

проФиматика

Математика • Русский язык • Обществознание • Физика • Информатика

5340+

учеников прошли  
наши курсы



5 ЛЕТ

опыт подготовки  
к экзаменам



1000+

учеников сдали на  
90+



97%

ребят учатся  
в топ-30 вузах  
страны



# Банк задач ФИПИ

## Задача 14

### Стереометрия

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить  
к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом  
и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!



Игорь Уколов

Влад Вуль



## Группа 1

## Задание 1

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 1 : 2$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 1 : 5$ , а точка  $T$  – середина ребра  $B_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 2$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 6$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $AA_1 B_1$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 2

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 10$ ,  $AB = 12$ .

## Задание 3

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 6\sqrt{2}$ ,  $AD = 10$ ,  $AA_1 = 16$ . На рёбрах  $AA_1$  и  $BB_1$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно, причём  $A_1 E : EA = 5 : 3$  и  $B_1 F : FB = 5 : 11$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1 C_1$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через точку  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

## Задание 4

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через середину  $M$  диагонали  $AC_1$  проведена плоскость  $\alpha$  перпендикулярно этой диагонали,  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ ,  $AA_1 = 4$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $D_1$ .
- Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1 B_1$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 5

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 10$ . На рёбрах  $AA_1$  и  $BB_1$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно, причём  $A_1 E : EA = 3 : 2$  и  $B_1 F : FB = 3 : 7$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1 C_1$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через точку  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

**Задание 6**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- а) Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.  
б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

**Задание 7**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AB$  и  $AD$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $B_1N$  и  $CM$  перпендикулярны.  
б) Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $N$  и  $B_1$  параллельно прямой  $CM$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если  $B_1N = 6$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Группа 2

### Задание 1

В основании правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит треугольник  $ABC$  со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре  $AD$  отмечена точка  $T$  так, что  $AT : TD = 2 : 1$ . Через точку  $T$  параллельно прямым  $AC$  и  $BD$  проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

### Задание 2

В основании правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит треугольник  $ABC$  со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре  $AD$  отмечена точка  $T$  так, что  $AT : TD = 1 : 2$ . Через точку  $T$  параллельно прямым  $AC$  и  $BD$  проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

### Задание 3

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со стороной  $AB = 5$  и диагональю  $BD = 9$ . Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали  $BD$  основания  $ABCD$  отмечена точка  $E$ , а на ребре  $AS$  – точка  $F$  так, что  $SF = BE = 4$ .

- Докажите, что плоскость  $CEF$  параллельна ребру  $SB$ .
- Плоскость  $CEF$  пересекает ребро  $SD$  в точке  $Q$ . Найдите расстояние от точки  $Q$  до плоскости  $ABC$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



### Задание 4

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $SO = 8$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 5

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона основания  $AB$  равна 2, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точка  $M$  – середина ребра  $BC$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $D$ . Прямая  $SC$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ .

- Докажите, что  $KM = KD$ .
- Найдите объём пирамиды  $CDKM$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 6

Основанием четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , причём  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 4$ . Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

- Докажите, что  $P$  – середина отрезка  $BQ$ .
- Найдите угол между гранями  $SBA$  и  $SBC$ , если  $SD = 4$ .

## Задание 7

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 8, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 2$ ,  $SK = 1$ .

- Докажите, что плоскость  $CKM$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
- Найдите объём пирамиды  $BCKM$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 8

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 8, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На ребрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 2$ ,  $SK = 1$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 9

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

## Задание 10

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно  $\sqrt{21}$ . На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 4$ ,  $SK : KB = 1 : 3$ .

- Докажите, что плоскость  $CKM$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
- Найдите объём пирамиды  $BCKM$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 11

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона основания  $AB$  равна 5, а боковое ребро  $SA$  равно 9. Точка  $M$  лежит на ребре  $AB$ ,  $AM = 1$ , а точка  $K$  лежит на ребре  $SC$ . Известно, что  $MK = KD$ .

- Докажите, что плоскость  $DKM$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
- Найдите площадь треугольника  $DKM$ .

## Задание 12

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , равными 8 и 3 соответственно. Точки  $M$  и  $N$  лежат на рёбрах  $SD$  и  $BC$  соответственно, причём  $SM : MD = 3 : 2$ ,  $BN : NC = 1 : 2$ . Плоскость  $AMN$  пересекает ребро  $SC$  в точке  $K$ .

- Докажите, что  $SK : KC = 6 : 1$ .
- Плоскость  $AMN$  делит пирамиду  $SABCD$  на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

## Задание 13

На ребре  $SD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $M$ , причём  $SM : MD = 2 : 1$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $BC$  и  $AD$  соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $MPQ$  является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $MPQ$  разбивает пирамиду.

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 14

На рёбрах  $AC$ ,  $AD$ ,  $BD$  и  $BC$  тетраэдра  $ABCD$  отмечены точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AK : KC = 2 : 3$ . Четырёхугольник  $KLMN$  – квадрат со стороной 2.

- Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины  $B$  до плоскости  $KLM$ , если объём тетраэдра  $ABCD$  равен 25.

## Задание 15

На рёбрах  $AB$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $DA$  и  $DC$  соответственно.

- Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $PQM$  разбивает пирамиду.

## Задание 16

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

## Задание 17

В пирамиде  $ABCD$  рёбра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  попарно перпендикулярны, а  $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$ .

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах  $DA$  и  $DC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$ . Найдите площадь сечения  $MNB$ .

## Задание 18

В пирамиде  $ABCD$  рёбра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  попарно перпендикулярны, а  $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$ .

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах  $DA$  и  $DC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $MNB$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 19

Основанием четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  является трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания,  $K$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

- Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды  $KBCP$ , если  $AB = BC = CD = 4$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 9.

**Задание 20**

Точка  $M$  – середина ребра  $SA$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$ . Точка  $N$  лежит на ребре  $SB$ ,  $SN : NB = 1 : 2$ .

- Докажите, что плоскость  $CMN$  параллельна прямой  $SD$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $CMN$ , если все рёбра пирамиды равны 6.

**Задание 21**

Точка  $M$  – середина бокового ребра  $SC$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ . Точка  $N$  лежит на стороне основания  $BC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно боковому ребру  $SA$ .

- Плоскость  $\alpha$  пересекает боковое ребро  $SD$  в точке  $L$ . Докажите, что  $BN : NC = DL : LS$ .
- Плоскость  $\alpha$  делит пирамиду  $SABCD$  на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если  $BN : NC = 1 : 3$ .

**Задание 22**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  точка  $O$  – центр основания пирамиды, точка  $M$  – середина ребра  $SC$ , точка  $K$  делит ребро  $BC$  в отношении  $BK : KC = 3 : 1$ , а  $AB = 2$  и  $SO = \sqrt{14}$ .

- Докажите, что плоскость  $OMK$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите длину отрезка, по которому плоскость  $OMK$  пересекает грань  $SAD$ .

**Задание 23**

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  равны 4. Точка  $O$  – центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой  $SA$  и проходящая через точку  $O$ , пересекает рёбра  $SC$  и  $SD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Точка  $N$  делит ребро  $SD$  в отношении  $SN : ND = 1 : 3$ .

- Докажите, что точка  $M$  – середина ребра  $SC$ .
- Найдите длину отрезка, по которому плоскость  $OMN$  пересекает грань  $SBC$ .

**Задание 24**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точки  $M$  и  $K$  – середины рёбер  $AB$  и  $SC$  соответственно, а точки  $N$  и  $L$ , отмечены на рёбрах  $SA$  и  $BC$  соответственно так, что отрезки  $MK$  и  $NL$  пересекаются, а  $2AN = 3NS$ .

- Докажите, что прямые  $MN$ ,  $KL$  и  $SB$  пересекаются в одной точке.
- Найдите отношение  $BL : LC$ .

**Задание 25**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точки  $M$  и  $K$  – середины рёбер  $AB$  и  $SC$  соответственно. На продолжении ребра  $SB$  за точку  $S$  отмечена точка  $R$ . Прямые  $RM$  и  $RK$  пересекают рёбра  $AS$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $L$  соответственно, причём  $2BL = 3LC$ .

- Докажите, что отрезки  $MK$  и  $NL$  пересекаются.
- Найдите отношение  $AN : NS$ .

**Задание 26**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $MN$  и пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна рёбрам  $AB$  и  $CD$ .  
б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $BK = 1, KC = 3$ .

**Задание 27**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  известно, что  $AB = 2$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $A_1$  и  $B$  и середину  $M$  ребра  $CC_1$ . а) Докажите, что сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником. б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения плоскостью  $\alpha$  равна 6.

## Группа 3

## Задание 1

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный ( $AB = BC$ ) треугольник  $ABC$ . Точка  $K$  – середина ребра  $A_1B_1$ , а точка  $M$  делит ребро  $AC$  в отношении  $AM : MC = 1 : 3$ .

- Докажите, что  $KM \perp AC$ .
- Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABB_1$ , если  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  и  $AA_1 = 3$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 2

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$  с углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно так, что четырёхугольник  $AMKN$  – равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

- Докажите, что точка  $M$  – середина ребра  $A_1 B_1$ .
- Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка  $K$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $B_1 K : KC_1 = 2 : 3$ .

## Задание 3

Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $B_1$  и  $D$  и пересекает рёбра  $AA_1$  и  $CC_1$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Известно, что четырёхугольник  $MB_1KD$  – ромб.

- Докажите, что точка  $M$  – середина ребра  $AA_1$ .
- Найдите высоту призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если площадь её основания  $ABCD$  равна 3, а площадь ромба  $MB_1KD$  равна 6.

## Задание 4

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 3$  и  $BC = 2$ . Точка  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$ , а точка  $K$  – середина ребра  $DD_1$ .

- Докажите, что плоскость  $MKC$  параллельна прямой  $BD$ .
- Найдите тангенс угла между плоскостью  $MKC$  и плоскостью основания призмы, если  $\angle MKC = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = 60^\circ$ .

## Задание 5

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 4. На рёбрах  $AA_1$  и  $BB_1$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM = BN = 3$ .

- Точки  $O$  и  $O_1$  – центры окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  соответственно. Докажите, что прямая  $OO_1$  содержит точку пересечения медиан треугольника  $CMN$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $CMN$ .

### Задание 6

В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . Точка  $P$  делит ребро  $AB$  в отношении  $AP : PB = 1 : 3$ , а точка  $Q$  – середина ребра  $A_1C_1$ . Через середину  $M$  ребра  $BC$  провели плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную отрезку  $PQ$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна ребру  $AB$ .

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $PQ$ , считая от точки  $P$ , если известно, что  $AB = AA_1$ ,  $AB : BC = 2 : 5$ .

### Задание 7

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно, причём  $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$ . Четырёхугольник  $AMKN$  – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка  $N$  – середина ребра  $BC$ .

б) Найдите площадь трапеции  $AMKN$ , если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

### Задание 8

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 3$  и  $BC = 2$ . Точка  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$ , а точка  $K$  – середина ребра  $DD_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $MKC$  делит отрезок  $BB_1$  пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MKC$ , если  $\angle MKC = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = 60^\circ$ .

### Задание 9

В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . Точка  $P$  делит ребро  $AB$  в отношении  $AP : PB = 1 : 3$ , а точка  $Q$  – середина ребра  $A_1C_1$ . Через середину  $M$  ребра  $BC$  провели плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную отрезку  $PQ$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AC$  пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1C_1$ , считая от точки  $A_1$ , если известно, что  $AB = AA_1$ ,  $AB : BC = 2 : 5$ .

Начни заниматься  
с нами уже сегодня



# Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ



## Игорь Уколов

отец Профиматики

Выпускник мехмата МГУ

Лично подготовил 30+ стобалльников

3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов

Опыт подготовки к ЕГЭ – 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый



## Влад Вуль

отец корги и не только

Диплом факультета прикладной математики МГОУ

Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU

8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов

Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.



## Антон Гурко

преподаватель высшей математики

Выпускник ВМК МГУ

Учитель высшей категории со стажем более 10 лет

Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

Ещё больше  
полезных методичек  
в нашем Telegram-  
канале



Отзывы  
о школе



## Группа 4

### Задание 1

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $CC_1 = 2\sqrt{6}$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .

### Задание 2

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если  $AB = 20$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 21$ .

### Задание 3

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 10$ ,  $BB_1 = 7$ ,  $B_1C_1 = 24$ .

[Видеоразбор задачи](#) 



### Задание 4

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 2$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ .
- Найдите объём цилиндра.

[Видеоразбор задачи](#) 



## Задание 5

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A, B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $CC_1 = 2\sqrt{2}$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

## Задание 6

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 8$ .

Видеоразбор задачи 



## Задание 7

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ , если  $AB = 21$ ,  $BB_1 = 12$ ,  $B_1C_1 = 16$ .

## Задание 8

Различные точки  $A, B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$  так, что отрезок  $AB$  является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

- Докажите, что  $\cos \angle ASC + \cos \angle BSC = 1,5$ .
- Найдите объём тетраэдра  $SABC$ , если  $SC = 1$ ,  $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$ .

## Задание 9

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите объём цилиндра, если  $AB = 7$ ,  $BB_1 = 24$ ,  $B_1C_1 = 10$ .

## Ответы к задачам

## Группа 1

1. б)  $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{5}}{2}$

2. б)  $\operatorname{arctg} \frac{13}{5}$

3. б) 97,5

4. б) 16 : 9

5. б) 22,5

6. б)  $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$

7. б)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

## Группа 2

1. б)  $\frac{20}{3}$

2. б) 10

3. б)  $\frac{5\sqrt{19}}{18}$

4. б) 36

5. б)  $\frac{9\sqrt{5}}{4}$

6. б)  $\arccos \left( -\frac{\sqrt{21}}{21} \right)$

7. б)  $\frac{48\sqrt{17}}{7}$

8. б) 2 : 1

9. б)  $2 \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{20}$

10. б)  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

11. б)  $\frac{63\sqrt{26}}{10}$

12. б) 146 : 239

13. б)  $7 : 2$
14. б)  $3,6$
15. б)  $13 : 23$
16. б)  $\arccos \frac{37}{45}$
17. б)  $3\sqrt{6}$
18. б)  $\frac{6}{\sqrt{19}}$
19. б)  $12$
20. б)  $3,75\sqrt{19}$
21. б)  $5 : 13$
22. б)  $3$
23. б)  $\sqrt{3}$
24. б)  $3 : 4$
25. б)  $3 : 2$
26. б)  $3$
27. б)  $2\sqrt{11}$

**Группа 3**

1. б)  $\arcsin \frac{\sqrt{70}}{21}$
2. б)  $2\sqrt{3}$
3. б)  $3\sqrt{2}$
4. б)  $\frac{\sqrt{21}}{3}$
5. б)  $2\sqrt{3}$
6. б)  $3 : 2$
7. б)  $\frac{5\sqrt{37}}{6}$
8. б)  $\frac{7\sqrt{10}}{6}$
9. б)  $5 : 1$

## Группа 4

1. б) 3

2. б)  $435\pi$

3. б)  $\operatorname{arctg} \frac{26}{7}$

4. б)  $4\pi$

5. б)  $4\pi\sqrt{2}$

6. б)  $150\pi$

7. б)  $\frac{420}{29}$

8. б)  $\frac{\sqrt{6}}{36}$

9. б)  $894\pi$