание 86

а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$.

Задание 87

а) $\left\{\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) 2π, $\frac{8\pi}{3}$, 3π.

Задание 88

а) $\left\{\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) 2π, $\frac{17\pi}{6}$, 3π.

Задание 89

а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{\pi}{6}$.

Задание 90

а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 91

а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{17\pi}{4}$.

Задание 92

а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{35\pi}{6}$.

Задание 93

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $-\dfrac{7\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{4}$.

Задание 94

а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\pi,\ 2\pi,\ \dfrac{13\pi}{6}$.

Задание 95

а) $\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2}$.

Задание 96

а) $\left\{\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,
б) $\dfrac{17\pi}{6}$.

Задание 97

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{7\pi}{3},\ -\dfrac{5\pi}{3}$.

Задание 98

а) $\left\{2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{11\pi}{3},\ 4\pi$.

Задание 99

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание 100

а) $\left\{\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{7\pi}{6}$.

Задание 101

а) $\left\{\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{5\pi}{4},\ -\dfrac{13\pi}{4}$.

Задание 102

а) $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{4\pi}{3}$.

Задание 103

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $2\pi,\ \dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi,\ \dfrac{10\pi}{3}$.

Задание 104

а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{17\pi}{4},\ -\dfrac{13\pi}{4},\ -4\pi+\operatorname{arctg}3$.

Задание 105

а) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ или $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$.

профиматика

Ты героически добрался до конца файла — поздравляем!

Сам факт того, что ты изучил этот материал, уже дает тебе большое преимущество в подготовке к ЕГЭ. Однако одной теории недостаточно: для высокого балла нужно уметь доказывать теоремы и решать практические задачи.

Если ты хочешь достичь результата без лишнего стресса и нервов, получить чёткий план от экспертов и поддержку на каждом этапе подготовки, записывайся на наш легендарный курс подготовки к ЕГЭ.

Тебя ждёт:

- Глубокое вводное тестирование – оно покажет твои сильные и слабые стороны и поможет отточить ровно то, с чем есть сложности;
- Индивидуальная траектория подготовки четко на твой желанный балл;
- Вебинары с ДЗ и проверкой экспертов;
- Регулярные пробники;
- Куча полезных материалов: шпоры, методички по каждой задаче;
- Поддержка наставников – тех, кто прошел этот путь до тебя и знает все секреты подготовки;
- Имбовая атмосфера среди таких же замотивированных ребят, как и ты и чат, где мы лично отвечаем на все вопросы.

Записаться на курс

А по промокоду **EGEPROFI** ты получишь скидку в 10% на любой тариф нашего курса!