

#математика

Оптимизация



профматика

Задание 1

У фермера есть два поля, каждое площадью 4 гектара. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

⇒ Разбор задачи



Задание 2

У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 390 ц/га, а на втором — 420 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 360 ц/га, а на втором — 440 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 310 ц/га, а на втором — 480 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, морковь — по цене 3500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

⇒ Разбор задачи



Задание 3

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

⇒ Разбор задачи



Задание 4

Завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид товара	Себестоимость 1 ц	Отпускная цена 1 ц
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

⇒ Разбор задачи



Задание 5

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

⇒ Разбор задачи



Задание 6

В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

⇒ Разбор задачи



Задание 7

Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

⇒ Разбор задачи



Задание 8

Найдите наименьшее значение выражения $16x^2 + 25y^2$, если $4x + 5y = 40$.

⇒ Разбор задачи



Задание 9

Найдите наименьшее значение выражения $25x^2 + 16y^2$, если $5x + 4y = 30$.

Задание 10

Найдите наименьшее значение выражения $49x^2 + 36y^2$, если $7x + 6y = 10$.

Задание 11

Найдите наименьшее значение выражения $36x^2 + 49y^2$, если $6x + 7y = 60$.

⇒ 6 способов решить задачи 12-15



Задание 12

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3x + 4y$, если $9x^2 + 16y^2 = 98$.

⇒ Разбор задачи



Задание 13

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $5x + 3y$, если $25x^2 + 9y^2 = 72$.

Задание 14

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2x + 7y$, если $4x^2 + 49y^2 = 32$.

⇒ Разбор задачи



Задание 15

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $4x + 9y$, если $16x^2 + 81y^2 = 18$.

Задание 16

Найдите наибольшее значение выражения $5\sqrt{6t + 5} + 12\sqrt{59 - 6t}$.

Задание 17

Найдите наибольшее значение выражения $8\sqrt{5t + 6} + 15\sqrt{43 - 5t}$.

Задание 18

Сергей является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $12t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Сергей платит рабочему 400 рублей. Сергей готов выделять 608 400 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Задание 19

Зинаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $15t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Зинаида платит рабочему 600 рублей. Зинаиде нужно каждую неделю производить 578 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

⇒ Разбор задачи



Задание 20

Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 360 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Задание 21

Первый сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $20t$ Гбайт информации, а второй сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $21t$ Гбайт информации. Какой наибольший объём (в Гбайтах) информации могут после обработки выдать на выходе оба сервера, если известно, что суммарный объём полученной ими на входе информации равен 3364 Гбайт и $25 < t < 55$? Укажите, сколько Гбайт информации при этом получено на входе каждым сервером.

Задание 22

Олег является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t станков. За каждый час работы (на каждом из заводов) Олег платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 станков. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

⇒ Разбор задачи

**Задание 23**

В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте имеется 180 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Задание 24

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Задание 25

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Задание 26

Артём является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Артём платит рабочему 500 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 50 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Задание 27

Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ руб. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p + 300)$ руб. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

Задание 28

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 22 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся вы- платить рабочим?

Задание 29

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 30 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Задание 30

Аделаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Аделаида платит рабочему 600 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 13 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Задание 31

Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до $2t_0$ рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого увеличения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства составляет $10000 - 2t$ единиц и это число положительно?

Задание 32

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 15000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

⇒ Разбор задачи



Задание 33

Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его

производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Задание 34

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

⇒ Разбор задачи



Задание 35

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

⇒ Разбор задачи



Задание 36

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 7x + 12$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль может составить не менее 344 млн рублей?

⇒ Разбор задачи



Задание 37

В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

⇒ Разбор задачи



Задание 38

Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S = 1,1S_0 + 2000$, где S_0 – цена этой ценной бумаги на начало года в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а также снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тысяч рублей, которые он может положить на банковский счёт или может приобрести на них ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

⇒ Разбор задачи



Задание 39

Евгений хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определенную сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 195 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 40%. Какую наименьшую сумму нужно Евгению откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

⇒ Разбор задачи



Задание 40

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

⇒ Разбор задачи



Задание 41

Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Задание 42

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2, \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

⇒ Разбор задачи



Задание 43

Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. рбу (т.е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго - 4 тыс.руб. и т.д.). В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 20% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль к концу 30 года была максимальной?

⇒ Разбор задачи



Задание 44

Вадим владеет двумя заводами в разных городах. За t^2 часов изготавливается t товаров. Рабочие первого завода получают 200 рублей в час, рабочие второго — 300 рублей в час. Недельный бюджет Вадима на оплату труда рабочих — 1200000 рублей. Какое максимальное количество товаров смогут произвести оба завода за одну неделю?

⇒ Разбор задачи



ОТВЕТЫ

1. 19,4.
2. 15,9.
3. 2,685 млн рублей.
4. 53 500 руб.
5. 125 000
6. В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков.
7. 125 месяцев.
8. 800.
9. 450.
10. 50.
11. 1800.
12. $\min(3x + 4y) = -14$, $\max(2x + 3y) = 14$.
13. $\min(5x + 3y) = -12$, $\max(5x + 3y) = 12$.
14. $\min(2x + 7y) = -8$, $\max(2x + 7y) = 8$.
15. $\min(4x + 9y) = -6$, $\max(4x + 9y) = 6$.
16. 104.
17. 119.
18. 507.
19. 693 600 руб.
20. 6,75.
21. Отдано 1682 Гбайт, получено первым сервером 1600 Гбайт, вторым сервером—1764 Гбайт.
22. 3,6.
23. 3300.
24. 280.
25. 40.
26. 90.
27. На первый объект нужно направить — 7 человек, на второй объект — 23 человека; зарплата составит 43 150 рублей.
28. На первый объект нужно направить 9 рабочих, на второй объект — 13 рабочих; зарплата составит 581 д. е.
29. На первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 23 рабочих, либо на первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 22 рабочих; зарплата составит 676 д. е.
30. 1 903 800.
31. 25.
32. 6000.
33. 12,5.
34. 10.
35. 4 года.
36. 21.
37. 2005.
38. 126 694,4 рублей.
39. 127 400.
40. 5.
41. в конце 9 года.
42. $\frac{43}{411} < r < \frac{41}{400}$.
43. в конце 11 года.
44. 100.