

## Метод рационализации

**Метод рационализации** – это метод, который позволяет заменить произвольные неравенства на равносильные рациональные неравенства (имеющие те же множества решений) с учётом области определения. Для этого необходимо исходное выражение заменить на выражение, совпадающее с ним по знаку.

Два выражения  $f(x)$  и  $g(x)$  **совпадают по знаку**, если они положительны при одних и тех же значениях  $x$ , отрицательны при одних и тех же значениях  $x$  и равны 0 при одних и тех же значениях  $x$ .

Исходное выражение	Выражение, совпадающее по знаку с исходным	Условие
<b>иррациональные</b>		
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$	$a, b \geq 0$
<b>с модулем</b>		
$ a  -  b $	$(a - b)(a + b)$	$a, b \in \mathbb{R}$
<b>показательные</b>		
$a^b - a^c$ $a^b - 1$ $a^b - k$	$(a - 1)(b - c)$ $(a - 1)b$ $(a - 1)(b - \log_a k)$	$a, k > 0$ $a \neq 1$
<b>логарифмические</b>		
$\log_a b - \log_a c$ $\log_a b$ $\log_a b - 1$ $\log_a b - k$	$(a - 1)(b - c)$ $(a - 1)(b - 1)$ $(a - 1)(b - a)$ $(a - 1)(b - a^k)$	$a, b, c, k > 0$ $a \neq 1$

Если выражение представляет собой произведение, и наша цель – сравнить его с 0, то мы можем заменить произвольный множитель на другой множитель, совпадающий с ним по знаку.

## Когда можно использовать рационализацию:

- в **правой части** неравенства должен стоять 0;
- в **левой части** неравенства должно стоять **произведение или частное**;
- выражение, которое мы заменяем на другое, совпадающее с ним по знаку, должно являться **отдельным множителем**.

Если хотя бы одно из перечисленных условий не выполнено, то метод рационализации применять нельзя.

► **Пример.** Дано неравенство

$$\frac{(3^x - 9)(\log_5(6 - x) - 1)}{|x| - 4} < 0.$$

Заменим данное неравенство на равносильное, используя метод рационализации.

$$\frac{(3^x - 3^2)(\log_5(6 - x) - \log_5 5)}{|x| - 4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(3 - 1)(x - 2)(5 - 1)(6 - x - 5)}{(x - 4)(x + 4)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - 2)(1 - x)}{(x - 4)(x + 4)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 4)(x + 4)} > 0 \text{ при } x < 6.$$

► **Примеры, когда метод рационализации применять нельзя:**

$$\frac{(3^x - 9)}{4^x - 4} \geq 2 \quad \text{– справа не 0;}$$

$$\frac{(3^x - 9)}{4^x - 4} + |x| \geq 0 \quad \text{– слева не произведение и не частное;}$$

$$\frac{3^x - 3^2 - 1}{x + 5} < 0 \quad \text{– выражение не является отдельным множителем.}$$

## Метод логарифмирования уравнений и неравенств

Если уравнение или неравенство содержит **возведение в достаточно сложную степень**, то, чтобы упростить его решение, можно применить приём логарифмирования. Рассмотрим два выражения  $a > 0$  и  $b > 0$ . Пусть  $c$  – некоторое число ( $c > 1$ ), тогда верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow \log_c a > \log_c b \\ a = b &\Leftrightarrow \log_c a = \log_c b \\ a < b &\Leftrightarrow \log_c a < \log_c b \end{aligned}$$