профиматика

Математика • Русский язык • Обществознание • Физика • Информатика

5340+
учеников прошли наши курсы

5 ЛЕТ
опыт подготовки к экзаменам

1000+
учеников сдали на 90+

97%
ребят учатся в топ-30 вузах страны

Метод рационализации

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

Содержание

1. Метод рационализации в иррациональных неравенствах

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ совпадает по знаку с $a - b$.

Почему это так?

Можем убедиться в этом, домножив $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Тогда по формуле разности квадратов получаем:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ всегда положительно, кроме случая $a = b = 0$ (но в этом случае и $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$), поэтому знак исходного выражения $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ никак не изменится от домножения на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, а значит, совпадёт по знаку с выражением $a - b$.

Следствие. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt{a} - b = \sqrt{a} - \sqrt{b^2}$ совпадает по знаку с $a - b^2$.

1.1. Задачи из видео

Задача 1.1.1

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{3x^2 - x - 4} < 0.$$

Решение задачи

Решение:
Если бы в числителе дроби стояло выражение без корней, то можно было бы свести решение к методу интервалов.
Воспользуемся методом рационализации. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ совпадает по знаку с $a - b$ при всех допустимых a и b.
Значит, $\sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ совпадает по знаку с $x - (2 - x)$ при условии, что корни существуют. Тогда исходное неравенство равносильно системе:

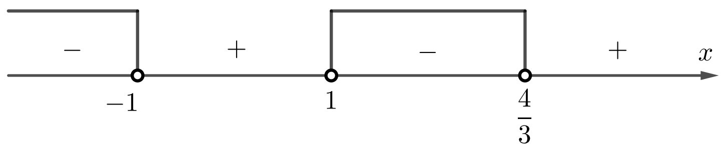
$$\begin{cases} \dfrac{x-(2-x)}{3x^2-x-4} < 0, \\ x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Важно!

В исходном неравенстве мы сравниваем дробь с нулём, поэтому решения неравенства зависят только от знака дроби. При переходе в числителе к выражению, совпадающему по знаку с исходным, знак дроби не меняется. Значит, мы сделали равносильный переход.
Решим первое неравенство системы методом интервалов.

$$\frac{x-(2-x)}{3x^2-x-4} < 0;$$

$$\frac{2(x-1)}{3(x+1)(x-\frac{4}{3})} < 0.$$

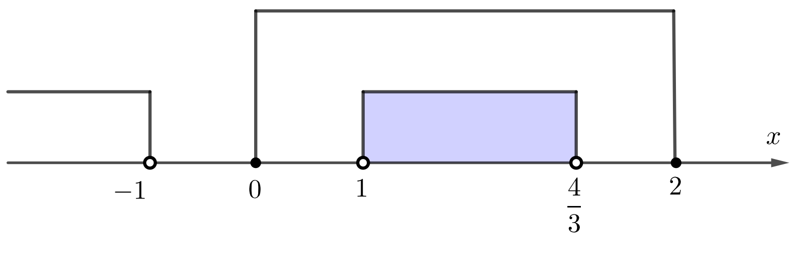


Решением неравенства является совокупность:

$$\left[\begin{aligned} & x < -1, \\ & 1 < x < \frac{4}{3}. \end{aligned} \right.$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & x < -1, \\ & 1 < x < \frac{4}{3}, \end{aligned} \right. \\ x \geqslant 0, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left(1; \dfrac{4}{3}\right)$.

Задача 1.1.2

Решите неравенство:

$$(2x^2 - 15x + 18)\left(\sqrt{4x^2 - 12x + 11} - \sqrt{9x + 6}\right) \leqslant 0.$$

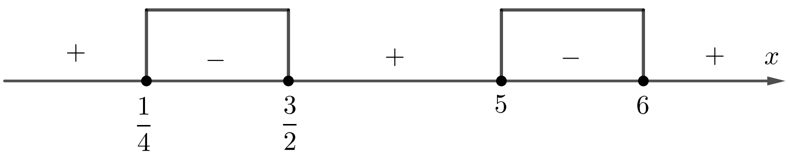
Решение задачи

Решение:
Воспользуемся методом рационализации. Так как $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ при всех **допустимых** значениях переменных совпадает по знаку с $(a - b)$, то $(\sqrt{4x^2 - 12x + 11} - \sqrt{9x + 6})$ совпадает по знаку с $4x^2 - 12x + 11 - (9x + 6)$, при условии, что оба корня существуют.
Получается, что исходное неравенство равносильно системе:

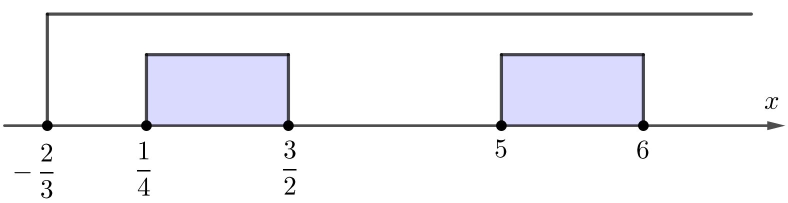
$$\begin{cases} (2x^2 - 15x + 18)(4x^2 - 12x + 11 - (9x + 6)) \leqslant 0, \\ 4x^2 - 12x + 11 \geqslant 0, \\ 9x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 15x + 18)(4x^2 - 21x + 5) \leqslant 0, \\ x \geqslant -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 6)(x - 5)\left(x - \frac{1}{4}\right) \leqslant 0, \\ x \geqslant -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов.



С учётом второго неравенства:



Ответ: $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right] \cup [5; 6]$.

Задача 1.1.3

Решите неравенство:

$$(2x-1)\sqrt{x^2-8x+7}\leqslant 8x-4.$$

Решение задачи

Решение:
Выполним равносильные преобразования:

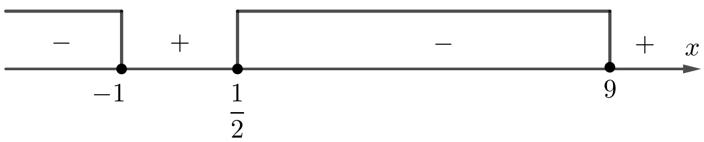
$$(2x-1)\sqrt{x^2-8x+7}-4(2x-1)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x-1)(\sqrt{x^2-8x+7}-4)\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-1)(\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{16})\leqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации. $(\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{16})$ совпадает по знаку с $x^2-8x+7-16$ при условии, что корни существуют. Тогда наше неравенство равносильно системе:

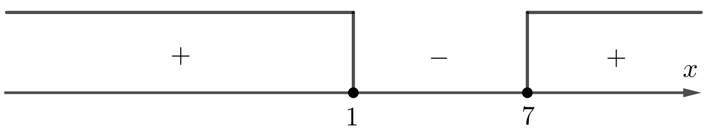
$$\begin{cases}(2x-1)(x^2-8x+7-16)\leqslant 0,\\ x^2-8x+7\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)(x^2-8x-9)\leqslant 0,\\ x^2-8x+7\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)(x-9)(x+1)\leqslant 0,\\ (x-7)(x-1)\geqslant 0.\end{cases}$$

Решением первого неравенства является:

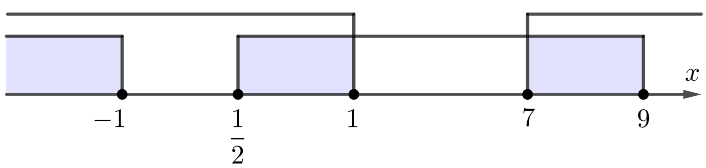


$x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{1}{2};9\right]$.

А решением второго неравенства будет:



Имеем: $x\in(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$.
При пересечении решений получаем:



Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right]\cup[7;9]$.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.2.1

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{9-x}}{3x^2-10x+8}>0.$$

Задача 1.2.2

Решите неравенство:

$$(2x^2+7x-4)(\sqrt{x^2-12x+27}-\sqrt{x-3})\geqslant 0.$$

Задача 1.2.3

Решите неравенство:

$$(3x-2)\sqrt{3x^2-x-14}\leqslant 12x-8.$$

Задача 1.2.4

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\leqslant 0.$$

Задача 1.2.5

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-3x-4}\leqslant 0.$$

Задача 1.2.6

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{3x^2-13x+10} < 0.$$

2. Метод рационализации в неравенствах с модулем

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

Выражение $|a|-|b|$ совпадает по знаку с выражением a^2-b^2.
Почему это так?
Можем убедиться в этом домножив $|a|-|b|$ на $|a|+|b|$, тогда по формуле разности квадратов:

$$(|a|-|b|)(|a|+|b|)=|a|^2-|b|^2=a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Выражение $|a|+|b|$ всегда положительно, кроме случая $a=b=0$ (но в этом случае и $|a|-|b|=0$), поэтому знак исходного выражения $|a|-|b|$ никак не изменится от домножения на $|a|+|b|$, а значит, совпадёт по знаку с выражением a^2-b^2.

Следствие. Если $b\geqslant 0$, то $|a|-b=|a|-|b|$ совпадает по знаку с a^2-b^2.

2.1. Задачи из видео

Задача 2.1.1

Решите неравенство:

$$\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|}\leqslant 0.$$

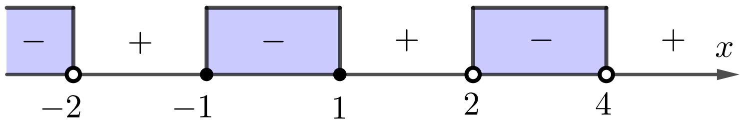
Решение задачи

Решение:
Воспользуемся методом рационализации. Так как $|a|-|b|$ совпадает по знаку с выражением a^2-b^2, то $|3x-2|-|2x-3|$ совпадает по знаку с $(3x-2)^2-(2x-3)^2$, а $|x^2+x-8|-|x^2-x|$ – с выражением $(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2$. Тогда наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(2x-8)(2x^2-8)}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5(x+1)(x-1)}{4(x-4)(x-2)(x+2)}\leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$.

Задача 2.1.2

Решите неравенство:

$$\frac{(x-6)(|x+1|-|x-13|)}{|x-6|-5} \geqslant 0.$$

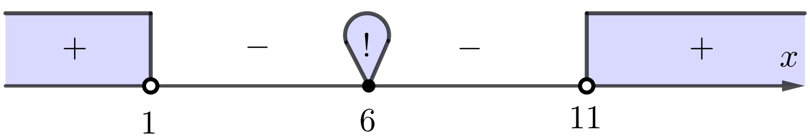
Решение задачи

Решение:
Воспользуемся методом рационализации. Так как $|a|-|b|$ совпадает по знаку с выражением a^2-b^2, то $|x+1|-|x-13|$ совпадает по знаку с $(x+1)^2-(x-13)^2$. Поскольку $5=|5|$, получаем, что $|x-6|-|5|$ совпадает по знаку с выражением $(x-6)^2-5^2$. Тогда наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x-6)((x+1)^2-(x-13)^2)}{(x-6)^2-5^2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-6)(x+1-(x-13))(x+1+x-13)}{(x-6-5)(x-6+5)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{28(x-6)^2}{(x-11)(x-1)} \geqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup \{6\} \cup (11; +\infty)$.

Задача 2.1.3

Решите неравенство:

$$\frac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1} \leqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{|2x^2-x-3|-(x+1)^2}{|3x^2+x-2|-(x+1)^2} \leqslant 0.$$

Поскольку $(x+1)^2 \geqslant 0$, $(x+1)^2 = |(x+1)^2|$, поэтому имеем:

$$\frac{|2x^2-x-3|-|(x+1)^2|}{|3x^2+x-2|-|(x+1)^2|} \leqslant 0.$$

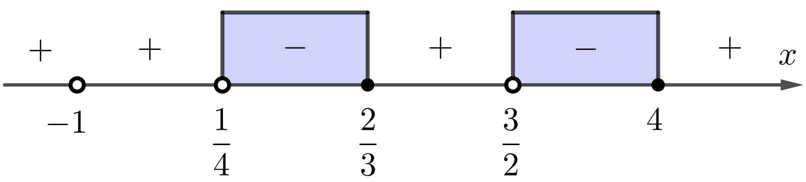
Воспользуемся методом рационализации. В числителе и знаменателе заменим выражения на совпадающие по знаку:

$$\frac{(2x^2-x-3)^2-(x+1)^4}{(3x^2+x-2)^2-(x+1)^4} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x^2-x-3-(x+1)^2)(2x^2-x-3+(x+1)^2)}{(3x^2+x-2-(x+1)^2)(3x^2+x-2+(x+1)^2)} \leqslant 0.$$

Упростив, получим:

$$\frac{(x^2-3x-4)(3x^2+x-2)}{(2x^2-x-3)(4x^2+3x-1)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(x-4)(x+1)^2(x-\frac{2}{3})}{8(x+1)^2(x-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{4})} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$.

Задача 2.1.4

Решите неравенство:

$$\frac{||x^2 - x| - 1| - 1}{||4x + 3| - 2| - 1} \geqslant 0.$$

[Решение задачи](#)

Решение:
Воспользуемся методом рационализации. В числителе и знаменателе заменим выражения на совпадающие по знаку.

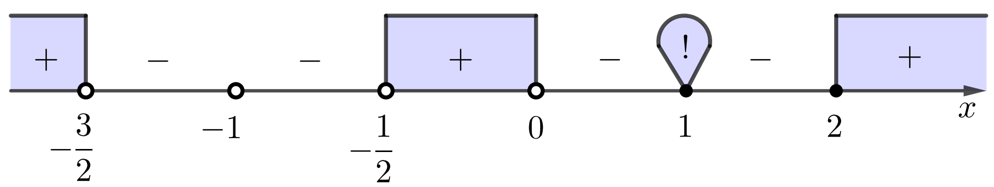
$$\frac{(|x^2 - x| - 1 - 1)|x^2 - x - 1 + 1|}{(|4x + 3| - 2 + 1)(|4x + 3| - 2 - 1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)|x^2 - x|}{(|4x + 3| - 1)(|4x + 3| - 3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)(|x^2 - x| - 0)}{(4x + 3 - 1)(4x + 3 + 1)(4x + 3 + 3)(4x + 3 - 3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)(x^2 - x)^2}{(4x + 2)(4x + 4)(4x + 6)4x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)x^2(x - 1)^2}{32x(2x + 1)(x + 1)(2x + 3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 1)x(x - 1)^2}{32(2x + 1)(x + 1)(2x + 3)} \geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\} \cup [2; +\infty).$

Задача 2.1.5

Решите неравенство:

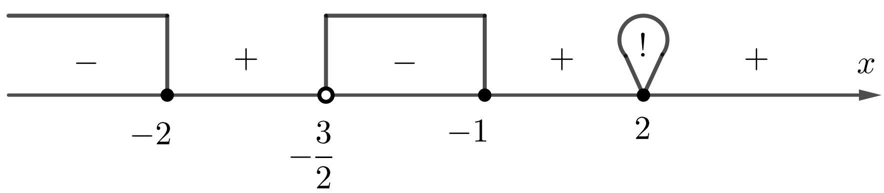
$$\frac{(|x|-\sqrt{x+2})(|x|-2)}{|x+3|-|x|} \leqslant 0.$$

[Решение задачи](#)

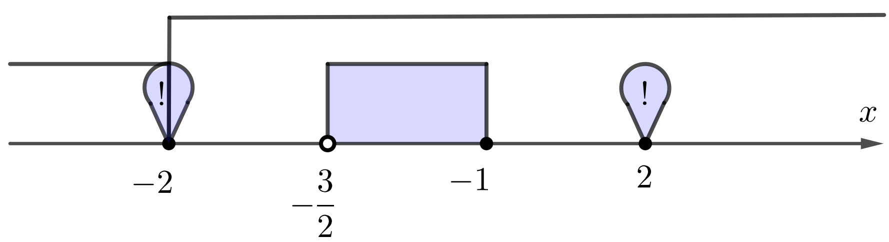
Решение:
Воспользуемся методом рационализации.
1) $|x|-\sqrt{x+2}$ совпадает по знаку с $x^2-(x+2)$, если $x+2 \geqslant 0$.
2) $|x|-2$ совпадает по знаку с $(x-2)(x+2)$.
3) $|x+3|-|x|$ совпадает по знаку с $(x+3-x)(x+3+x)$.
Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-(x+2))(x-2)(x+2)}{3(2x+3)} \leqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x+1)(x+2)}{3(2x+3)} \leqslant 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Решим первое неравенства методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in \{\pm 2\} \cup \left(-\dfrac{3}{2}; -1\right]$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.2.1

Решите неравенство:

$$\frac{|5x-1|-|x-5|}{|x^2+4x-8|-|x^2-4x|} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.2

Решите неравенство:

$$\frac{|9x-2|-3|2x-1|}{|9x^2+3x-8|-3\,|3x^2-x|} \leqslant 0.$$

Задача 2.2.3

Решите неравенство:

$$\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| \geqslant 1.$$

Задача 2.2.4

Решите неравенство:

$$\left|\frac{3x^2-10x+3}{x^2-1}\right| \geqslant 3.$$

Задача 2.2.5

Решите неравенство:

$$\left|x^2-3x+1\right| \geqslant \sqrt{4x^4-4x^2+1}.$$

Задача 2.2.6

Решите неравенство:

$$\frac{|x^2+2x-3|-|x^2+3x+5|}{2x+1} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.7

Решите неравенство:

$$\frac{(x+7)(|x+15|-|x-1|)}{|x+7|-6} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.8

Решите неравенство:

$$\frac{(3x+9)(|2x-1|-|x+7|)}{|3x+9|-6} \leqslant 0.$$

Задача 2.2.9

Решите неравенство:

$$\frac{2\left|x^2-11x+20\right|-x^2}{|3x^2-11x+8|-2} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.10

Решите неравенство:

$$\frac{\big||x^2-2x|+6\big|-2}{\big||2x-1|-5\big|-2} \leqslant 0.$$

Задача 2.2.11

Решите неравенство:

$$\frac{|8x^2-2x-3|-4x^2-4x-1}{2\,|6x^2+x-1|-4x^2-4x-1} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.12

Решите неравенство:

$$\frac{|x^2-x-1|-x^2-4x-4}{|4x^2+2x-1|-x^2-4x-4} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.13

Решите неравенство:

$$\frac{(|x|-\sqrt{5x+36})(|2x|-6)}{|x-2|-|x|} \geqslant 0.$$

Задача 2.2.14

Решите неравенство:

$$\frac{(|x+3|-\sqrt{x+5})(|x+3|-2)}{|x+6|-|x+3|} \leqslant 0.$$

Задача 2.2.15

Решите неравенство:

$$\frac{|\sqrt{x}-2|-\sqrt{x}}{2|x-2|-x} > 0.$$

Задача 2.2.16

Решите неравенство:

$$\frac{|\sqrt{x}-1|-\sqrt{x}}{|2x-1|-x}>0.$$

Задача 2.2.17

Решите неравенство:

$$\frac{|3|3x^2-x|-1|-1}{|3|4x+1|-2|-1}\geqslant 0.$$

3. Метод рационализации в показательных неравенствах

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

1. При $a > 1$ выражение $a^b - a^c$ совпадает по знаку с $b - c$.

Почему это так?

Это следует из монотонности функции $y = a^x$. При $a > 1$ функция $y = a^x$ монотонно возрастает, поэтому:
1) если $b > c$, то $a^b > a^c$, а значит, если $b - c > 0$, то $a^b - a^c > 0$.
2) если $b < c$, то $a^b < a^c$, а значит, если $b - c < 0$, то $a^b - a^c < 0$.
3) если $b = c$, то $a^b = a^c$, а значит, если $b - c = 0$, то $a^b - a^c = 0$.
Значит, выражение $a^b - a^c$ совпадает по знаку с $b - c$.

2. При $0 < a < 1$ выражение $a^b - a^c$ противоположно по знаку выражению $b - c$, а значит, совпадает по знаку с $c - b$.

Почему это так?

Это следует из монотонности функции $y = a^x$. При $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ монотонно убывает, поэтому:
1) если $c > b$, то $a^c < a^b$, а значит, если $c - b > 0$, то $a^b - a^c > 0$.
2) если $c < b$, то $a^c > a^b$, а значит, если $c - b < 0$, то $a^b - a^c < 0$.
3) если $c = b$, то $a^c = a^b$, а значит, если $c - b = 0$, то $a^b - a^c = 0$.
Значит, выражение $a^b - a^c$ совпадает по знаку с $c - b$.

3. При $a > 0$, $a \neq 1$ выражение $a^b - a^c$ совпадает по знаку с $(a - 1)(b - c)$.

Почему это так?

Это обобщение пунктов 1 и 2. Утверждение 3 объединяет в себе первые два. Если $0 < a < 1$, множитель $(a-1)$ отрицателен и меняет знак выражения на противоположный. При решении задач можно использовать только его.

<u>Следствие.</u> Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^x - 1 = a^x - a^0$ совпадает по знаку с $(a - 1)x$.

3.1. Задачи из видео

Задача 3.1.1

Решите неравенство:

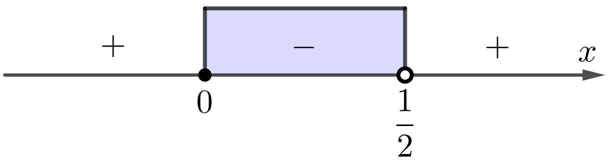
$$\frac{2^x - 1}{2x - 1} \leqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Воспользуемся методом рационализации.
Так как выражение $a^b - a^c$ совпадает по знаку с $b - c$ при $a > 1$, то $2^x - 2^0$ совпадает по знаку с $x - 0 = x$. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{x}{2x - 1} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 3.1.2

Решите неравенство:

$$\frac{625^{2x^2+3x-1} - (0{,}2)^{8x^2+4x-1}}{6^x - 1} \leqslant 0.$$

Решение задачи

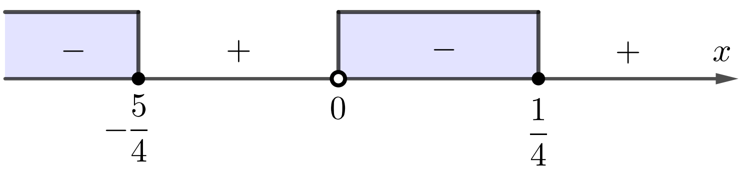
Решение: Для начала заметим, что $625 = 5^4$, а $0{,}2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 5^{-1}$.
Получаем:

$$\frac{5^{8x^2+12x-4} - 5^{-8x^2-4x+1}}{6^x - 6^0} \leqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.
1) $5 > 1$, значит $5^{8x^2+12x-4} - 5^{-8x^2-4x+1}$ совпадает по знаку с $8x^2 + 12x - 4 - (-8x^2 - 4x + 1) = 16x^2 + 16x - 5$.
2) $6 > 1$, значит $6^x - 6^0$ совпадает по знаку с x.
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{16x^2 + 16x - 5}{x} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right)}{x} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right] \cup \left(0; \dfrac{1}{4}\right]$.

Задача 3.1.3

Решите неравенство:

$$\frac{3^{x^2}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-4x}}{|2x+3|-1} \leqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:

Для начала заметим, что $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Получаем:

$$\frac{3^{x^2}-3^{-1+2x}}{|2x+3|-|1|} \leqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.

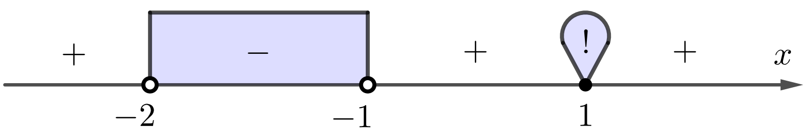
1) $3>1$, значит $3^{x^2}-3^{-1+2x}$ совпадает по знаку с x^2+1-2x.

2) $|2x+3|-|1|$ совпадает по знаку с $(2x+3-1)(2x+3+1)$.

Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{x^2-2x+1}{(2x+2)(2x+4)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4(x+1)(x+2)} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-2; -1) \cup \{1\}$.

Задача 3.1.4

Решите неравенство:

$$(0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 10^{x^2} + (0{,}08)^x.$$

Решение задачи

Решение:
Для начала заметим, что $10^{x^2} = 2^{x^2} \cdot 5^{x^2}$; $0{,}04^x = 5^{-2x}$, а $0{,}08^x = 2^x \cdot 0{,}04^x = 2^x \cdot 5^{-2x}$.
Получаем:

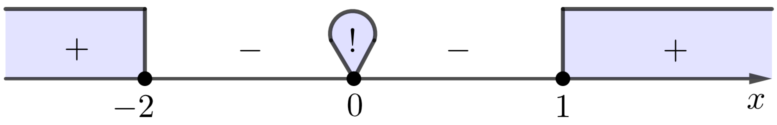
$$5^{-2x} \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 5^{x^2} \cdot 2^{x^2} + 2^x \cdot 5^{-2x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5^{x^2}(2^{x^2} - 2^x) - 5^{-2x}(2^{x^2} - 2^x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^{x^2} - 2^x)(5^{x^2} - 5^{-2x}) \geqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.
1) $2 > 1$, значит $2^{x^2} - 2^x$ совпадает по знаку с $x^2 - x$.
2) $5 > 1$, значит $5^{x^2} - 5^{-2x}$ совпадает по знаку с $x^2 + 2x$.
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2 - x)(x^2 + 2x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-1)(x+2) \geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Задача 3.1.5

Решите неравенство:

$$\frac{35^{|x|}-5^{|x|}-5\cdot 7^{|x|}+5}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\geqslant 0.$$

Решение задачи

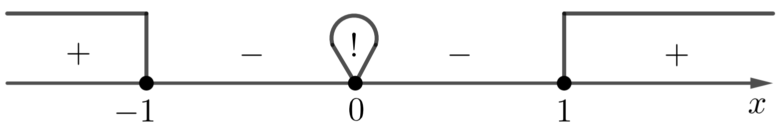
Решение:
Для начала заметим, что:
1) $35^{|x|}=5^{|x|}\cdot 7^{|x|}$.
2) $2^{\sqrt{x+2}}>0$, а $2^{\sqrt{x+2}}+1>1$ при $x\geqslant -2$.
Значит, знаменатель положителен при $x\geqslant -2$.
Получаем:

$$\begin{cases}5^{|x|}\cdot(7^{|x|}-1)-5(7^{|x|}-1)\geqslant 0,\\ x\geqslant -2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(7^{|x|}-1)(5^{|x|}-5)\geqslant 0,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

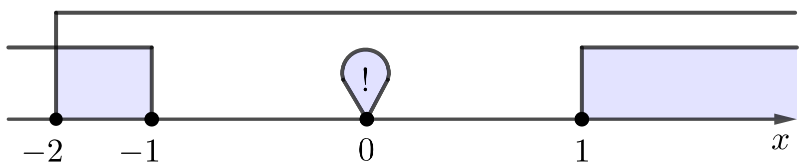
Воспользуемся методом рационализации.
1) $7>1$, значит $7^{|x|}-1$ совпадает по знаку с $|x|$, а он, в свою очередь, совпадает по знаку с x^2.
2) $5>1$, значит $5^{|x|}-5$ совпадает по знаку с $|x|-1$, что совпадает по знаку с $(x-1)(x+1)$.
Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2(x-1)(x+1)\geqslant 0,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x\in[-2;-1]\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$.

Задача 3.1.6

Решите неравенство:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{(0{,}2)^{x+2}-(0{,}04)^{x+1}} \geqslant 0.$$

Решение задачи

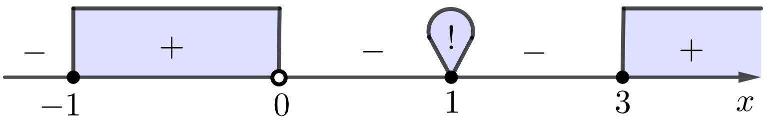
Решение:
Наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{(0{,}2)^{x+2}-(0{,}2)^{2x+2}} \geqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.
1) $3>1$, значит $3^{|x^2-2x-1|}-3^2$ совпадает по знаку с $|x^2-2x-1|-2$, что, в свою очередь, совпадает по знаку с $(x^2-2x-1-2)(x^2-2x-1+2)$.
2) $0{,}2<1$, значит $(0{,}2)^{x+2}-(0{,}2)^{2x+2}$ совпадает по знаку с $(2x+2-x-2)$.
Получаем, что неравенство равносильно:

$$\frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{0{,}8x} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in [-1;0) \cup \{1\} \cup [3;+\infty)$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2.1

Решите неравенство:

$$\frac{5^x - 1}{x - 5} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.2

Решите неравенство:

$$\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leqslant 0.$$

Задача 3.2.3

Решите неравенство:

$$\frac{1024^{2x^2+x+1} - 0{,}25^{5x^2-3x-6}}{7^x - 1} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.4

Решите неравенство:

$$\frac{25^{x^2+x-10} - (0{,}2)^{x^2-2x-7}}{0{,}5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leqslant 0.$$

Задача 3.2.5

Решите неравенство:

$$\frac{2^{x^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8x-24}}{|5x+10| - 5} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.6

Решите неравенство:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.7

Решите неравенство:

$$\frac{0{,}2^{\left|x^2-4x+2\right|}-0{,}04}{3-x} \leqslant 0.$$

Задача 3.2.8

Решите неравенство:

$$\frac{2^{|2x^2-16x+19|}-32}{0{,}5^{x+8}-0{,}25^{x+5}} \leqslant 0.$$

Задача 3.2.9

Решите неравенство:

$$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64 \leqslant 0.$$

Задача 3.2.10

Решите неравенство:

$$3^{x+3}-x^3\cdot 3^x \leqslant 81-3x^3.$$

Задача 3.2.11

Решите неравенство:

$$\frac{10^x - 25\cdot 2^x - 2\cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.12

Решите неравенство:

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geqslant 0.$$

Задача 3.2.13

Решите неравенство:

$$(0{,}125)^x \cdot 3^{x^2} - 3^{x^2}\cdot 2^x + 6^x \geqslant (0{,}375)^x.$$

Задача 3.2.14

Решите неравенство:

$$6^{x^2} + 81\cdot 4^x \leqslant 4^x \cdot 3^{x^2} + 81\cdot 2^{x^2}.$$

Задача 3.2.15

Решите неравенство:

$$\frac{33^{|x|} - 3^{|x|} - 3\cdot 11^{|x|} + 3}{4^{\sqrt{x+3}} + 1} \leqslant 0.$$

Задача 3.2.16

Решите неравенство:

$$\frac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 5\cdot 2^x - 4x + 20} \leqslant \frac{1}{x-5}.$$

Задача 3.2.17

Решите неравенство:

$$\frac{2\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^{x}\cdot 2^{x+1}+4^{x+1}}{10^{x}-2^{2x}}\leqslant 1.$$

Задача 3.2.18

Решите неравенство:

$$\frac{(x^2-4x+6)^{x^2-4x+6}-(x^2-4x+6)^2}{(0{,}25)^{5x-x^2}-(0{,}125)^{x}}\geqslant 0.$$

4. Метод рационализации в логарифмических неравенствах с постоянным основанием

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

1. При $b > 0$, $c > 0$, $a > 1$ выражение $(\log_a b - \log_a c)$ совпадает по знаку с выражением $b - c$.

Почему это так?

Это следует из монотонности функции $y = \log_a x$. При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает, поэтому:
1) если $b > c$, то $\log_a b > \log_a c$, а значит, если $b - c > 0$, то $\log_a b - \log_a c > 0$.
2) если $b < c$, то $\log_a b < \log_a c$, а значит, если $b - c < 0$, то $\log_a b - \log_a c < 0$.
3) если $b = c$, то $\log_a b = \log_a c$, а значит, если $b - c = 0$, то $\log_a b - \log_a c = 0$.
Значит, выражение $\log_a b - \log_a c$ совпадает по знаку с $b - c$.

2. При $b > 0$, $c > 0$, $0 < a < 1$ выражение $(\log_a b - \log_a c)$ противоположно по знаку с выражением $b - c$, то есть совпадает по знаку с выражением $c - b$.

Почему это так?

Это следует из монотонности функции $y = \log_a x$. При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ монотонно убывает, поэтому:
1) если $c > b$, то $\log_a c < \log_a b$, а значит, если $c - b > 0$, то $\log_a b - \log_a c > 0$.
2) если $c < b$, то $\log_a c > \log_a b$, а значит, если $c - b < 0$, то $\log_a b - \log_a c < 0$.
3) если $c = b$, то $\log_a c = \log_a b$, а значит, если $c - b = 0$, то $\log_a b - \log_a c = 0$.
Значит, выражение $(\log_a b - \log_a c)$ совпадает по знаку с $c - b$.

3. При $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ выражение $\log_a b - \log_a c$ совпадает по знаку с выражением $(a - 1)(b - c)$.

Почему это так?

Это обобщение пунктов 1 и 2. Утверждение 3 объединяет в себе первые два. При решении задач, можно использовать только его.

Следствие 1. При $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, $\log_a b$ совпадает по знаку с $(a - 1)(b - 1)$

Почему это так?

Потому что $\log_a b = \log_a b - \log_a 1$, и, если применить 3 пункт, то получится $(a - 1)(b - 1)$.

4.1. Задачи из видео

Задача 4.1.1

Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-5x+2}{\log_{11}(x+2)} \leqslant 0.$$

Решение задачи

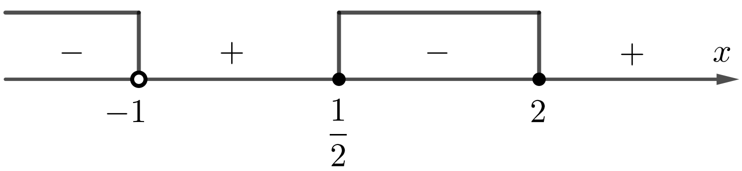
Решение:
Поскольку $\log_{11} 1 = 0$, наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{\log_{11}(x+2)-\log_{11} 1} \leqslant 0.$$

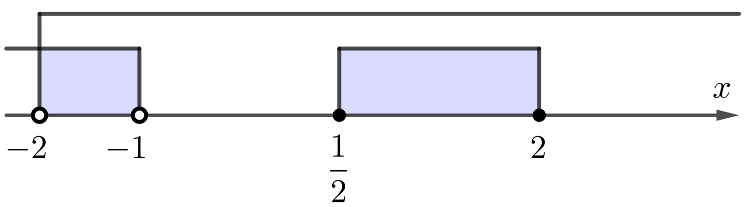
Воспользуемся методом рационализации. Т.к. $11 > 1$, то $\log_{11}(x+2)-\log_{11} 1$ совпадает по знаку с $(x+2)-1$ при $x+2>0$. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{x+1} \leqslant 0, \\ x > -2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in (-2;-1) \cup \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Задача 4.1.2

Решите неравенство:

$$(8-x)(x+4)\log_{0,3}(x-1) \geqslant 0.$$

Решение задачи

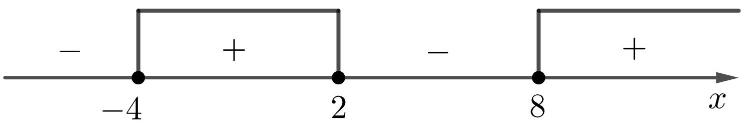
Решение:
Поскольку $\log_{0,3} 1 = 0$, наше неравенство равносильно:

$$(8-x)(x+4)(\log_{0,3}(x-1) - \log_{0,3} 1) \geqslant 0.$$

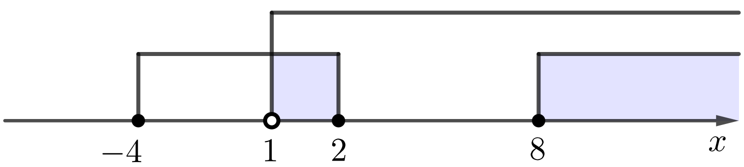
Воспользуемся методом рационализации. $\log_{0,3}(x-1) - \log_{0,3} 1$ совпадает по знаку с $(0{,}3-1)(x-1-1) = -0{,}7(x-2)$ при $x-1>0$. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} -0{,}7(8-x)(x+4)(x-2) \geqslant 0, \\ x > 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x+4)(x-2) \geqslant 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in (1; 2] \cup [8; +\infty)$.

Задача 4.1.3

Решите неравенство:

$$\frac{\log_3(8x^2-11x+4)}{\log_3 x} < 2.$$

Решение задачи

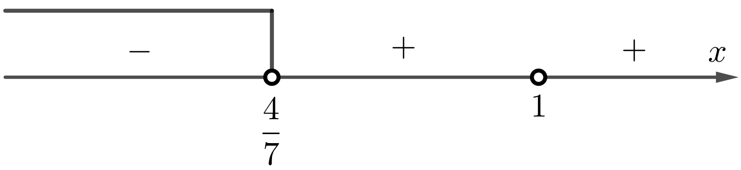
Решение:
Наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_3(8x^2-11x+4) - 2\log_3 x}{\log_3 x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_3(8x^2-11x+4) - \log_3 x^2}{\log_3 x} < 0.$$

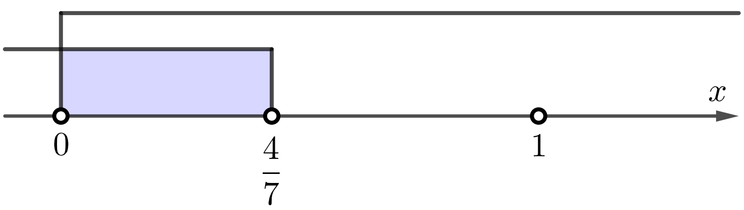
Воспользуемся методом рационализации.
1) Основание $3 > 1$, значит, $\log_3(8x^2-11x+4) - \log_3 x^2$ совпадает по знаку с $8x^2-11x+4-x^2 = 7x^2-11x+4$ при $x^2 > 0$ (т.е. $x \neq 0$), $8x^2-11x+4 > 0$. Последнее неравенство верно при любых x.
2) $3 > 1$, значит, $\log_3 x$ совпадает по знаку с $(x-1)$ при $x > 0$. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2(7x^2-11x+4)}{2(x-1)} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{7(x-1)(x-\frac{4}{7})}{x-1} < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{4}{7}\right)$.

Задача 4.1.4

Решите неравенство:

$$\frac{\log_4 x^2 + \log_{0,25}(6x-9)}{x-8} \geqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Для начала заметим, что $0{,}25 = 4^{-1}$.
Получаем:

$$\frac{\log_4 x^2 - \log_4(6x-9)}{x-8} \geqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.
Основание $4 > 1$, значит, $\log_4 x^2 - \log_4(6x-9)$ совпадает по знаку с $(x^2 - 6x + 9) = (x-3)^2$ при $6x - 9 > 0$ и $x \neq 0$.
Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{3(x-3)^2}{x-8} \geqslant 0, \\ 6x - 9 > 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{x-8} \geqslant 0, \\ x > 1{,}5. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:

При пересечении с решением второго неравенства получаем:

Ответ: $x \in \{3\} \cup (8; +\infty)$.

Задача 4.1.5

Решите неравенство:

$$\frac{(\log_2(x-1)+\log_2(2x-1))\,(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \leqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:

Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(\log_2(2x^2-3x+1))\,(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \leqslant 0, \\ x>1. \end{cases}$$

Воспользуемся методом рационализации.

1) $2>1$, значит, $\log_2(2x^2-3x+1)$ совпадает по знаку с $(2x^2-3x+1-1)=2x(x-1{,}5)$ (при $x>1$ аргумент логарифма положителен).

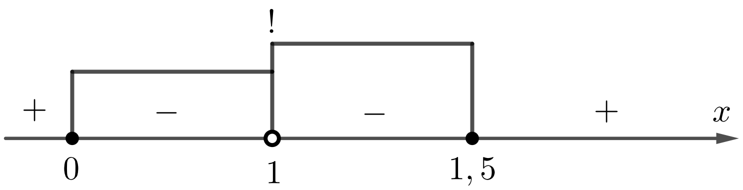
2) $|x|-|x-2|$ совпадает по знаку с $(x-(x-2))(x+x-2)=4(x-1)$.

3) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}$ совпадает по знаку с $3x-2-(2x-1)=x-1$ при $x>\frac{2}{3}$.

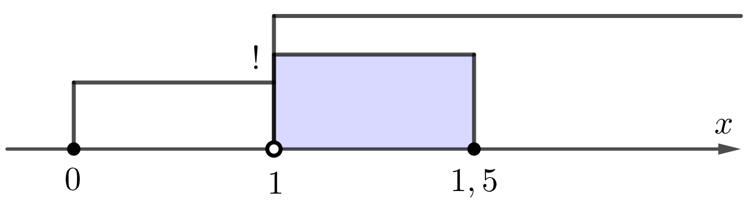
Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{8x(x-1{,}5)(x-1)}{x-1} \leqslant 0, \\ x>1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x\in(1;1{,}5]$.

Задача 4.1.6

Решите неравенство:

$$(4^{x^2-x-6}-1)\cdot\log_{0,25}(4^{x^2+2x+2}-3)\leqslant 0.$$

Решение задачи

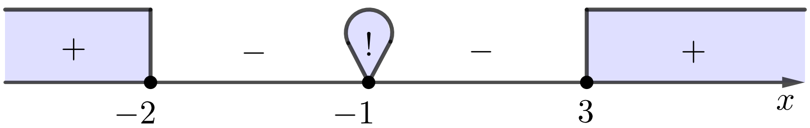
Решение:
$4^{x^2+2x+2}=4^{(x+1)^2+1}\geqslant 4$, значит, $4^{x^2+2x+2}-3\geqslant 1>0$ при любых действительных x.
Воспользуемся методом рационализации.
1) $4>1$, значит, $4^{x^2-x-6}-1$ совпадает по знаку с x^2-x-6.
2) $0{,}25<1$, значит, $\log_{0,25}(4^{x^2+2x+2}-3)$ совпадает по знаку с $-(4^{x^2+2x+2}-3-1)$.
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$-(x^2-x-6)(4^{x^2+2x+2}-4)\leqslant 0.$$

Ещё раз воспользуемся методом рационализации. $4^{x^2+2x+2}-4$ совпадает по знаку с $x^2+2x+2-1$. Получаем:

$$-(x^2-x-6)(x^2+2x+1)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)(x+2)(x+1)^2\geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2.1

Решите неравенство:

$$\frac{1-2x}{\log_2(x+2)}\leqslant 0.$$

Задача 4.2.2

Решите неравенство:

$$\frac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)} \geqslant 0.$$

Задача 4.2.3

Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|} \geqslant 0.$$

Задача 4.2.4

Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-11x+12}{\log_5|x-2|} \geqslant 0.$$

Задача 4.2.5

Решите неравенство:

$$(5-x)(x+7)\log_{0,7}(x-5) \leqslant 0.$$

Задача 4.2.6

Решите неравенство:

$$(4x^2-16x+7)\log_2(x-3) > 0.$$

Задача 4.2.7

Решите неравенство:

$$\frac{\log_5(12x^2-18x+7)}{\log_5 x} > 2.$$

Задача 4.2.8

Решите неравенство:

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)}\leqslant 0.$$

Задача 4.2.9

Решите неравенство:

$$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)}\leqslant 0.$$

Задача 4.2.10

Решите неравенство:

$$\frac{\log_5\left(x^2\right)+\log_{0,2}\left(x+72\right)}{x-9}\leqslant 0.$$

Задача 4.2.11

Решите неравенство:

$$\frac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8}\geqslant 0.$$

Задача 4.2.12

Решите неравенство:

$$\frac{\log_7(8x+7)}{\log_8(7x+8)}\leqslant 0.$$

Задача 4.2.13

Решите неравенство:

$$\frac{\log_5(5x+6)}{\log_6(6x+5)} \leqslant 0.$$

Задача 4.2.14

Решите неравенство:

$$\frac{\log_3(x-1)}{\log_3(3x-1)} < 1.$$

Задача 4.2.15

Решите неравенство:

$$\frac{\log_2(x+1)}{\log_2(3x+5)} < 1.$$

Задача 4.2.16

Решите неравенство:

$$\left(3^{4x-x^2-3}-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+5\right) \geqslant 0.$$

Задача 4.2.17

Решите неравенство:

$$\left(7^{x^2-13x+30}-1\right)\log_{0,3}\left(7^{x^2-13x+41}-6\right) \geqslant 0.$$

Задача 4.2.18

Решите неравенство:

$$\frac{\left(\log_3(x-3)+\log_3(3x-7)\right)\left(|3x|-|3x-7|\right)}{\sqrt{7x-3}-\sqrt{5x-9}} \geqslant 0.$$

Задача 4.2.19

Решите неравенство:

$$\frac{\log_{0,2}(x-2)}{(4^x-8)\left(|x|-5\right)} \geqslant 0.$$

Задача 4.2.20

Решите неравенство:

$$\frac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|} \leqslant 0.$$

5. Метод рационализации в логарифмических неравенствах с переменным основанием

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

> В случае переменного основания основной идеей для нас будет рассказанный ранее факт: При $b, c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, выражение $\log_a b - \log_a c$ совпадает по знаку с выражением $(a-1)(b-c)$.

5.1. Задачи из видео

Задача 5.1.1

Решите неравенство:

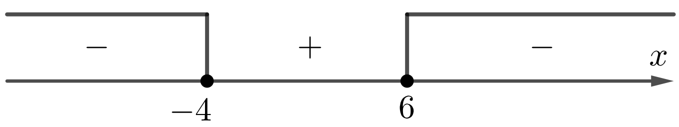
$$\log_{7-x}(2x+9) \leqslant 0.$$

Решение задачи

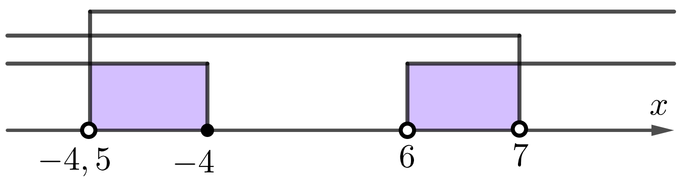
Решение:
Воспользуемся методом рационализации.
$\log_{7-x}(2x+9)$ совпадает по знаку с $(7-x-1)(2x+9-1) = (6-x)(2x+8)$ при $2x-9>0$; $7-x>0$; $7-x \neq 1$.
Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (6-x)(x+4) \leqslant 0, \\ x > -4{,}5, \\ x < 7, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x \in (-4{,}5; -4] \cup (6; 7)$.

Задача 5.1.2

Решите неравенство:

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1.$$

Решение задачи

Решение:
Исходное неравенство равносильно неравенству:

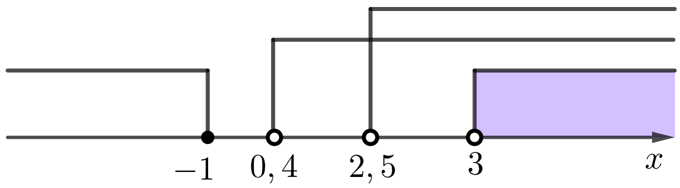
$$\log_{2x-5}(5x-2) - \log_{2x-5}(2x-5) \geqslant 0$$

Воспользуемся методом рационализации.
$\log_{2x-5}(5x-2) - \log_{2x-5}(2x-5)$ совпадает по знаку с $(2x-5-1)(5x-2-(2x-5)) = (2x-6)(3x+3)$ при $2x-5>0;\ 2x-5 \neq 1;\ 5x-2>0$.
Получаем:

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) \geqslant 0, \\ x > 0{,}4, \\ x > 2{,}5, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:

При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Задача 5.1.3

Решите неравенство:

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \leqslant 2.$$

Решение задачи

Решение:
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \geqslant 0$$

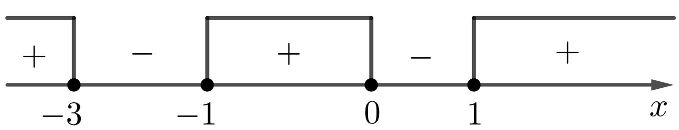
Воспользуемся методом рационализации.
$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2$ совпадает по знаку с $(|x+2|-1)(4+7x-2x^2-(x+2)^2) =$ $= (|x+2|-1)(3x-3x^2)$ при $|x+2|>0;\ |x+2|\neq 1;\ 4+7x-2x^2>0$.
Получаем:

$$\begin{cases} x(|x+2|-1)(1-x) \leqslant 0, \\ 4+7x-2x^2>0, \\ |x+2|>0, \\ |x+2|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(|x+2|-1)(x-1) \geqslant 0, \\ (x-4)(x+0{,}5)<0, \\ x\neq -2, \\ x\neq -3, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

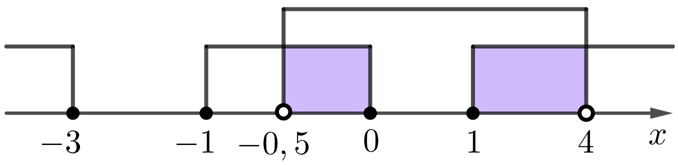
Воспользуемся ещё раз методом рационализации. $|x+2|-1$ совпадает по знаку с $(x+1)(x+3)$.
Получаем:

$$\begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geqslant 0, \\ -0{,}5<x<4. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in (-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$.

Задача 5.1.4

Решите неравенство:

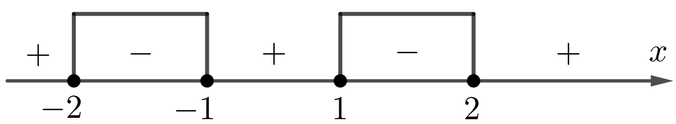
$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leqslant 0.$$

Решение задачи

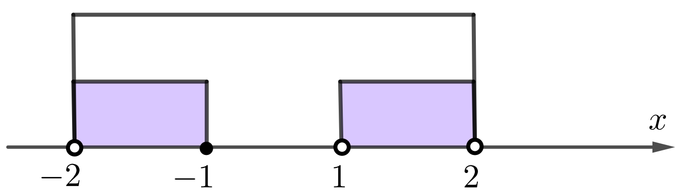
Решение:
Воспользуемся методом рационализации.
1) $\log_{2-x}(x+2)$ совпадает по знаку с $(2-x-1)(x+2-1) = (1-x)(x+1)$ при $2-x > 0$; $2-x \neq 1$; $x+2 > 0$.
2) $\log_{x+3}(3-x)$ совпадает по знаку с $(3-x-1)(x+3-1) = (2-x)(x+2)$ при $x+3 > 0$; $x+3 \neq 1$; $3-x > 0$. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (1-x)(x+1)(2-x)(x+2) \leqslant 0, \\ x > -2, \\ x < 2, \\ x > -3, \\ x < 3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(x+1)(2-x)(x+2) \leqslant 0, \\ -2 < x < 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных выражений получаем:



Ответ: $x \in (-2; 1] \cup (1; 2)$.

Задача 5.1.5

Решите неравенство:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

[Решение задачи](#)

Решение:

Заметим, что $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) = \dfrac{1}{\log_{3-x}(12x^2-41x+35)}$ и $\log_{2x^2-5x+3}(3-x) =$ $= \dfrac{1}{\log_{3-x}(2x^2-5x+3)}$ при $3-x \neq 1$.

Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{1}{\log_{3-x}(12x^2-41x+35)} \geqslant \frac{1}{\log_{3-x}(2x^2-5x+3)} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\log_{3-x}(2x^2-5x+3) - \log_{3-x}(12x^2-41x+35)}{\log_{3-x}(12x^2-41x+35)\cdot\log_{3-x}(2x^2-5x+3)} \geqslant 0.$$

Найдём допустимые значения x для левой части неравенства:

$$\begin{cases} 12x^2-41x+35>0,\\ 12x^2-41x+35\neq 1,\\ 2x^2-5x+3>0,\\ 2x^2-5x+3\neq 1,\\ 3-x>0,\\ 3-x\neq 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(x-\frac{5}{3})(x-\frac{7}{4})>0,\\ 12(x-2)(x-\frac{17}{12})\neq 0,\\ 2(x-1)(x-\frac{3}{2})>0,\\ 2(x-2)(x-\frac{1}{2})\neq 0,\\ x<3,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Воспользуемся методом рационализации.

1) $\log_{3-x}(2x^2-5x+3)-\log_{3-x}(12x^2-41x+35)$ совпадает по знаку с $(3-x-1)(2x^2-5x+3-(12x^2-41x+35))=(2-x)(-10x^2+36x-32)=$
$=-10(2-x)(x-2)(x-1{,}6)$ при допустимых x.

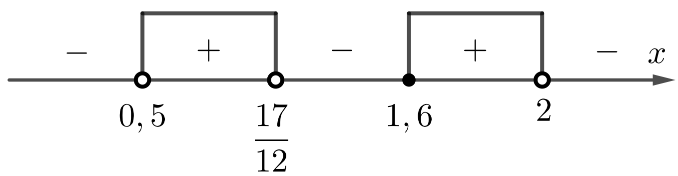
2) $\log_{3-x}(2x^2-5x+3)$ совпадает по знаку с $(3-x-1)(2x^2-3x+3-1)=2(2-x)(x-2)(x-\frac{1}{2})$ при допустимых x.

3) $\log_{3-x}(12x^2-41x+35)$ совпадает по знаку с $(3-x-1)(12x^2-41x+35-1)=$
$=12(2-x)(x-2)(x-\frac{17}{12})$ при допустимых x.

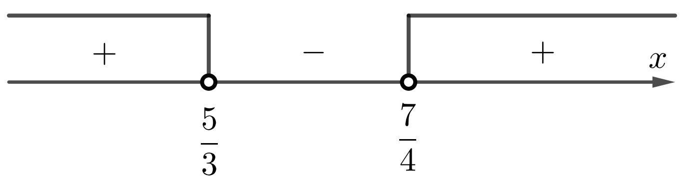
Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{-10(x-2)^3(x-1{,}6)}{24(x-2)^4(x-\frac{1}{2})(x-\frac{17}{12})}\geqslant 0,\\ 12(x-\frac{5}{3})(x-\frac{7}{4})>0,\\ 2(x-1)(x-\frac{3}{2})>0,\\ x<3.\end{cases}$$

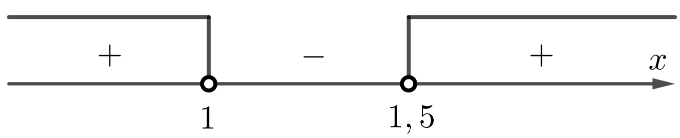
Решим первое неравенство методом интервалов:



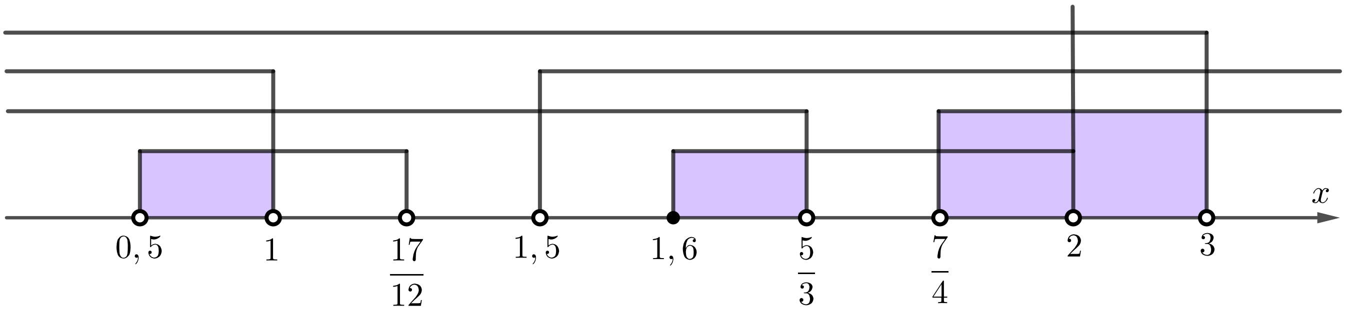
Решим второе неравенство методом интервалов:



Решим третье неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных выражений получаем:



Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[1{,}6; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Задача 5.1.6

Решите неравенство:

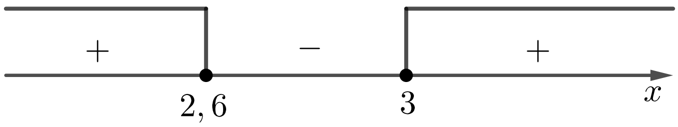
$$(5x-13) \cdot \log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0.$$

Решение задачи

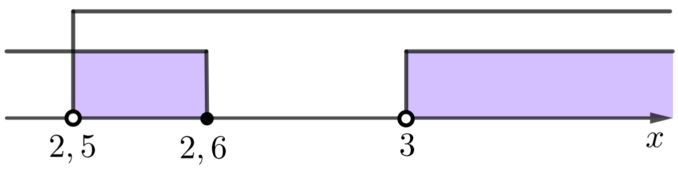
Решение:
Воспользуемся методом рационализации. $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)$ совпадает по знаку с $(2x-5-1)(x^2-6x+10-1) = (2x-6)(x-3)^2$ при $2x-5>0;\ 2x-5 \neq 1;\ x^2-6x+10>0$.
Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (5x-13)(2x-6)(x-3)^2 \geqslant 0, \\ x > 2{,}5, \\ x^2-6x+10 > 0, \\ x \neq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-13)(x-3)^3 \geqslant 0, \\ x > 2{,}5, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x \in (2{,}5; 2{,}6] \cup (3; +\infty)$.

Задача 5.1.7

Решите неравенство:

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 \geqslant 4.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что $4 = \log_{x+1}(x+1)^4$.
Исходное неравенство равносильно неравенству:

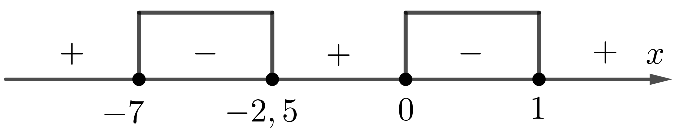
$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 - \log_{x+1}(x+1)^4 \geqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации.
$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 - \log_{x+1}(x+1)^4$ совпадает по знаку с $(x+1-1)((x^2+x-6)^2-(x+1)^4) =$
$= x(x^2+x-6+x^2+2x+1)(x^2+x-6-x^2-2x-1) = x(2x^2+3x-5)(-x-7)$ при допустимых x.
Получаем:

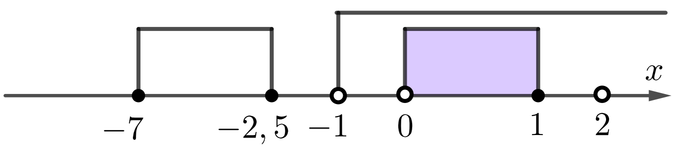
$$\begin{cases} x(2x^2+3x-5)(-x-7) \geqslant 0, \\ x+1>0, \\ (x^2+x-6)^2>0, \\ x+1 \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1)(x+2{,}5)(x+7) \leqslant 0, \\ x>-1, \\ (x-2)(x+3) \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1)(x+2{,}5)(x+7) \leqslant 0, \\ x>-1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x \in (0; 1]$.

Задача 5.1.8

Решите неравенство:

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\left(\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\right)\leqslant -2.$$

Решение задачи

Решение:

Заметим, что $2x^2+9x+7=(x+1)(2x+7)$, значит $\log_{x+1}\left(\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\right)=\log_{x+1}\left(\frac{2x+7}{(x+1)^3}\right)=$ $\log_{x+1}(2x+7)-\log_{x+1}(x+1)^3=\log_{x+1}(2x+7)-3$.
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot(\log_{x+1}(2x+7)-3)\leqslant -2.$$

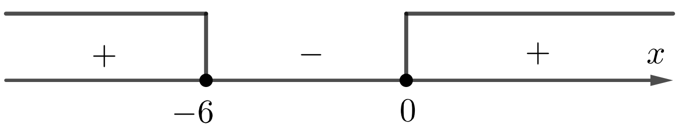
Сделаем замену: $t=\log_{x+1}(2x+7)$.
Получаем:

$$t^2-3t+2\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad (t-1)(t-2)\geqslant 0,$$

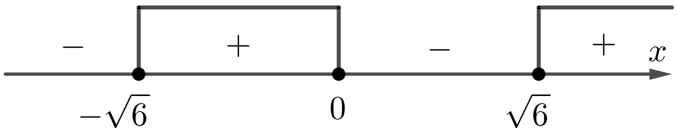
что равносильно системе:
$\begin{cases} t\geqslant 1,\\ t\leqslant 2.\end{cases}$
Вернёмся к исходной переменной:
$\begin{cases}\log_{x+1}(2x+7)\geqslant 1,\\ \log_{x+1}(2x+7)\leqslant 2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{x+1}(2x+7)-\log_{x+1}(x+1)\geqslant 0,\\ \log_{x+1}(2x+7)-\log_{x+1}(x+1)^2\leqslant 0.\end{cases}$
Воспользуемся методом рационализации.
1) $\log_{x+1}(2x+7)-\log_{x+1}(x+1)$ совпадает по знаку с $(x+1-1)(2x+7-x-1)=x(x+6)$ при допустимых x.
2) $\log_{x+1}(2x+7)-\log_{x+1}(x+1)^2$ совпадает по знаку с $(x+1-1)(2x+7-x^2-2x-1)=-x(x^2-6)$ при допустимых x.
Получаем:

$$\begin{cases} x(x+6)\geqslant 0,\\ -x(x^2-6)\leqslant 0,\\ 2x+7>0,\\ x+1>0,\\ x+1\neq 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+6)\geqslant 0,\\ x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\geqslant 0,\\ x>-3{,}5,\\ x>-1,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

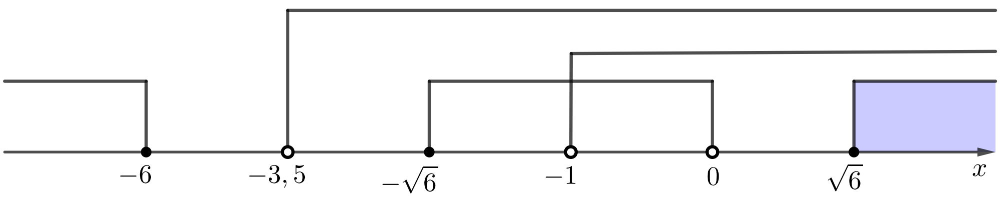
Решим первое неравенство методом интервалов:



Решим второе неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x \in [\sqrt{6}; +\infty)$.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.2.1

Решите неравенство:

$$\log_{5-x}(7x+8) \geqslant 0.$$

Задача 5.2.2

Решите неравенство:

$$\log_{3x-7}(7x-5) \geqslant 0.$$

Задача 5.2.3

Решите неравенство:

$$\log_{6x-5}(15x-2) \geqslant 1.$$

Задача 5.2.4

Решите неравенство:

$$\log_{14x-5}(35x-2) \geqslant 1.$$

Задача 5.2.5

Решите неравенство:

$$\log_{x+3}\left(x^2+3x+2\right)^2 \leqslant 4.$$

Задача 5.2.6

Решите неравенство:

$$\log_{\frac{x}{2}}(x^2-2x+1) \geqslant 2.$$

Задача 5.2.7

Решите неравенство:

$$\log_{\frac{9x-1}{3x+2}}\left(18x^2+3x-1\right) \geqslant \log_{\frac{9x-1}{3x+2}}\left(33x-6-27x^2\right).$$

Задача 5.2.8

Решите неравенство:

$$\log_{\frac{6x-1}{2x+2}}\left(8x^2+2x-1\right) \geqslant \log_{\frac{6x-1}{2x+2}}\left(22x-6-12x^2\right).$$

Задача 5.2.9

Решите неравенство:

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\leqslant 0.$$

Задача 5.2.10

Решите неравенство:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24+2x-x^2}{14}>1.$$

Задача 5.2.11

Решите неравенство:

$$\log_{|5x+2|}\left(4+35x-50x^2\right)\leqslant 2.$$

Задача 5.2.12

Решите неравенство:

$$\log_{|x+5|}\left(2x^2+13x-29\right)^2\geqslant 2.$$

Задача 5.2.13

Решите неравенство:

$$\log_{2-7x}(7x+2)\cdot\log_{7x+3}(3-7x)\leqslant 0.$$

Задача 5.2.14

Решите неравенство:

$$\log_{2-5x}(5x+2)\cdot\log_{5x+3}(3-5x)\leqslant 0.$$

Задача 5.2.15

Решите неравенство:

$$(7x-12)\log_{3x-7}(x^2-3x+3) \leqslant 0.$$

Задача 5.2.16

Решите неравенство:

$$\log_{x^2+1}\frac{2\cdot 4^x-15\cdot 2^x+23}{4^x-9\cdot 2^x+14} \geqslant 0.$$

Задача 5.2.17

Решите неравенство:

$$\log_{x+5}(3x+19)\log_{x+5}\left(\frac{3x^2+34x+95}{(x+5)^4}\right) \geqslant -2.$$

Задача 5.2.18

Решите неравенство:

$$\log_{x+1}\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leqslant -2.$$

Задача 5.2.19

Решите неравенство:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geqslant -10.$$

Задача 5.2.20

Решите неравенство:

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2) \geqslant 0.$$

Задача 5.2.21

Решите неравенство:

$$\log_{48x^2-82x+35}(3-2x) \geqslant \log_{8x^2-10x+3}(3-2x).$$

Задача 5.2.22

Решите неравенство:

$$\log_{12x^2-17x+6}(2-x) \geqslant \log_{2x^2-x}(2-x).$$

6. Метод рационализации в задачах профильного ЕГЭ

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

> Задачи из данного раздела можно решать различными методами. Мы будем пользоваться методом рационализации.

6.1. Задачи из видео

Задача 6.1.1

Решите неравенство:

$$\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leqslant 1.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что $9^x = 3^{2x}$.
Сделаем замену: $t = 3^x$, $t > 0$.
Получаем:

$$\frac{t^2 + 2t - 117}{t - 27} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2 + t - 90}{t - 27} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t+10)(t-9)}{t - 27} \leqslant 0.$$

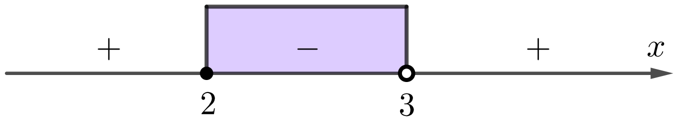
Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{(3^x + 10)(3^x - 9)}{3^x - 27} \leqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации:
1) $3 > 1$, значит $3^x - 3^2$ совпадает по знаку с $x - 2$, а $3^x - 3^3$ совпадает по знаку с $x - 3$.
2) $3^x \geqslant 0$, значит $3^x + 10 \geqslant 10 > 0$.
Получаем:

$$\frac{x - 2}{x - 3} \leqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in [2; 3)$.

Задача 6.1.2

Решите неравенство:

$$1 + \frac{6}{\log_3 x - 3} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 (27x^6) + 12} \geqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что $\log_3(27x^6) = \log_3 27 + \log_3 x^6 = 3 + 6\log_3 x$.
Сделаем замену: $t = \log_3 x$.
Получаем:

$$1+\frac{6}{t-3}+\frac{5}{t^2-(3+6t)+12} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{6}{t-3}+\frac{5}{(t-3)^2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2-6t+9+6t-18+5}{(t-3)^2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{t^2-4}{(t-3)^2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-2)(t+2)}{(t-3)^2} \geqslant 0.$$

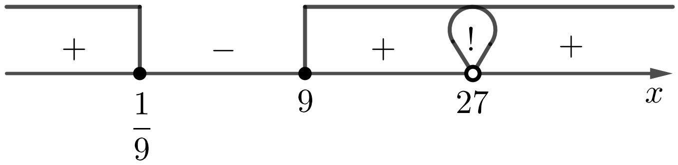
Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{(\log_3 x - 2)(\log_3 x + 2)}{(\log_3 x - 3)^2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(\log_3 x - \log_3 3^2)(\log_3 x + \log_3 3^2)}{(\log_3 x - \log_3 3^3)^2} \geqslant 0.$$

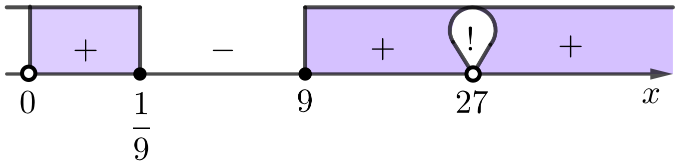
Воспользуемся методом рационализации.
$3 > 1$ значит:
1) $\log_3 x - \log_3 3^2$ совпадает по знаку с $x - 9$ при $x > 0$.
2) $\log_3 x - \log_3 3^3$ совпадает по знаку с $x - 27$ при $x > 0$.
3) $\log_3 x + \log_3 3^2 = \log_3 9x - \log_3 1$ совпадает по знаку с $9x - 1$ при $x > 0$.
Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-9)(9x-1)}{(x-27)^2} \geqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенства получаем:



Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; 27) \cup (27; +\infty)$.

Задача 6.1.3

Решите неравенство:

$$\frac{105}{(2^{4-x^2}-1)^2}-\frac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Сделаем замену: $t=2^{4-x^2}-1$.
Получаем:

$$\frac{105}{t^2}-\frac{22}{t}+1\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2-22t+105}{t^2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-15)(t-7)}{t^2}\geqslant 0.$$

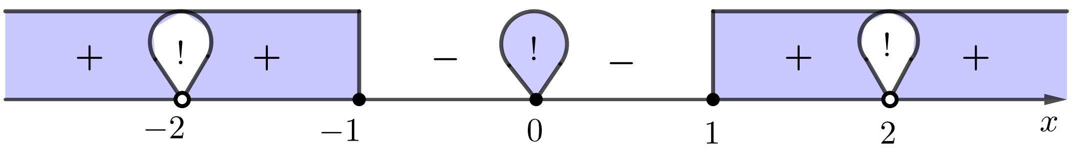
Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{(2^{4-x^2}-16)(2^{4-x^2}-8)}{(2^{4-x^2}-1)^2}\geqslant 0$$

Воспользуемся методом рационализации:
$2>1$, значит $2^{4-x^2}-2^4$ совпадает по знаку с $4-x^2-4$, $2^{4-x^2}-2^3$ совпадает по знаку с $4-x^2-3$, а $2^{4-x^2}-2^0$ совпадает по знаку с $4-x^2$.
Получаем:

$$\frac{(4-x^2-4)(4-x^2-3)}{(4-x^2)^2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2(1-x^2)}{(4-x^2)^2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x-2)^2(x+2)^2}\geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup\{0\}\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

Задача 6.1.4

Решите неравенство:

$$2^{|x|}-6-\frac{9\cdot 2^{|x|}-37}{4^{|x|}-7\cdot 2^{|x|}+12}\leqslant\frac{1}{2^{|x|}-4}.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что $4^{|x|}=2^{2|x|}$.
Сделаем замену: $t=2^{|x|}$.
Получаем:

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12}\leqslant\frac{1}{t-4}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{t^3-7t^2+12t-6t^2+42t-72-9t+37-t+3}{(t-4)(t-3)}\leqslant 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{t^3-13t^2+44t-32}{(t-4)(t-3)}\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(t-1)(t^2-12t+32)}{(t-4)(t-3)}\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(t-1)(t-8)(t-4)}{(t-4)(t-3)}\leqslant 0.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{(2^{|x|}-2^0)(2^{|x|}-2^3)(2^{|x|}-2^2)}{(2^{|x|}-2^2)(2^{|x|}-2^{\log_2 3})}\leqslant 0$$

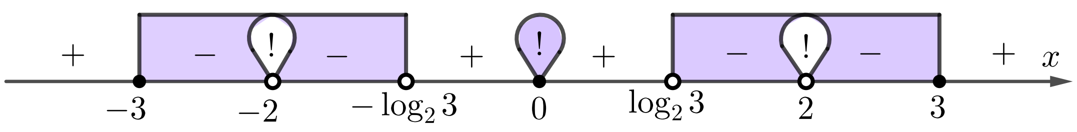
Воспользуемся методом рационализации:
$2>1$, значит $2^{|x|}-2^0$ совпадает по знаку с $|x|$, $2^{|x|}-2^3$ совпадает по знаку с $|x|-3$, $2^{|x|}-2^2$ совпадает по знаку с $|x|-2$, а $2^{|x|}-2^{\log_2 3}$ совпадает по знаку с $|x|-\log_2 3$.
Получаем:

$$\frac{|x|(|x|-3)(|x|-2)}{(|x|-2)(|x|-\log_2 3)}\leqslant 0$$

Ещё раз воспользуемся методом рационализации:
$|x|$ совпадает по знаку с x^2, $|x|-|3|$ совпадает по знаку с x^2-9, $|x|-2$ совпадет по знаку с x^2-4, а $|x|-|\log_2 3|$ совпадает по знаку с $x^2-\log_2^2 3$.
Имеем:

$$\frac{x^2(x^2-9)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-\log_2^2 3)}\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x^2(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-\log_2 3)(x+\log_2 3)}\leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in[-3;-2)\cup(-2;-\log_2 3)\cup\{0\}\cup(\log_2 3;2)\cup(2;3]$.

Задача 6.1.5

Решите неравенство:

$$\frac{81^x + 2\cdot 25^{x\log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что. $81^x = 9^{2x}$, а $25^{x\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^{2x} = 9^x$.
Тогда неравенство имеет вид:

$$\frac{9^{2x} + 2\cdot 9^x - 5}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

Разложим на множители числитель, сделав замену $t = 9^x$.
Получим:

$$t^2 + 2t - 5 = (t - \sqrt{6} + 1)(t + \sqrt{6} + 1)$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{(9^x - (\sqrt{6}-1))(9^x + \sqrt{6} + 1)}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

Заметим, что:
1) $9^x + \sqrt{6} + 1 > 0$ для любого x,
2) $\sqrt{6} - 1 = 9^{\log_9(\sqrt{6}-1)}$.
Значит, наше неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{9^x - 9^{\log_9(\sqrt{6}-1)}}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

Воспользуемся методом рационализации:
$9 > 1$, значит $9^x - 9^{\log_9(\sqrt{6}-1)}$ совпадает по знаку с $x - \log_9(\sqrt{6}-1)$.
Получаем:

$$\frac{x - \log_9(\sqrt{6}-1)}{(4x-1)^2} \geqslant 0$$

Сравним $\frac{1}{4}$ и $\log_9(\sqrt{6}-1)$.

$$\frac{1}{4} \vee \log_9(\sqrt{6}-1)$$

$$\log_9 9^{\frac{1}{4}} \quad \vee \quad \log_9(\sqrt{6}-1)$$

$$\sqrt{3} \vee \sqrt{6} - 1$$

$$(\sqrt{3})^2 \vee (\sqrt{6}-1)^2$$

$$3 \vee 7 - 2\sqrt{6}$$

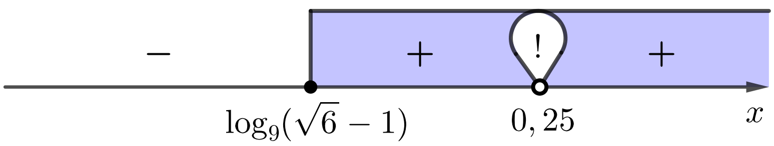
$$-4 \vee -2\sqrt{6}$$

$$-\sqrt{16} \vee -\sqrt{24}$$

$$-\sqrt{16} > -\sqrt{24} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} > \log_9(\sqrt{6}-1).$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in [\log_9(\sqrt{6}-1); 0{,}25) \cup (0{,}25; +\infty)$.

Задача 6.1.6

Решите неравенство:

$$x^2 \cdot \log_{343}(x+3) \leqslant \log_7(x^2+6x+9).$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что: $343 = 7^3$.
Получаем:

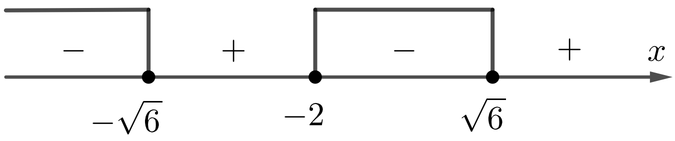
$$x^2 \cdot \log_{7^3}(x+3) - \log_7(x+3)^2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3} \cdot \log_7(x+3) - 2\log_7(x+3) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_7(x+3)(\frac{x^2}{3} - 2) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\log_7(x+3) - \log_7 1)(x^2-6) \leqslant 0.$$

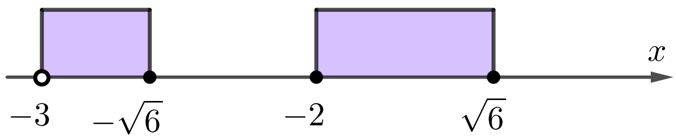
Воспользуемся методом рационализации:
$7 > 1$, значит $\log_7(x+3) - \log_7 1$ совпадает по знаку с $x+3-1$ при $x+3>0$.
Получаем систему:

$$\begin{cases}(x+2)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \leqslant 0,\\ x > -3.\end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решением второго неравенством получаем:



Ответ: $x \in \left(-3; -\sqrt{6}\right] \cup \left[-2; \sqrt{6}\right]$.

Задача 6.1.7

Решите неравенство:

$$0{,}5 \log_{x-1}\left(x^2-8x+16\right)+\log_{4-x}\left(-x^2+5x-4\right) \geqslant 3.$$

Решение задачи

Решение:
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$0{,}5 \log_{x-1}(4-x)^2+\log_{4-x}(4-x)(x-1) \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{x-1}(4-x)+1+\log_{4-x}(x-1) \geqslant 3.$$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\log_{x-1}(4-x)+\dfrac{1}{\log_{x-1}(4-x)}-2 \geqslant 0,\\ x-1 \neq 1,\\ x-1>0,\\ 4-x \neq 1,\\ 4-x>0.\end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство. Сделаем замену: $t=\log_{x-1}(4-x)$.
Получаем:

$$t+\frac{1}{t}-2\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2-2t+1}{t}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-1)^2}{t}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad t>0.$$

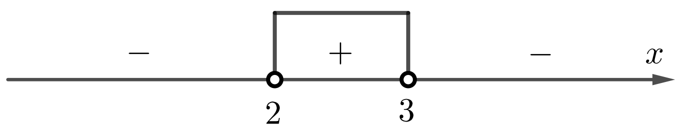
Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases}\log_{x-1}(4-x)>\log_{x-1}1,\\ x\neq 2,\\ x>1,\\ x\neq 3,\\ x<4.\end{cases}$$

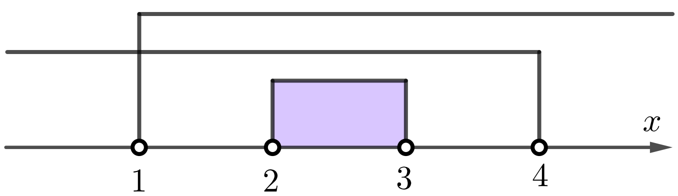
Воспользуемся методом рационализации:
$\log_{x-1}(4-x)-\log_{x-1}1$ совпадает по знаку с $(x-1-1)(4-x-1)$ при условиях указанных в системе.
Получаем систему:

$$\begin{cases}(x-2)(3-x)>0,\\ x\neq 2,\\ x>1,\\ x\neq 3,\\ x<4.\end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



При пересечении с решениями остальных неравенств получаем:



Ответ: $x\in(2{,}3)$.

6.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.2.1

Решите неравенство:

$$\frac{25^x+2\cdot 5^x-26}{5^x-125}\leqslant 1.$$

Задача 6.2.2

Решите неравенство:

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2\left(32x^{10}\right)+30}\geqslant 0.$$

Задача 6.2.3

Решите неравенство:

$$\frac{2080}{(3^{4-x^2}-1)^2}-\frac{106}{(3^{4-x^2}-1)}+1\leqslant 0.$$

Задача 6.2.4

Решите неравенство:

$$3^{|x|}-8-\frac{3^{|x|}+9}{9^{|x|}-4\cdot 3^{|x|}+3}\leqslant\frac{5}{3^{|x|}-1}.$$

Задача 6.2.5

Решите неравенство:

$$\frac{8\cdot 7^x-4^{x\log_2 7}-11}{(2x-1)^2}\geqslant 0.$$

Задача 6.2.6

Решите неравенство:

$$x^2\cdot\log_{625}(6-x)\leqslant\log_5(x^2-12x+36).$$

Задача 6.2.7

Решите неравенство:

$$0{,}5\log_{x-2}\left(x^2-10x+25\right)+\log_{5-x}\left(-x^2+7x-10\right)\geqslant 3.$$

7. Метод логарифмирования уравнений и неравенств

Приёмы, рассказанные в данном видео, могут здорово упростить решение некоторых задач этого раздела

Теоретическая справка

Все уравнения и неравенства в данном разделе объединяет то, что все они содержат возведение в достаточно сложную степень. И для таких уравнений и неравенств часто разумно применять приём логарифмирования.

Рассмотрим два выражения $a > 0$ и $b > 0$. Теперь возьмем некоторое число $c > 1$. Часто в качестве c удобно брать 10 или e. В этом случае запись логарифмов будет короче – lg и ln соответственно. В этом случае верны следующие соотношения:

1. $a > b \Leftrightarrow \log_c a > \log_c b$.
2. $a = b \Leftrightarrow \log_c a = \log_c b$.
3. $a < b \Leftrightarrow \log_c a < \log_c b$.

Отсюда мы понимаем, что если взятие от обеих частей логарифма по основанию c упростит нам жизнь, то стоит прологарифмировать обе части по основанию c.

7.1. Задачи из видео

Задача 7.1.1

Решите уравнение:

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

Решение задачи

Решение:
Т.к. $x > 0$, исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_3(x^{\log_3(27x^2)}) = \log_3\left(\frac{x^9}{81}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(27x^2)\log_3 x = \log_3 x^9 - \log_3 81 \quad \Leftrightarrow$$
$$(\log_3 27 + \log_3 x^2)\log_3 x = \log_3 x^9 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad (3 + 2\log_3 x)\log_3 x = 9\log_3 x - 4.$$

Сделаем замену: $t = \log_3 x$.

Получаем:

$$3t + 2t^2 - 9t + 4 = 0 \iff 2t^2 - 6t + 4 = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &t = 2, \\ &t = 1. \end{aligned}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной

$$\left[\begin{aligned} &\log_3 x = 1, \\ &\log_3 x = 2 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = 3, \\ &x = 9. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x \in \{3,\ 9\}$.

Задача 7.1.2

Сравните:

$$3^{\sqrt{\log_3 5}} \ \vee \ 5^{\sqrt{\log_5 3}}.$$

Решение задачи

Решение:
Оба выражения положительные, поэтому, если мы возьмём логарифм по какому-нибудь основанию от левой и правой частей, то знак сохранится. Возьмём логарифм по основанию 5:

$$\log_5 \left(3^{\sqrt{\log_3 5}}\right) \vee \log_5 \left(5^{\sqrt{\log_5 3}}\right)$$

По свойству логарифма, выносим степень за логарифм:

$$\sqrt{\log_3 5} \cdot \log_5 3 \vee \sqrt{\log_5 3} \cdot \log_5 5$$

Заметим, что $\log_5 5 = 1$, а $\log_3 5 = \dfrac{1}{\log_5 3}$ по свойству логарифма $\left(\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\right)$, следовательно $\sqrt{\log_3 5} = \dfrac{1}{\sqrt{\log_5 3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\log_5 3}} \cdot \log_5 3 \vee \sqrt{\log_5 3} \cdot 1$$

В первом выражении $\log_5 3$ сократим на $\sqrt{\log_5 3}$:

$$\sqrt{\log_5 3} \vee \sqrt{\log_5 3}$$

Получаем:

$$\sqrt{\log_5 3} = \sqrt{\log_5 3}$$

Ответ: $3^{\sqrt{\log_3 5}} \ = \ 5^{\sqrt{\log_5 3}}$.

Задача 7.1.3

Решите неравенство:

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geqslant 3.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что $3^{x^2} > 0$, $5^{x-1} > 0$, $3 > 0$, следовательно можем использовать метод логарифмирования. Логарифмируем обе части по основанию 3.

$$\log_3 \left(3^{x^2} \cdot 5^{x-1}\right) \geqslant \log_3 3.$$

Логарифм произведения – равен сумме логарифмов, тогда:

$$\log_3 3^{x^2} + \log_3 5^{x-1} \geqslant 1,$$

$$x^2 \log_3 3 + (x-1) \log_3 5 \geqslant 1,$$

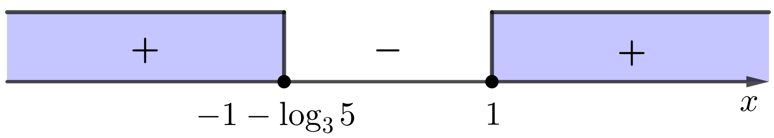
$$x^2 + (x-1)\log_3 5 - 1 \geqslant 0.$$

Заметим, что если объединить x^2 и 1, то у нас получится разность квадратов:

$$(x-1)(x+1) + (x-1)\log_3 5 \geqslant 0,$$

$$(x-1)(x+1+\log_3 5) \geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty; -1-\log_3 5] \cup [1; +\infty)$.

Задача 7.1.4

Решите неравенство:

$$7^{\ln(x^2-2x)} \leqslant (2-x)^{\ln 7}.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что основание степени должно быть больше 0. Тогда $2 - x > 0$. Прологарифмируем левую и правую части неравенства:

$$\ln\left(7^{\ln x^2 - 2x}\right) \leqslant \ln\left((2-x)^{\ln 7}\right).$$

Выносим показатель степени за знак логарифма:

$$\ln(x^2 - 2x)\ln 7 \leqslant \ln 7 \cdot \ln(2-x)$$

Так как $\ln 7 > 0$, то мы можем на него разделить левую и правую части неравенства. Знак неравенства при этом не изменится:

$$\ln(x^2 - 2x) \leqslant \ln(2-x).$$

Получился следующий вид неравенства $\log_a b \leqslant \log_a c \overset{a>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b \leqslant c, \\ b > 0. \end{cases}$

Тогда:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leqslant 2 - x, \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leqslant 0, \\ x^2 - 2x > 0. \end{cases}$$

Разложим на множители левую часть первого неравенства:
$x^2 - x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

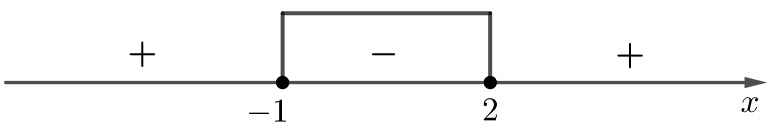
$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

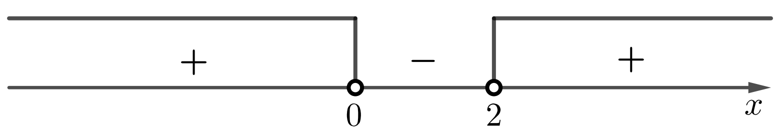
Возвращаясь к системе двух неравенств получаем:

$$\begin{cases} (x-2)(x+1) \leqslant 0, \\ x(x-2) > 0. \end{cases}$$

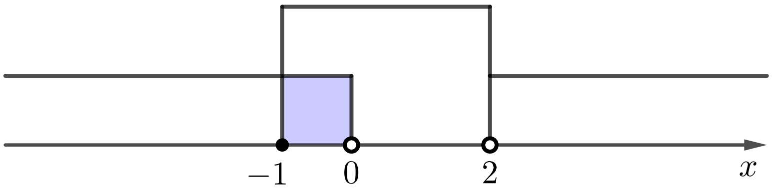
Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Решим второе неравенство системы методом интервалов:



Решением системы неравенств будет являться пересечение решений, входящих в неё неравенств:



Ответ: $x \in [-1; 0)$.

Задача 7.1.5

Решите неравенство:

$$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geqslant 1.$$

Решение задачи

Решение:
В левой и правой частях неравенства $x > 0$. Прологарифмируем:

$$\log_2 (3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geqslant \log_2 1$$

По свойству логарифма выносим показатель степени за знак логарифма:

$$\log_2 x \cdot \log_2 3\sqrt{x} \geqslant 0$$

$$\log_2 x \cdot \left(\log_2 3 + \log_2 \sqrt{x}\right) \geqslant 0$$

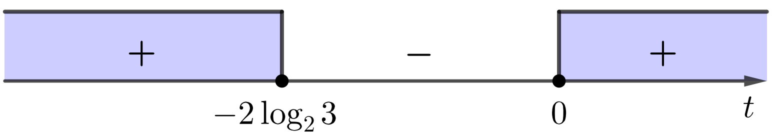
$$\log_2 x \cdot \left(\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 x\right) \geqslant 0$$

Сделаем замену: $t = \log_2 x$.

Получаем:

$$t\left(\frac{1}{2}t + \log_2 3\right) \geqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



Получаем:

$$\left[\begin{aligned} &t \geqslant 0, \\ &t \leqslant \log_2 \frac{1}{9}. \end{aligned}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{aligned} &\log_2 x \geqslant 0, \\ &\log_2 x \leqslant \log_2 \frac{1}{9} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x \geqslant 1, \\ &0 < x \leqslant \frac{1}{9}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [1; +\infty)$.

Задача 7.1.6

Решите неравенство:

$$\left(\frac{4x}{5} + 1\right)^{6-13x-15x^2} \geqslant 1.$$

Решение задачи

Решение:

Заметим, что $\left(\frac{4x}{5} + 1\right)$ должно быть больше 0. Прологарифмируем обе части неравенства.

$$\log_2 \left(\frac{4x}{5} + 1\right)^{6-13x-15x^2} \geqslant \log_2 1$$

Выносим в левой части показатель степени за знак логарифма:

$$(6 - 13x - 15x^2) \cdot \log_2 \left(\frac{4x}{5} + 1\right) \geqslant 0$$

Разложим на множители выражение $6 - 13x - 15x^2$. Решим уравнение $6 - 13x - 15x^2 = 0$:

$15x^2 + 13x - 6 = 0$

$D = 169 + 360 = 529 = 23^2$

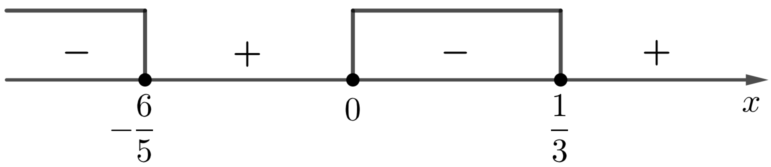
$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 23}{30} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{1}{3}, \\ &x = -\frac{6}{5}. \end{aligned}\right.$$

$$6 - 13x - 15x^2 = -15(x - \frac{1}{3})(x + \frac{6}{5})$$

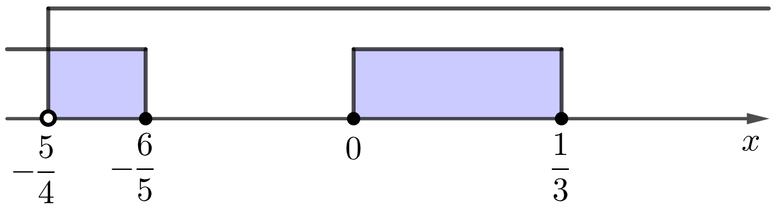
Применим метод рационализации к выражению $\log_2(\frac{4x}{5} + 1)$ (выражение $\log_a b = \log_a b - \log_a 1$ совпадает по знаку с $(a-1)(b-1)$), получим $\log_2(\frac{4x}{5} + 1)$ совпадает по знаку с $(2-1)(\frac{4x}{5} + 1 - 1)$. Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} -15\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{6}{5}\right)\cdot(2-1)\cdot\dfrac{4x}{5}\geqslant 0, \\ \dfrac{4x}{5}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{6}{5}\right)\leqslant 0, \\ x>-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



При пересечении с решениями второго неравенства:



Ответ: $x \in \left(-\dfrac{5}{4};-\dfrac{6}{5}\right] \cup \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Задача 7.1.7

Решите неравенство:

$$(x^2-3x+3)^{4x^3+5x^2} \leqslant (x^2-3x+3)^{2x^3+18x}.$$

Решение задачи

Решение:
Заметим, что x^2-3x+3 больше 0, так как $D<0$, то вся парабола находится выше оси x и ветви параболы направлены вверх. Прологарифмируем левую и правую части неравенства:

$$\log_2(x^2-3x+3)^{4x^3+5x^2} \leqslant \log_2(x^2-3x+3)^{2x^3+18x}$$

По свойству логарифма показатели степеней выносим за знаки логарифмов:

$$(4x^3+5x^2)\log_2(x^2-3x+3)-(2x^3+18x)\log_2(x^2-3x+3)\leqslant 0,$$

$$(4x^3+5x^2-2x^3-18x)\cdot\log_2(x^2-3x+3)\leqslant 0,$$

$$x(2x^2+5x-18)\cdot\log_2(x^2-3x+3)\leqslant 0.$$

Применим метод рационализации к логарифмической части неравенства:

$$x(2x^2+5x-18)\cdot(2-1)(x^2-3x+3-1)\leqslant 0.$$

Разложим на множители x^2-3x+2.
Решим уравнение $x^2-3x+2=0$.

$D=9-8=1=1^2$.

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2,\\&x=1.\end{aligned}\right.$

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1).$$

Разложим на множители $2x^2+5x-18$.
Решим уравнение $2x^2+5x-18=0$:

$D=25+144=169=13^2$.

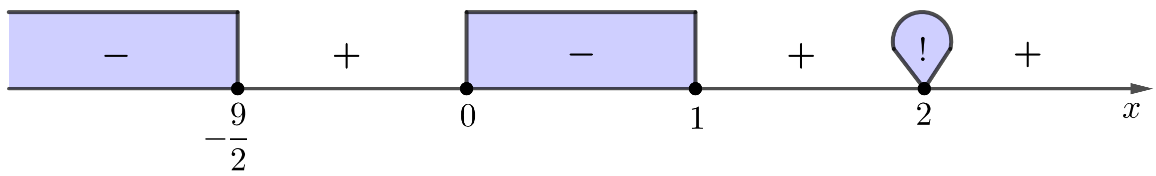
$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm13}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2,\\&x=-\frac{9}{2}.\end{aligned}\right.$

$$2x^2+5x-18=2(x-2)(x+\frac{9}{2}).$$

Наше неравенство примет следующий вид:

$$x(x-2)(x-1)(x-2)\left(x+\frac{9}{2}\right)\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad x(x-2)^2(x-1)(x+\frac{9}{2})\leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right]\cup[0;1]\cup\{2\}$.

7.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.2.1

Решите неравенство:

$$2^{x^2}\cdot 3^x<6.$$

Задача 7.2.2

Решите неравенство:

$$6^{\ln(x^2-4x)} \leqslant (4-x)^{\ln 6}.$$

Задача 7.2.3

Решите неравенство:

$$(5\sqrt{x})^{\log_3 x} \geqslant 1.$$

Задача 7.2.4

Решите неравенство:

$$\left(\frac{5x}{6}+1\right)^{2-14x-16x^2} \geqslant 1.$$

Задача 7.2.5

Решите неравенство:

$$(x^2+x+1)^{\frac{x-10}{x-3}} \leqslant (x^2+x+1)^3.$$

8. Ответы

1. Метод рационализации в иррациональных неравествах

Задачи из видео

1.1.1 $x \in \left(1; \dfrac{4}{3}\right)$

1.1.2 $x \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{2}\right] \cup [5; 6]$

1.1.3 $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \cup [7; 9]$

Задачи для самостоятельного решения

1.2.1 $x \in \left(\dfrac{4}{3}; 2\right) \cup (3; 9]$

1.2.2 $x \in [10; +\infty) \cup \{3\}$

1.2.3 $x \in (-\infty; -3] \cup \left[\dfrac{7}{3}; \dfrac{10}{3}\right]$

1.2.4 $x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[0; \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$

1.2.5 $x \in (-\infty; -1) \cup \{2\} \cup [3; 4)$

1.2.6 $x \in \left(3; \dfrac{10}{3}\right)$

2. Метод рационализации в неравествах с модулем

Задачи из видео

2.1.1 $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$

2.1.2 $x \in (-\infty; 1) \cup \{6\} \cup (11; +\infty)$

2.1.3 $x \in \left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{3}\right] \cup \left(\dfrac{3}{2}; 4\right]$

2.1.4 $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$

2.1.5 $x \in \left(-\dfrac{3}{2}; -1\right] \cup -2 \cup 2$

Задачи для самостоятельного решения

2.2.1 $x \in (-2; -1] \cup (2; +\infty)$

2.2.2 $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

2.2.3 $x \in [0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

2.2.4 $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [0{,}6; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right]$

2.2.5 $x \in \left[-\frac{3+\sqrt{17}}{2}; 0\right] . \cup \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 1\right]$

2.2.6 $x \in [-8; -2]$

2.2.7 $x \in (-\infty; -13) \cup \{-7\} \cup (-1; +\infty)$

2.2.8 $x \in (-\infty; -5) \cup [-3; -2] \cup (-1; 8]$

2.2.9 $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; 3) \cup \left[\frac{10}{3}; 4\right] \cup [20; \infty)$

2.2.10 $x \in (-3; -1) \cup (2; 4)$

2.2.11 $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \cup [2; \infty)$

2.2.12 $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{5}{3}\right)$

2.2.13 $x \in \left[-\frac{36}{5}; -4\right] \cup [-3; 1) \cup [3; 9]$

2.2.14 $x \in \{-5; -1\} \cup (-4{,}5; -4]$

2.2.15 $x \in [0; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; 4\right)$

2.2.16 $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

2.2.17 $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

3. Метод рационализации в показательных неравествах

Задачи из видео

3.1.1 $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right)$

3.1.2 $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right] \cup \left(0; \dfrac{1}{4}\right]$

3.1.3 $x \in (-2; -1) \cup \{1\}$

3.1.4 $x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

3.1.5 $x \in [-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

3.1.6 $x \in [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$

Задачи для самостоятельного решения

3.2.1 $x \in (-\infty; 0] \cup (5; +\infty)$

3.2.2 $x \in (-\infty; \log_3 2] \cup (1; 5)$

3.2.3 $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 0\right) \cup \left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$

3.2.4 $x \in (-\infty; -3] \cup \left(\dfrac{3}{2}; 3\right]$

3.2.5 $x \in (-\infty; -6] \cup (-3; -1) \cup [2; +\infty)$

3.2.6 $x \in [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$

3.2.7 $x \in [-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$

3.2.8 $x \in (-\infty; -2) \cup [1; 2] \cup [6; 7]$

3.2.9 $x \in [0; 3]$

3.2.10 $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

3.2.11 $x \in [2; 4)$

3.2.12 $x \in (0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$

3.2.13 $x \in (-\infty; 1]$

3.2.14 $x \in [-2; 0] \cup \{2\}$

3.2.15 $x \in [-1; 1]$

3.2.16 $x \in [0; 2) \cup (2; 5)$

3.2.17 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$

3.2.18 $x \in (-\infty; 0) \cup \{2\} \cup (3{,}5; +\infty)$

4. Метод рационализации в логарифмических неравествах с постоянным основанием

Задачи из видео

4.1.1 $x \in (-2; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

4.1.2 $x \in (1; 2] \cup [8; +\infty)$

4.1.3 $x \in \left(0; \frac{4}{7}\right)$

4.1.4 $x \in \{3\} \cup (8; +\infty)$

4.1.5 $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$

4.1.6 $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$

Задачи для самостоятельного решения

4.2.1 $x \in (-2; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

4.2.2 $x \in (-\infty; -4) \cup [-3{,}5; -3) \cup (-3; -2) \cup [-1; +\infty)$

4.2.3 $x \in (-\infty; 0) \cup [0{,}5; 1) \cup (1; 2) \cup [3; +\infty)$

4.2.4 $x \in (-\infty; 1) \cup [1{,}5; 2) \cup (2; 3) \cup [4; +\infty)$

4.2.5 $x \in (5; 6]$

4.2.6 $x \in \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$

4.2.7 $x \in \left(\frac{7}{11}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

4.2.8 $x \in (-7; -6) \cup [2; 2{,}5) \cup (4; 4{,}5]$

4.2.9 $x \in (-6; -5) \cup \left[3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(5; \frac{11}{2}\right]$

4.2.10 $x \in (-72; -8]$

4.2.11 $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1; 3\} \cup (4; +\infty)$

4.2.12 $x \in \left(-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right]$

4.2.13 $x \in \left(-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right)$

4.2.14 $x \in (1; +\infty)$

4.2.15 $x \in (-1; +\infty)$

4.2.16 $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

4.2.17 $x \in [3; 5] \cup [8; 10]$

4.2.18 $x \in \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$

4.2.19 $x \in [3; 5)$

4.2.20 $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; 1\right)$

5. Метод рационализации в логарифмических нераветствах с переменным основанием

Задачи из видео

5.1.1 $x \in (-4{,}5; -4] \cup (6; 7)$

5.1.2 $x \in (3; +\infty)$

5.1.3 $x \in (-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

5.1.4 $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$

5.1.5 $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$

5.1.6 $x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup (3; +\infty)$

5.1.7 $x \in (0; 1]$

5.1.8 $x \in [\sqrt{6}; +\infty)$

Задачи для самостоятельного решения

5.2.1 $x \in [-1; 4)$

5.2.2 $x \in \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$

5.2.3 $x \in (1; +\infty)$

5.2.4 $x \in \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$

5.2.5 $x \in \left(-3; -\frac{7}{3}\right] \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$

5.2.6 $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

5.2.7 $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup (0{,}5; 1)$

5.2.8 $x \in \{0{,}5\} \cup (0{,}75; 1{,}5)$

5.2.9 $x \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$

5.2.10 $x \in (-4; -3) \cup (-1; 3)$

5.2.11 $x \in (0{,}1; 0] \cup [0{,}2; 0{,}8)$

5.2.12 $x \in \left(-\infty; -\frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right] \cup [-3-\sqrt{26}; -6) \cup \left(-4; \frac{-7+\sqrt{97}}{2}\right] \cup [-3+\sqrt{26}; +\infty)$

5.2.13 $x \in \left(-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$

5.2.14 $x \in (-0{,}4; -0{,}2] \cup (0{,}2; 0{,}4)$

5.2.15 $x \in \left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$

5.2.16 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{\log_2 3\} \cup (\log_2 7; +\infty)$

5.2.17 $x \in (-5; -4) \cup (-4; -1]$

5.2.18 $x \in (-1; 0)$

5.2.19 $x \in [-3; 4)$

5.2.20 $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

5.2.21 $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$

5.2.22 $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; 2)$

6. Метод рационализации в задачах профильного ЕГЭ

Задачи из видео

6.1.1 $x \in [2; 3)$

6.1.2 $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; 27) \cup (27; +\infty)$

6.1.3 $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty) \cup \{0\}$

6.1.4 $x \in [-3; -2) \cup (-2; -\log_2 3) \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3] \cup \{0\}$

6.1.5 $x \in \left[\log_9 (\sqrt{6} - 1); \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

6.1.6 $x \in (-3; -\sqrt{6}] \cup [-2; \sqrt{6}]$

6.1.7 $x \in (2; 3)$

Задачи для самостоятельного решения

6.2.1 $x \in (-\infty; 3)$

6.2.2 $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; 32) \cup (32; +\infty)$

6.2.3 $x \in [-1; 1]$

6.2.4 $x \in [-2; -1) \cup [-\log_3 2; 0) \cup (0; \log_3 2] \cup (1; 2]$

6.2.5 $x \in \left[\log_7(4-\sqrt{5}); \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \log_7(4+\sqrt{5})\right]$

6.2.6 $x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}] \cup [5; 6)$

6.2.7 $x \in (3; 4)$

7. Логарифмирование

Задачи из видео

7.1.1 $x \in \{3; 9\}$

7.1.2 $=$ (они равны)

7.1.3 $x \in (-\infty; -1-\log_3 5] \cup [1; +\infty)$

7.1.4 $x \in [-1; 0)$

7.1.5 $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [1; +\infty)$

7.1.6 $x \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{6}{5}\right] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$

7.1.7 $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}$

Задачи для самостоятельного решения

7.2.1 $x \in (-1-\log_2 3; 1)$

7.2.2 $x \in [-1; 0)$

7.2.3 $x \in \left(0; \frac{1}{25}\right] \cup [1; +\infty)$

7.2.4 $x \in \left(-\frac{6}{5}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{8}\right]$

7.2.5 $x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [3; +\infty)$