профиматика

Математика • Русский язык • Обществознание • Физика • Информатика

5340+
учеников прошли наши курсы

5 ЛЕТ
опыт подготовки к экзаменам

1000+
учеников сдали на 90+

97%
ребят учатся в топ-30 вузах страны

Задача 14
необходимая теория

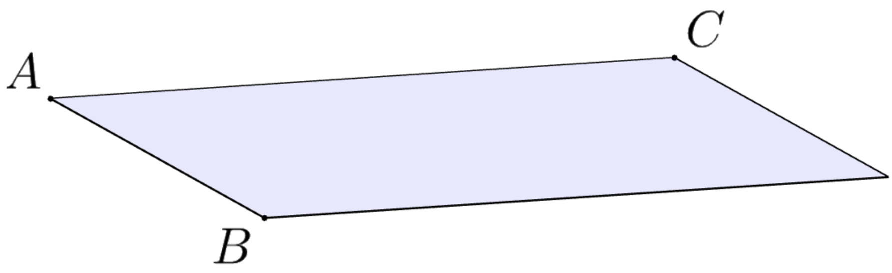
Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

Содержание

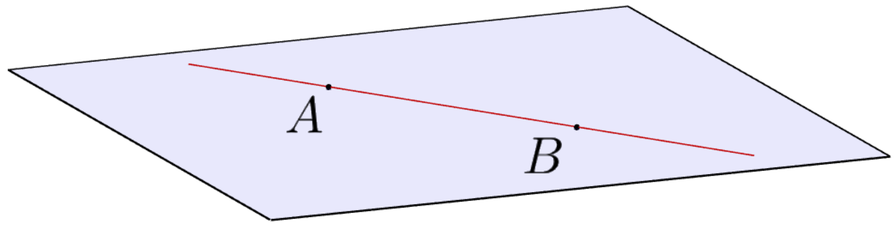
1 Аксиомы

Начнём с того, что сформулируем аксиомы стереометрии.

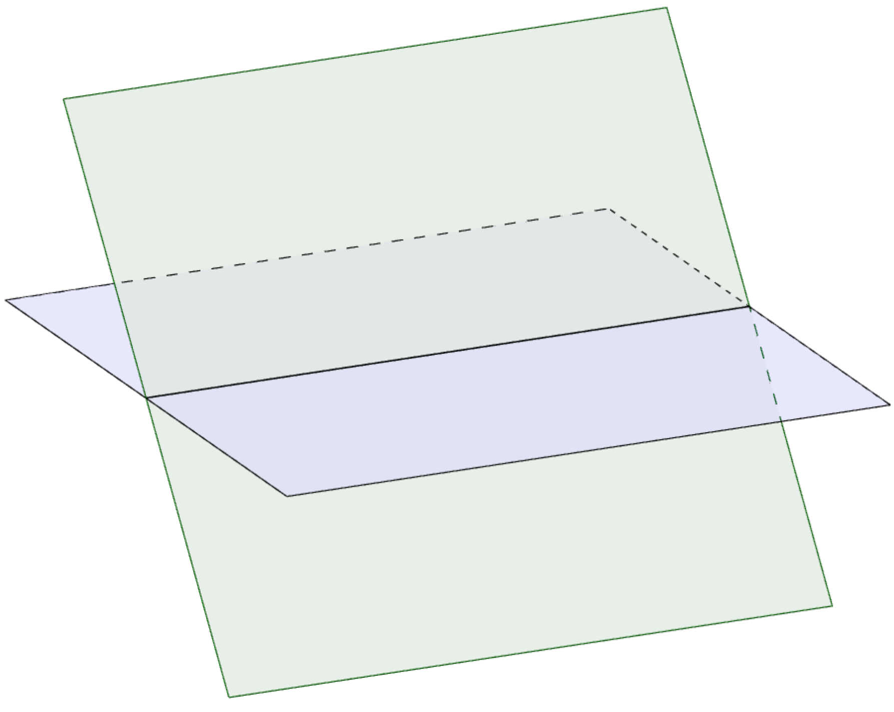
Аксиома 1: Три точки, не лежащие на одной прямой, задают единственную плоскость.



Аксиома 2: Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости.



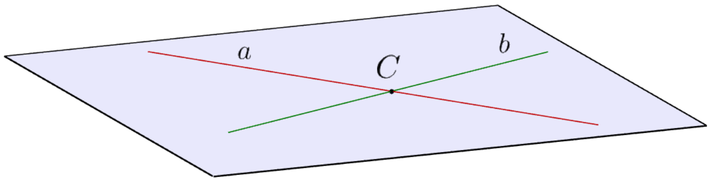
Аксиома 3: Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



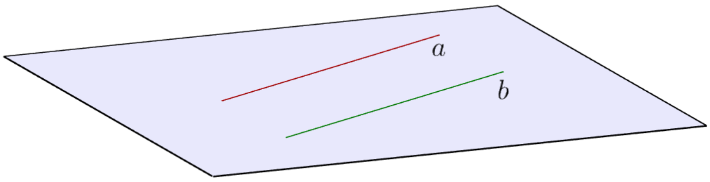
2 Расположение прямых в пространстве

В пространстве есть три варианта взаимного расположения двух различных прямых.

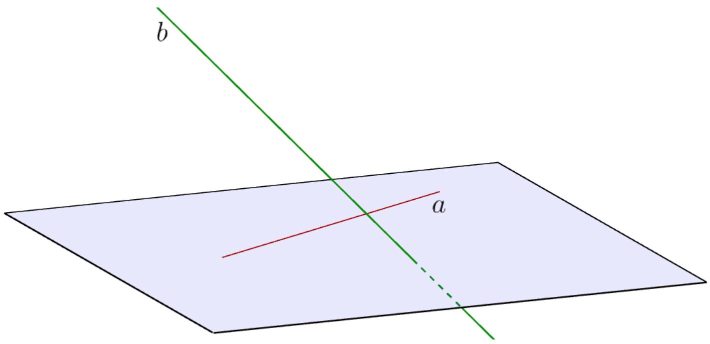
Случай 1: Две прямые a и b пересекаются в некоторой точке C.



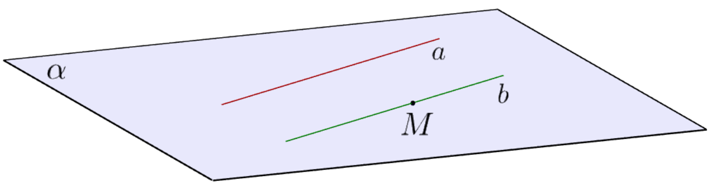
Случай 2: Две прямые a и b параллельны (это означает, что существует плоскость, в которой данные прямые лежат, но не пересекаются).



Случай 3: Две прямые a и b скрещиваются (это значит, что не существует плоскости, в которой они лежат).



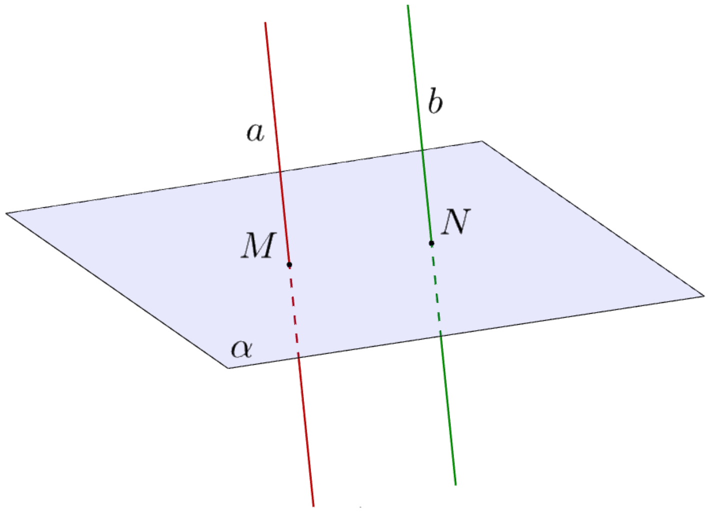
1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.



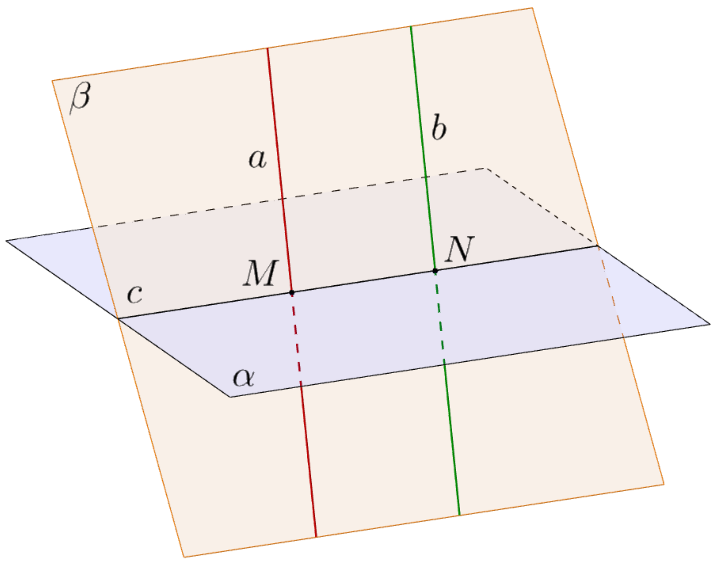
Доказательство: Возьмём прямую a и точку M, не лежащую на прямой a. Прямую a можно задать двумя точками, поэтому по аксиоме 1 через прямую a и точку M проходит ровно одна плоскость α. В этой плоскости проведём прямую b через точку M параллельно прямой a. Нам известно, что такая прямая ровно одна.

Определение: Прямая пересекает данную плоскость, если они имеют ровно одну общую точку.

2. Если одна из параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

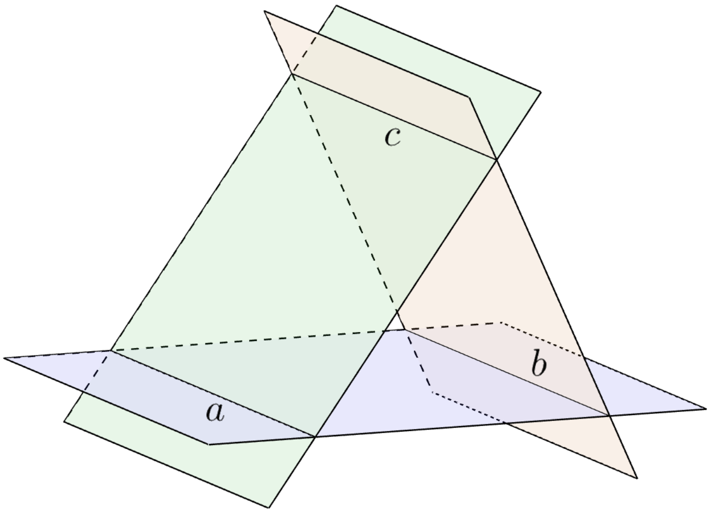


Доказательство: Пусть a и b – параллельные прямые, причём a пересекает плоскость α в точке M. Мы знаем (по определению), что существует плоскость β, в которой лежат параллельные прямые a и b. α и β имеют общую точку M, значит, по аксиоме 3 имеют общую прямую c. Прямая c лежит в плоскости β и пересекает одну из параллельных прямых, лежащих в этой плоскости (прямую a), значит, она также пересекает прямую b в некоторой точке N. Точка N лежит на прямой c, значит, она лежит в плоскости α.

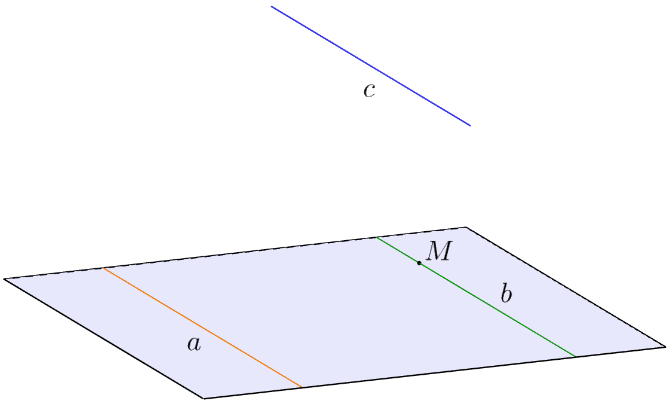


Докажем теперь, что N – единственная общая тока плоскости α и прямой b. Пусть это не так, и существует ещё одна общая точка, тогда по аксиоме 2 прямая b целиком лежит в плоскости α. При этом прямая b лежит в плоскости β, значит, b – прямая, по которой пересекаются α и β. Следовательно, прямые b и c совпадают, но тогда a и b пересекаются. Противоречие.

3. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

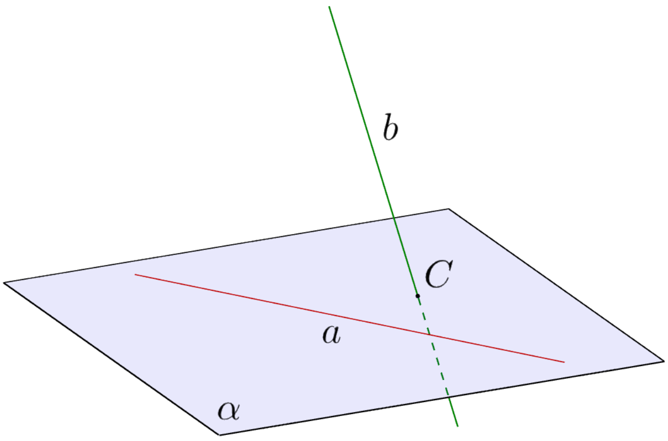


Доказательство: Пусть $a\,||\,c$ и $b\,||\,c$. Покажем, что прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются.
Действительно, отметим точку M на прямой b. Проведём через точку M и прямую a плоскость α. Мы знаем, что $a\,||\,c$, следовательно прямая c параллельна плоскости α. Если b пересекает плоскость α, то из пункта 2 следует, что и прямая c пересекает эту плоскость, но c $||\,\alpha$. Получаем противоречие, то есть прямые a и b лежат в одной плоскости.



Если бы a и b пересекались, то через точку их пересечения проходило бы две различные прямые, параллельные прямой c, чего быть не может. Значит, они параллельны.

4. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на этой прямой, то эти прямые скрещиваются

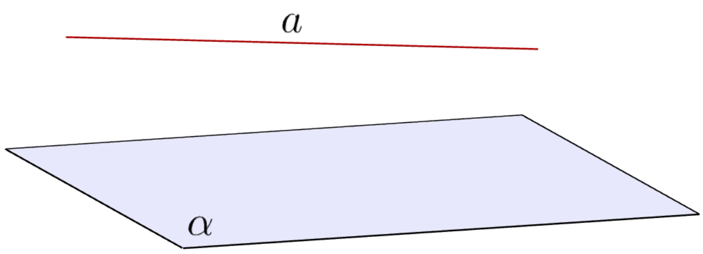


Доказательство: Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает α в точке C. Предположим, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Через прямую a и точку C проходит ровно одна плоскость - это плоскость α. Но тогда прямая b тоже должна лежать в плоскости α. Противоречие.

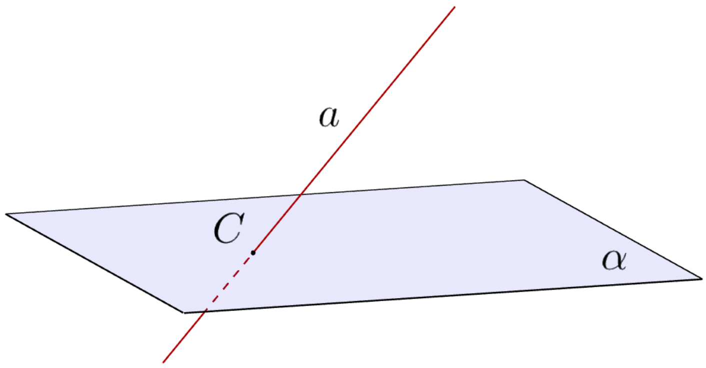
3 Расположение прямой и плоскости в пространстве

Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости.

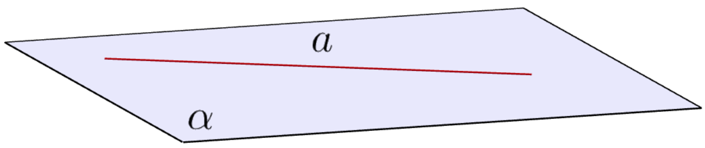
Случай 1: Прямая a параллельна плоскости α (это означает, что прямая не имеет общих точек с плоскостью).



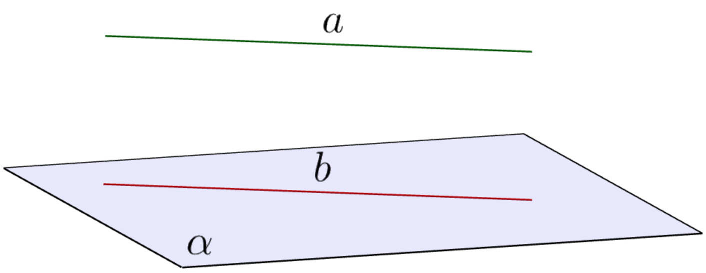
Случай 2: Прямая a пересекает плоскость α в некоторой точке C.



Случай 3: Прямая a лежит в плоскости α.



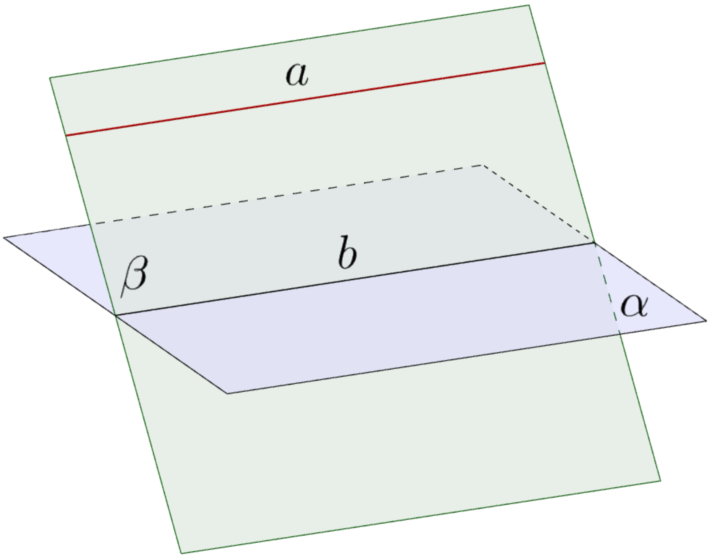
1. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



Доказательство: Пусть прямая b лежит в плоскости α, а прямая a параллельна прямой b и не лежит в плоскости α.
Допустим, что прямая a не параллельна плоскости α, тогда она её пересекает. Прямая b параллельна прямой a, поэтому прямая b также должна пересекать плоскость α (так как, если одна из параллельных прямых пересекает некоторую плоскость, то и другая прямая

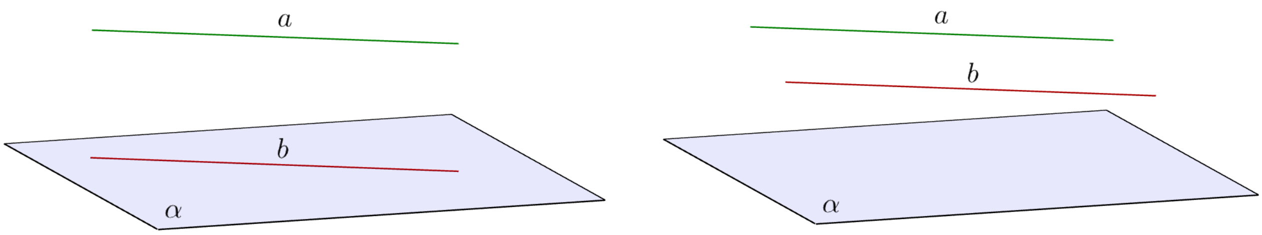
пересекает эту плоскость), но это не так. Противоречие. Значит, прямая a параллельна плоскости α.

2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



Доказательство: Пусть прямая a параллельная плоскости α лежит в плоскости β, и плоскости α и β пересекаются по прямой b. Прямые a и b лежат в плоскости β. Тогда, либо эти прямые параллельны, либо пересекаются. При этом прямая a параллельна плоскости α, а значит не может пересекать прямую b, то есть a и b параллельны.

3. Если одна из параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо тоже параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

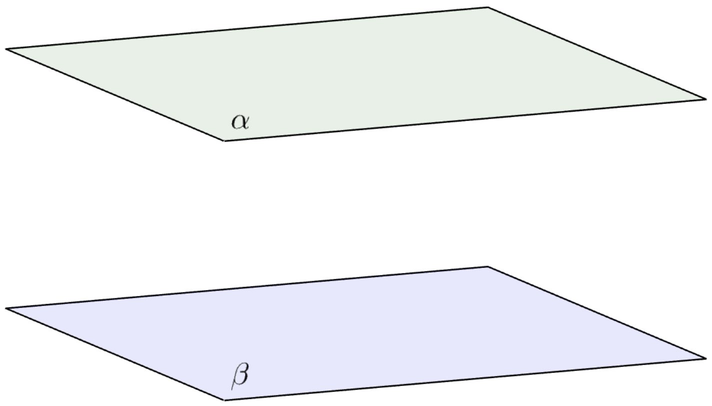


Доказательство: Пусть a и b – параллельные прямые и прямая a параллельна плоскости α. Если бы прямая b пересекала плоскость α, то её пересекала бы и прямая a. Противоречие. Значит, прямая b либо лежит в плоскости α, либо параллельна ей.

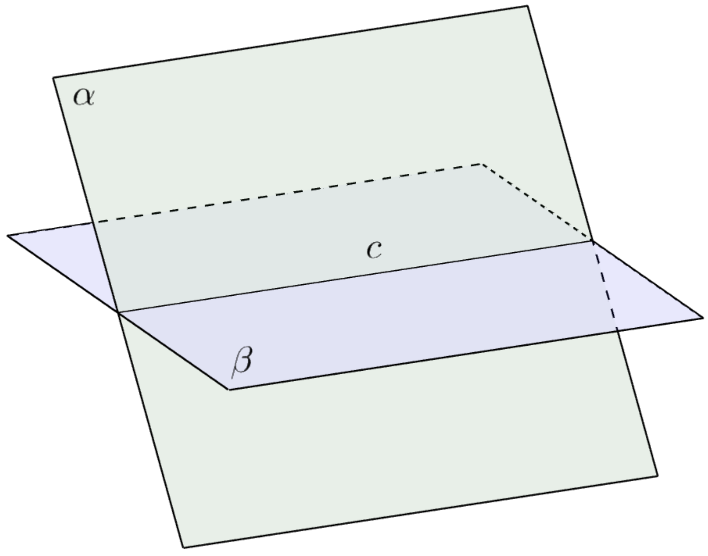
4 Расположение плоскостей в пространстве

Существует три варианта взаимного расположения двух плоскостей.

Случай 1: Две плоскости α и β параллельны (то есть не имеют точек пересечения).

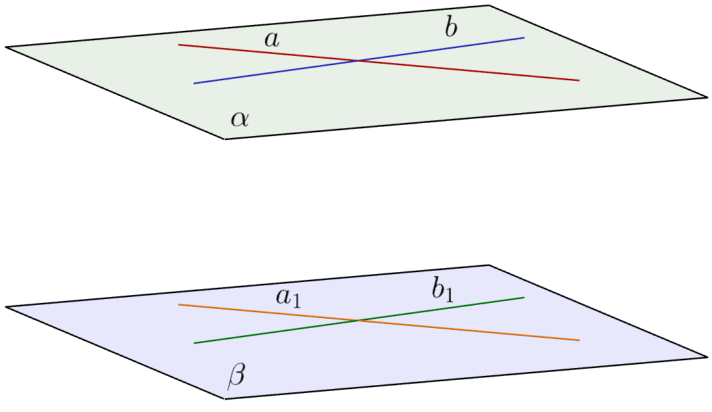


Случай 2: Две плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой c.



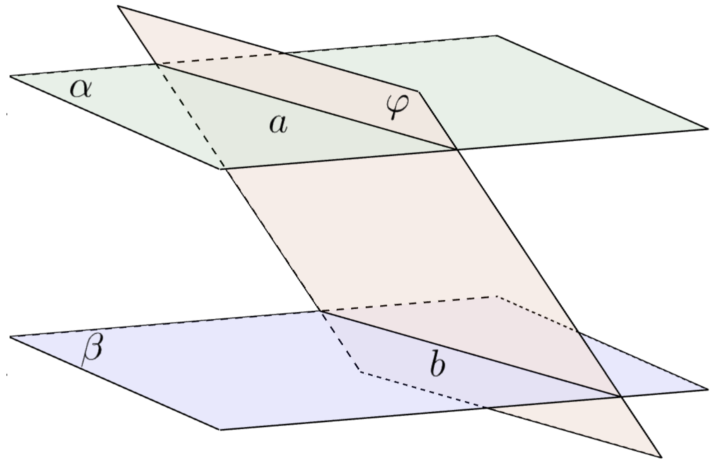
Случай 3: Две плоскости α и β совпадают.

1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Доказательство: Пусть нам даны плоскости α и β. Прямые a и b лежат в плоскости α и пересекаются. Прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β и $a_1 \,||\, a$ и $b_1 \,||\, b$.
Допустим, что плоскости α и β пересекаются. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. В плоскости β лежит прямая a_1, которая параллельна прямой a, значит, прямая a параллельна плоскости β. Но тогда прямая пересечения плоскостей α и β параллельна прямой a, то есть $a \,||\, c$. Но абсолютно также можно показать, что $b \,||\, c$, из чего следует, что $a \,||\, b$. Но прямые a и b пересекаются. Противоречие. То есть плоскости α и β параллельны.

2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

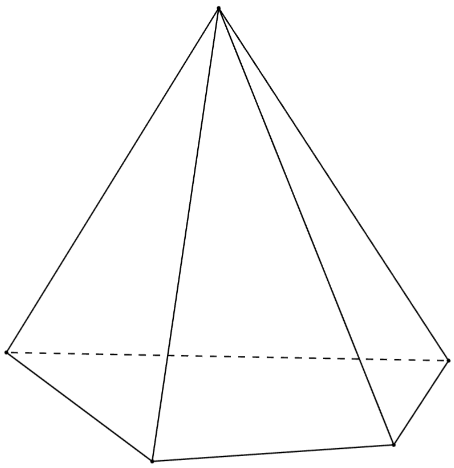


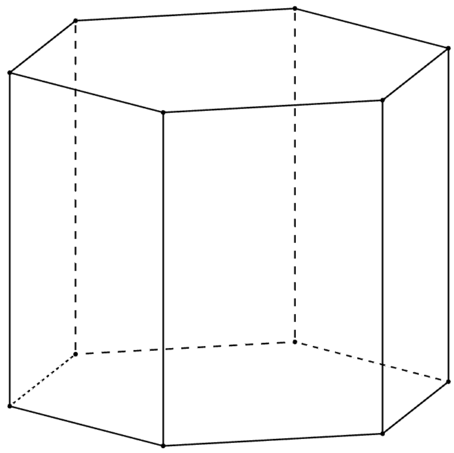
Доказательство: Пусть плоскость φ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Прямые a и b лежат в плоскости φ. Допустим они пересекаются. Тогда плоскости α и β имели бы точку пересечения, что противоречит их параллельности.

5 Классификация многогранников

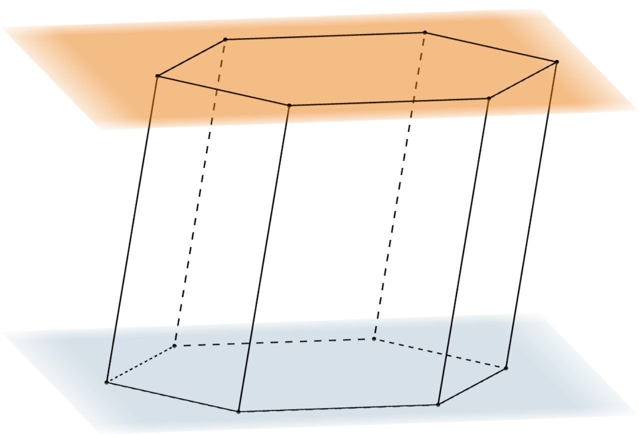
Определение: *Геометрическое тело* – это часть пространства, которая ограничена замкнутой поверхностью своей наружной границы.

Определение: *Многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, называемых *гранями*. Стороны граней называются *рёбрами* многогранника.

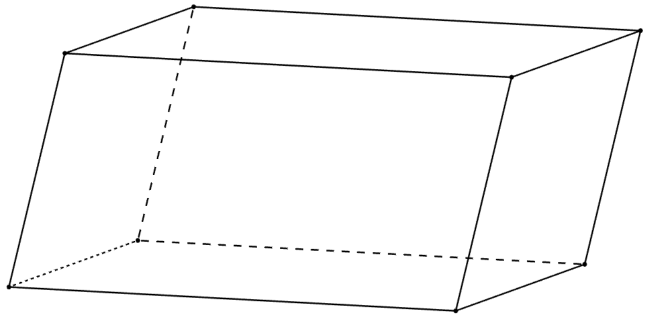




Определение: *Призмой* называется многогранник две грани которого являются равными многоугольниками (их называют *основаниями*), лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани (их называют *боковыми*) представляют собой параллелограммы, имеющие общие рёбра с основаниями. Призма, боковые рёбра которой перпендикулярны основаниям, называется *прямой*.

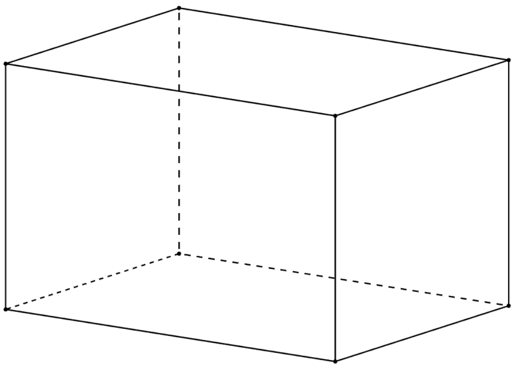


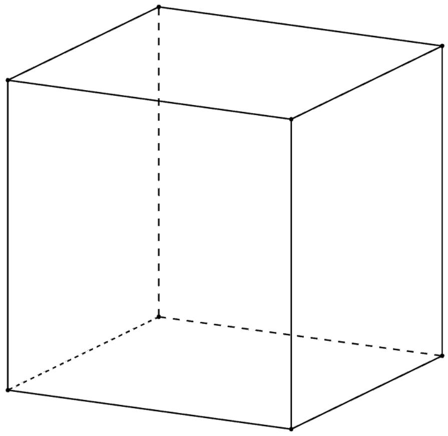
Определение: *Параллелепипедом* называется призма, все грани которой являются параллелограммами.



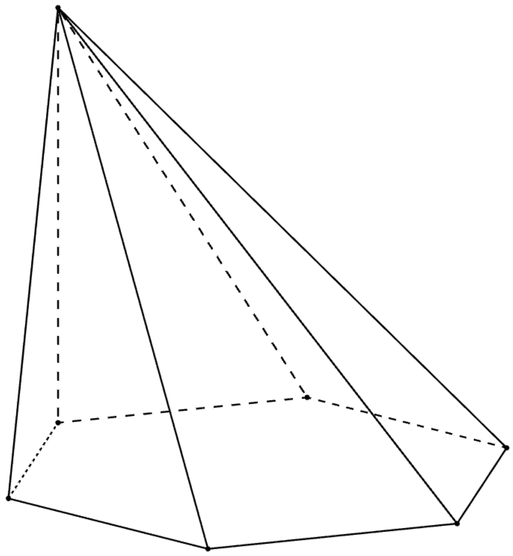
Замечание: Если в основании призмы лежит n-угольник, то такую призму будем называть n-угольной. Например, если основаниями призмы являются треугольники, то такая призма будет являться треугольной.

Определение: Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его грани являются прямоугольниками. *Кубом* называется параллелепипед все грани которого являются квадратами.

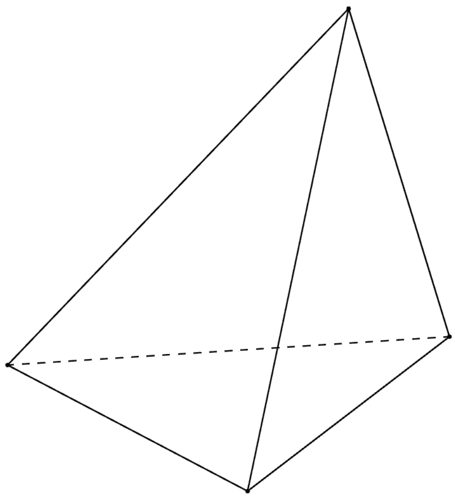


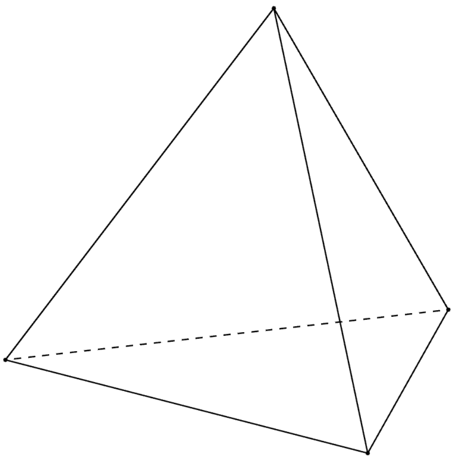


Определение: Пирамидой называется многогранник, одной из граней которого является произвольный n-угольник (*основание* пирамиды), а остальные n граней (*боковые* стороны) являются треугольниками с общей точкой (*вершиной*).

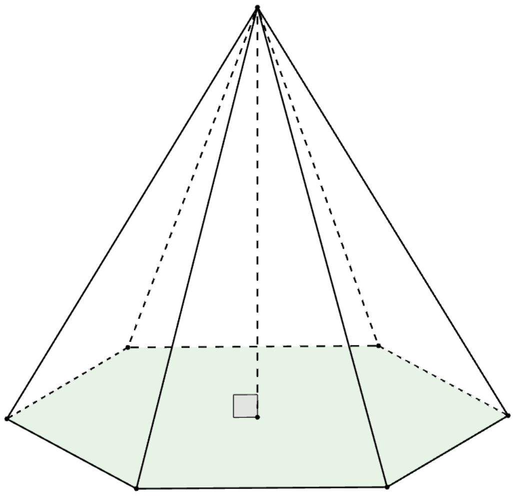


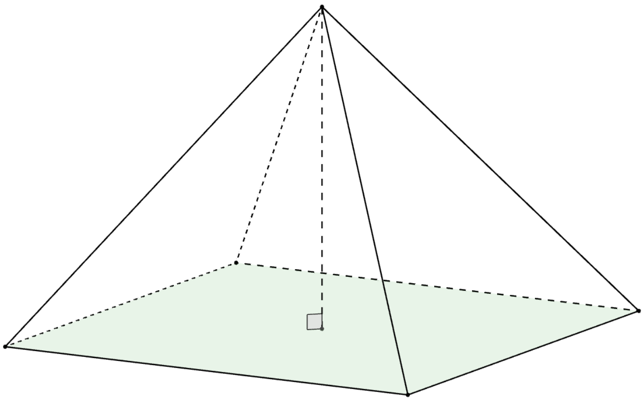
Определение: *Тетраэдром* называется пирамида, гранями которой являются треугольники. Тетраэдр, грани которого являются правильными треугольниками, называется *правильным*.





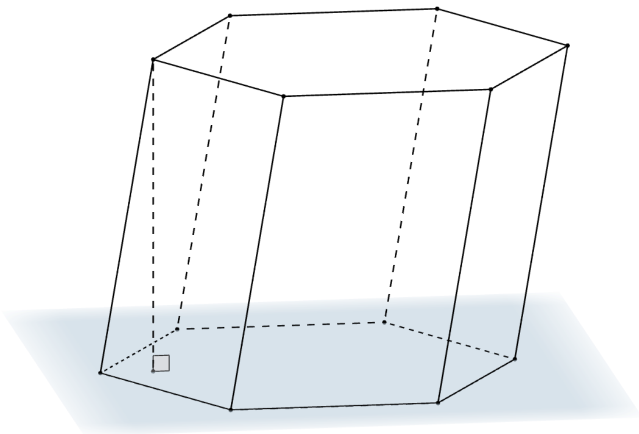
Определение: Пирамида называется *правильной*, если её основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.



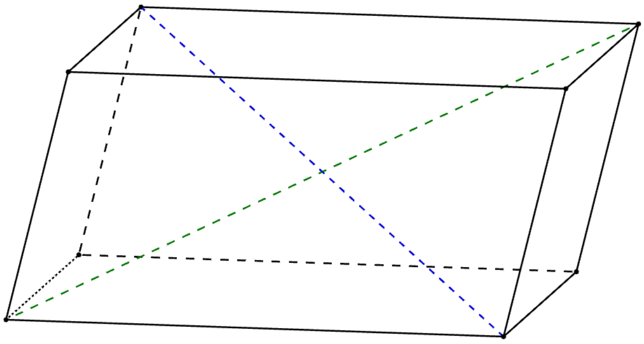


6 Свойства призмы, параллелепипеда, куба

Определение: *Высотой* призмы называется перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.



Определение: *Диагональ призмы* – это отрезок, соединяющий две её вершины, не принадлежащие одной грани.

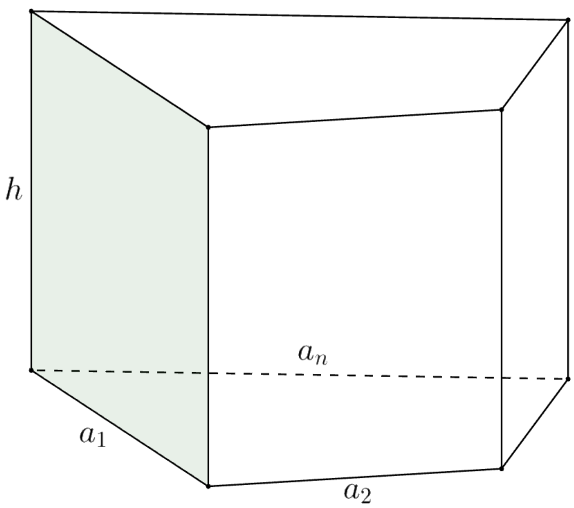


Определение: *Площадью полной поверхности* призмы называется суммарная площадь всех граней призмы (обозначается $S_{\text{полн}}$). *Площадью боковой поверхности* призмы называется суммарная площадь боковых граней призмы (обозначается $S_{\text{бок}}$).

1. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна

$$S_{\text{бок}} = P \cdot h,$$

где P – периметр основания, h – высота призмы.



Доказательство: Пусть a_1, a_2, …, a_n – стороны основания. Боковые грани нашей призмы – это прямоугольники со сторонами a_i и h (так как наша призма является прямой). Тогда площадь боковой поверхности призмы равна

$$a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + \ldots + a_n \cdot h = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot h = P \cdot h.$$

2. Площадь полной поверхности прямой призмы равна

$$S_{\text{полн}} = P \cdot h + 2 \cdot S_{\text{осн}}.$$

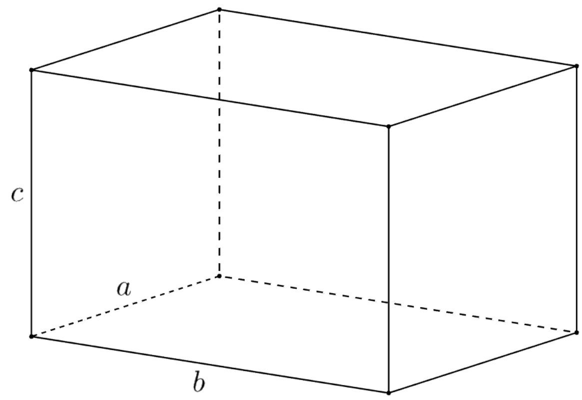
3. Объём призмы равен

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

где h – высота призмы.

4. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b, c равна

$$S = 2ab + 2ac + 2bc.$$



Доказательство: Действительно, поверхность параллелепипеда состоит из двух прямоугольников со сторонами a и b (их площади равны ab), из двух прямоугольников со сторонами a и c (их площади равны ac) и из двух прямоугольников со сторонами b и c (их площади равны bc). Тогда площадь поверхности равна

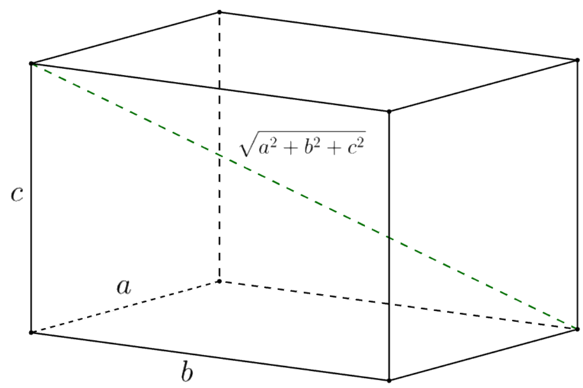
$$S = 2ab + 2ac + 2bc.$$

5. Объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b, c равен

$$V = abc.$$

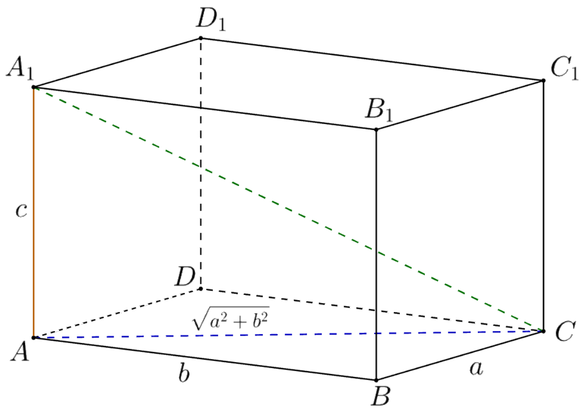
6. Диагонали прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c равны

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Доказательство: Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. $AB = b$, $BC = a$, $AA_1 = c$. Тогда из треугольника ABC по теореме Пифагора $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. Применим теперь теорему Пифагора для треугольника ACA_1:

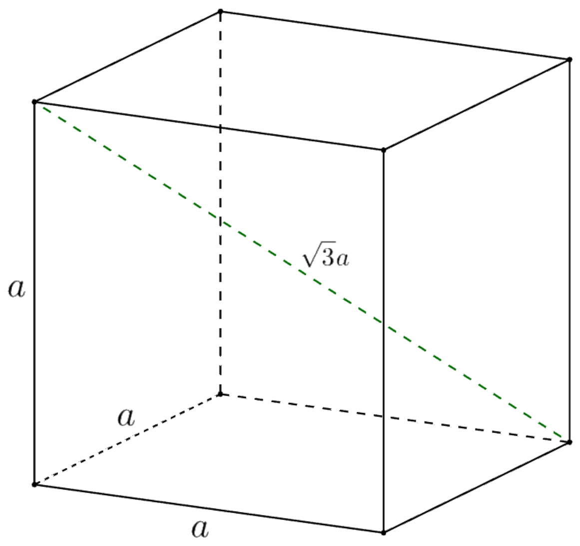
$$A_1C = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



7. Площадь полной поверхности куба с ребром a равна $6a^2$.

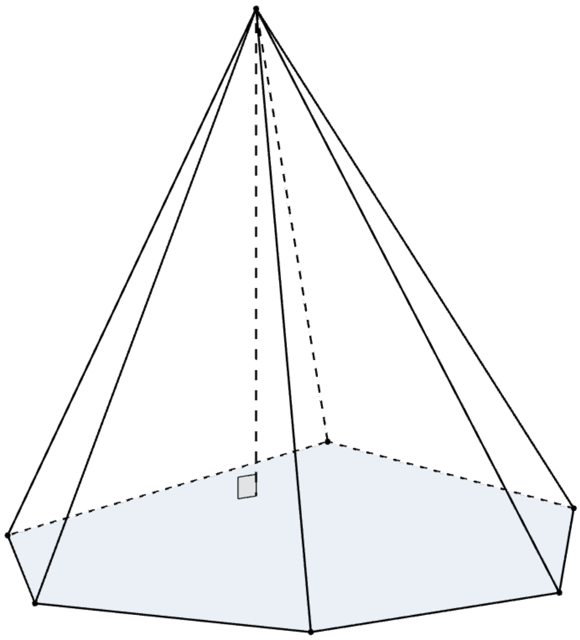
8. Объём куба с ребром a равен a^3.

9. Длина диагонали куба с ребром a равна $a\sqrt{3}$.

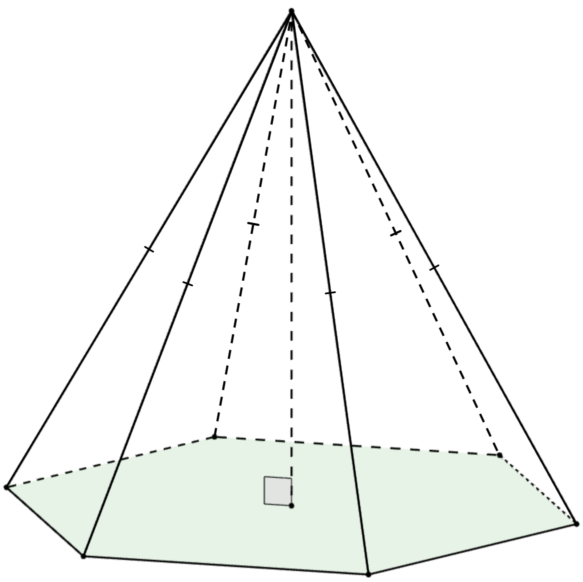


7 Свойства пирамиды

Определение: *Высотой* пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины на основание пирамиды.



1. Боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.



Доказательство: Рассмотрим правильную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_n$. Пусть O – проекция вершины S на основание (то есть SO – высота), причём $SO = h$. Так как O – центр правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, то

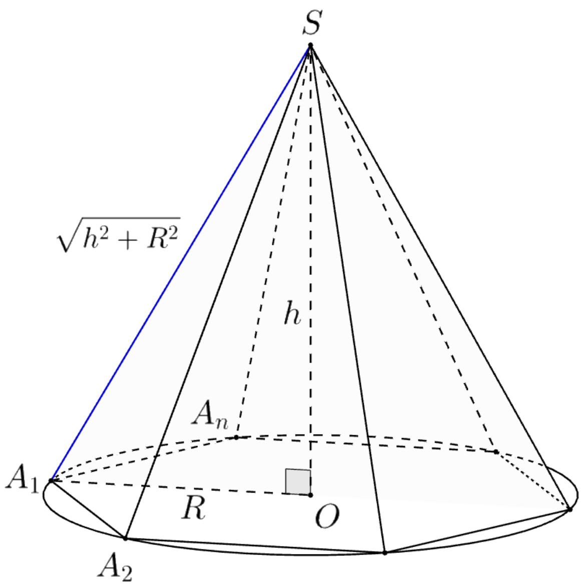
$$OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n = R,$$

где R – радиус описанной вокруг многоугольника окружности.
Высота SO перпендикулярна плоскости основания пирамиды, следовательно, перпендикулярна отрезкам $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, т.е. треугольники $SOA_1, SOA_2, \ldots, SOA_n$ -

прямоугольные. Значит, по теореме Пифагора получаем:

$$SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

То есть все боковые рёбра равны между собой. Кроме того, так как основанием является правильный многоугольник, то все рёбра основания равны между собой. Следовательно, все боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

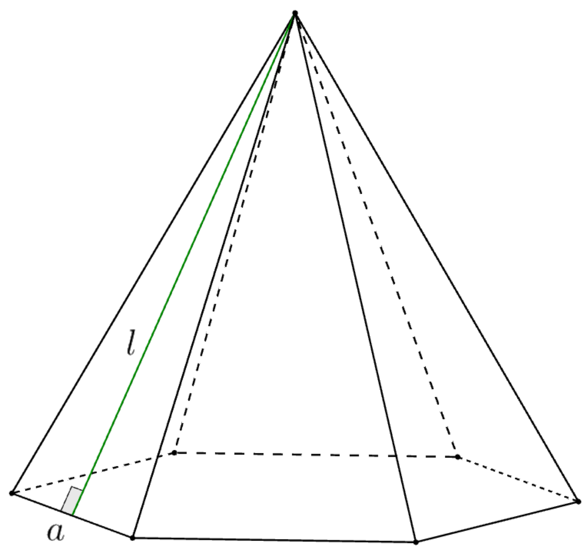


Определение: Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой.*

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна

$$S_{\text{бок}} = pl,$$

где p – полупериметр основания, l – апофема.



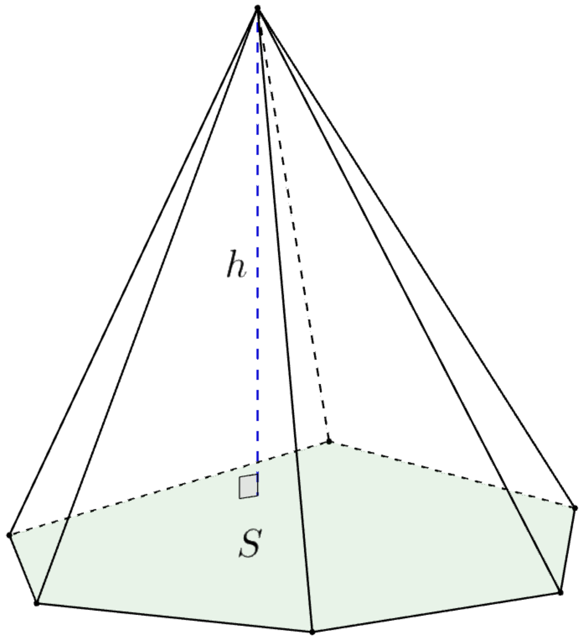
Доказательство: Пусть a – ребро основания. Площадь боковой грани равна $\frac{al}{2}$. Тогда

$$S_{\text{бок}} = \frac{al}{2} + \frac{al}{2} + \ldots + \frac{al}{2} = \frac{na}{2} \cdot l = pl.$$

3. Объём пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

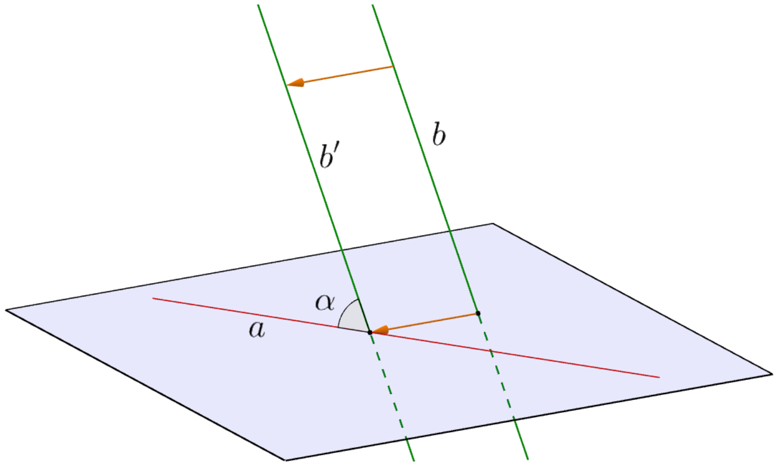
где S – площадь основания, h – высота пирамиды.



8 Вычисление угла между прямыми

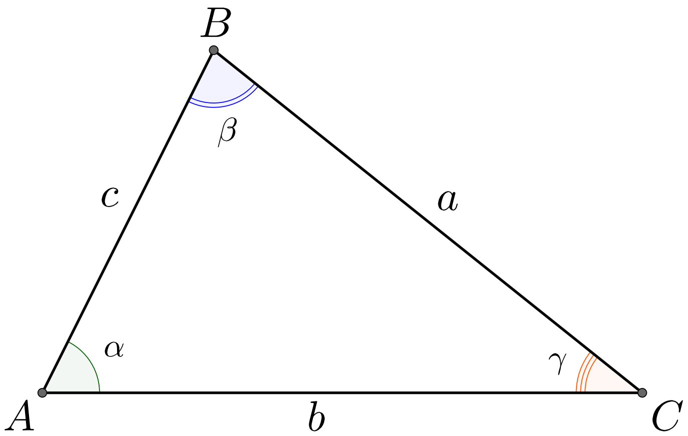
Определение: *Углом* между пересекающимися прямыми называется градусная мера наименьшего из углов, образованных при пересечении прямых. То есть угол между пересекающимися прямыми всегда принадлежит промежутку $(0°; 90°]$.

Пусть в пространстве нам даны две непараллельные прямые a и b. Параллельно перенесём прямую b так, чтобы полученная прямая b' пересекалась с a. Тогда углом между прямыми a и b будем называть угол между прямыми a и b'.



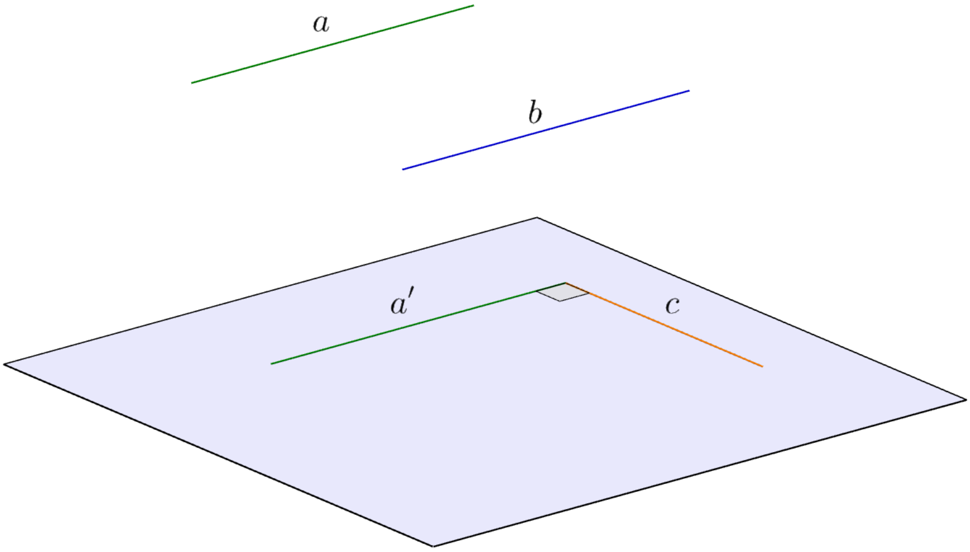
1. **Теорема косинусов.** В произвольном треугольнике ABC верны следующие соотношения:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



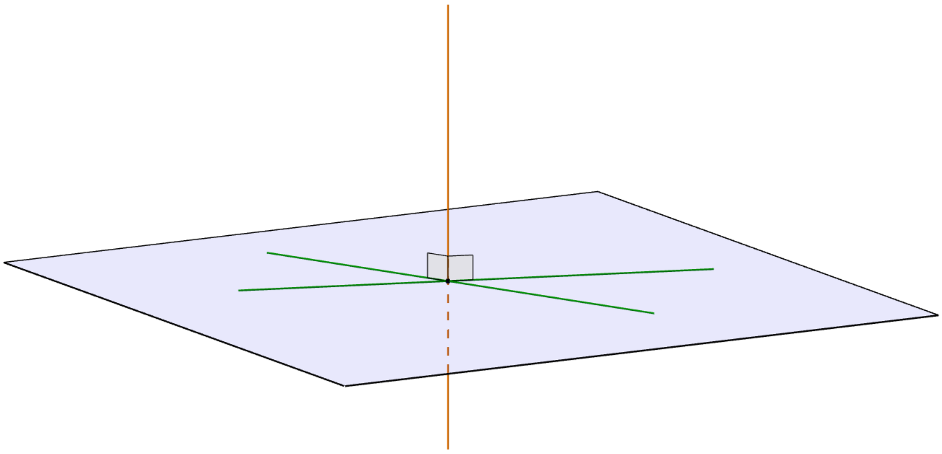
9 Перпендикулярность в пространстве

№14 1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.



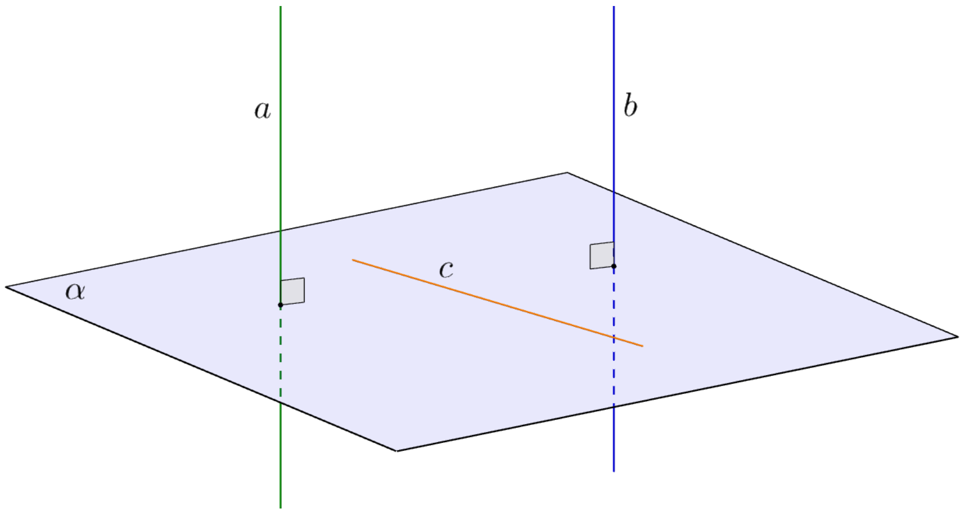
Доказательство: Пусть прямые a и b параллельны и прямая a перпендикулярна прямой c. Проведём через прямую c плоскость параллельно прямой a и рассмотрим в этой плоскости прямую a', которая параллельна a. Угол между прямыми a' и c равен $90°$. Так как $a \,||\, b$, то и $b \,||a'$, значит, $b \perp c$.

Определение: Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

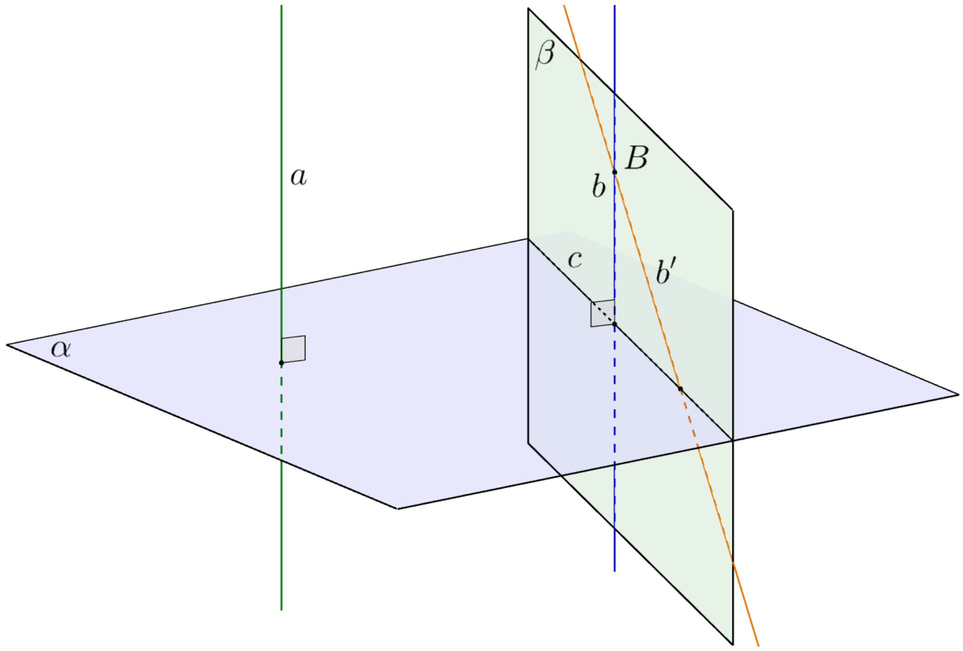


2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство: Пусть прямые a и b параллельны и прямая a перпендикулярна плоскости α. Пусть прямая c лежит в плоскости α, тогда $a \perp c$. Из пункта 1 следует, что и прямая b перпендикулярна прямой c. Следовательно, прямая b перпендикулярна плоскости α.

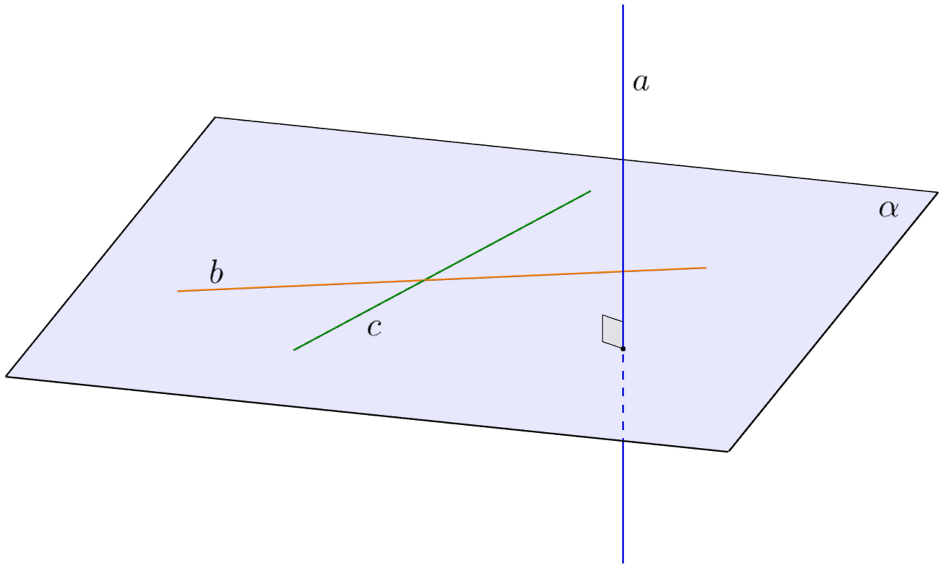


3. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

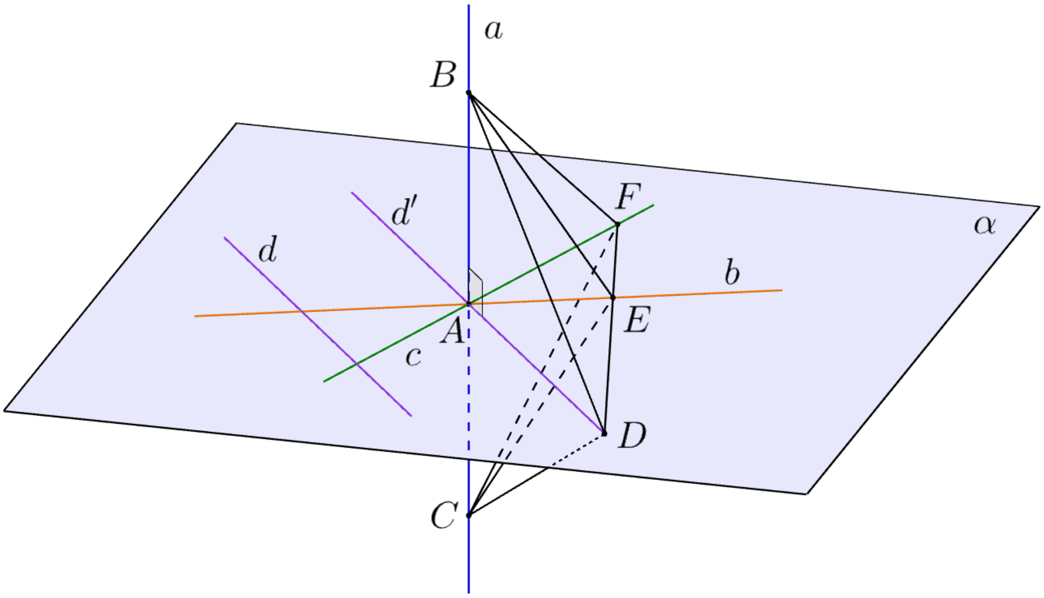


Доказательство: Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α. Через точку B на прямой b проведём прямую b', параллельную прямой a. Тогда прямая b' перпендикулярна плоскости α. При этом прямые b и b' лежат в некоторой плоскости β. Плоскость β пересекает плоскость α по прямой c, значит, прямые b и b' перпендикулярны прямой c, но такое может быть только если эти прямые совпадают. Следовательно, прямые a и b параллельны.

4. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



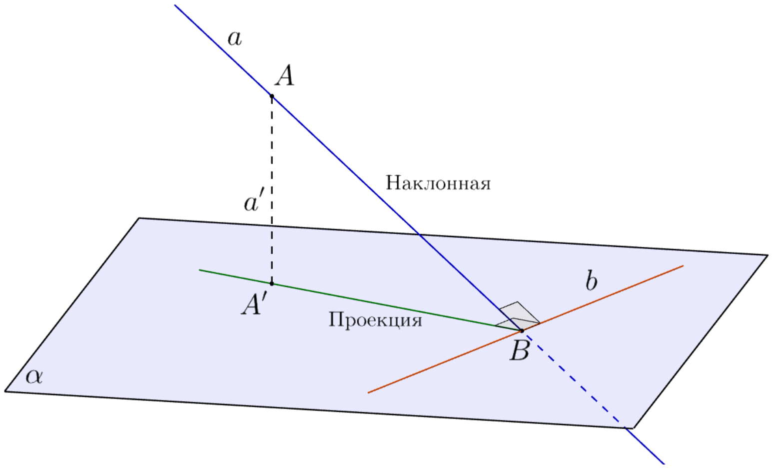
Доказательство: Пусть прямые b и c лежат в плоскости α и пересекаются в точке A. Прямая a перпендикулярна прямым b и c.
Рассмотрим случай, когда a проходит через A. Пусть d – прямая, лежащая в плоскости α, мы хотим доказать, что $a \perp d$. Проведём через точку A прямую d' параллельную прямой d. На прямой a отметим точки B и C так, что $AB = AC$. Проведём прямую, которая пересекает прямые b, c и d' в точках E, F и D. Так как b перпендикулярна прямой AB, то b – серединный перпендикуляр к отрезку BC. Аналогично, c – серединный перпендикуляр к отрезку BC. Отсюда получаем, что $BF = FC$ и $BE = EC$, то есть треугольники BFE и CFE равны по трём сторонам, значит, $\angle BFE = \angle CFE$. Таким образом, треугольники BFD и CFD равны по двум сторонам ($BF = FC$, FD – общая) и углу ($\angle BFE = \angle CFE$), поэтому $BD = DC$. То есть треугольник BDC равнобедренный, притом AD – медиана этого треугольника, поэтому AD – высота этого треугольника, то есть $a \perp d'$, следовательно, $a \perp d$.



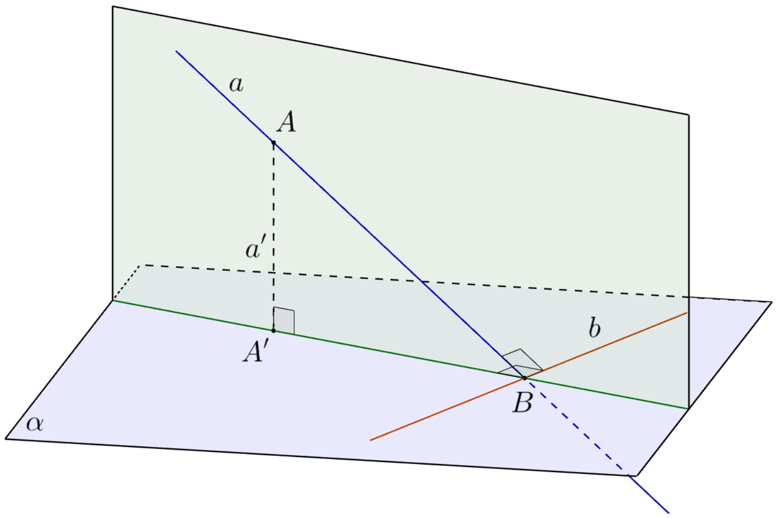
Пусть теперь прямая a не проходит через точку A. Мы можем провести через точку A прямую a', параллельную прямой a. По доказанному выше заключаем, что $a' \perp \alpha$, следовательно (по пункту 1), $a \perp \alpha$.

5. (**Прямая теорема о трёх перпендикулярах**): Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

(**Обратная теорема о трёх перпендикулярах**): Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ей, перпендикулярна и её проекции.



Доказательство: Для начала докажем прямую теорему о трёх перпендикулярах. Пусть AB – наклонная, AA' – перпендикуляр к плоскости α. То есть прямая $A'B$ – проекция прямой AB на плоскость α. b – прямая, лежащая в плоскости α и $b \perp A'B$. Мы хотим показать, что $AB \perp b$.
Рассмотрим плоскость (BAA'). Прямая b перпендикулярна прямым AA' и $A'B$, значит, $b \perp (BAA')$. Прямая AB лежит в плоскости (BAA'), поэтому $b \perp AB$.

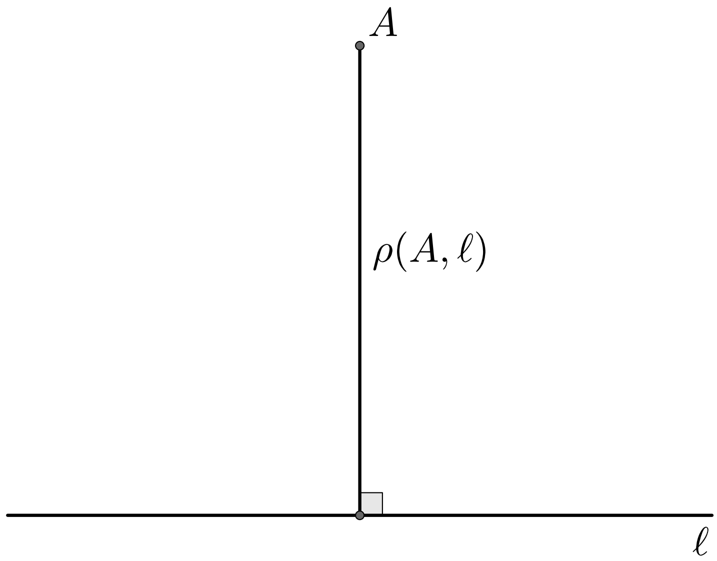


Теперь докажем обратную теорему о трёх перпендикулярах. Пусть AB – наклонная, прямая b лежит в плоскости α, проходит через B и $AB \perp b$. A' – проекция точки A на плоскость α, значит, $A'B$ – проекция наклонной AB на плоскость α.
Рассмотрим плоскость (BAA'), мы знаем, что $b \perp AB$ и $b \perp AA'$, значит, $b \perp (BAA')$. Из этого следует, что прямая b перпендикулярна прямой $A'B$, лежащей в плоскости (BAA').

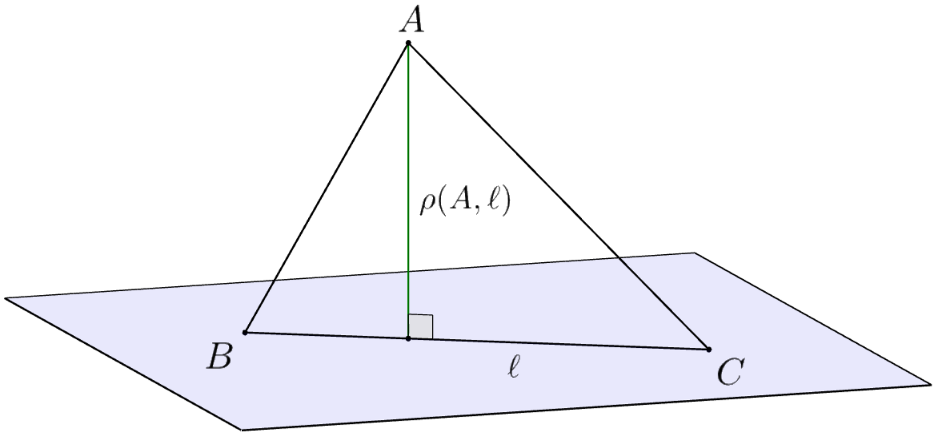
Замечание: Важно уточнить, что прямая b не обязана проходить через точку B.

10 Вычисление расстояния от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

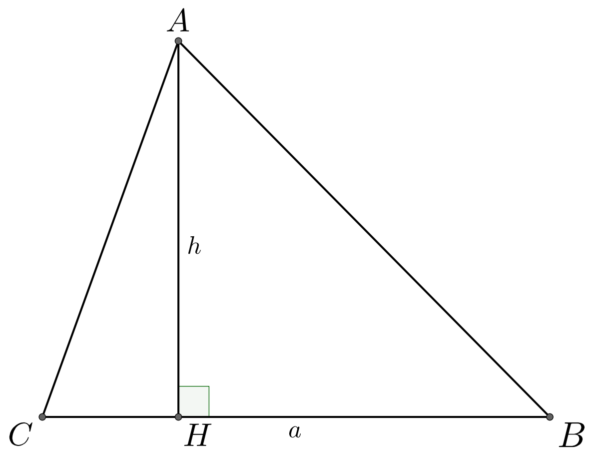


Это расстояние удобно находить как высоту некоторого треугольника.



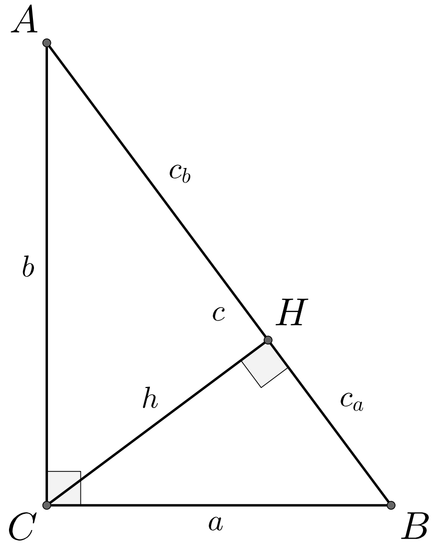
1. Высота треугольника равна его удвоенной площади, делённой на основание.

$$h = \frac{2S}{a}.$$



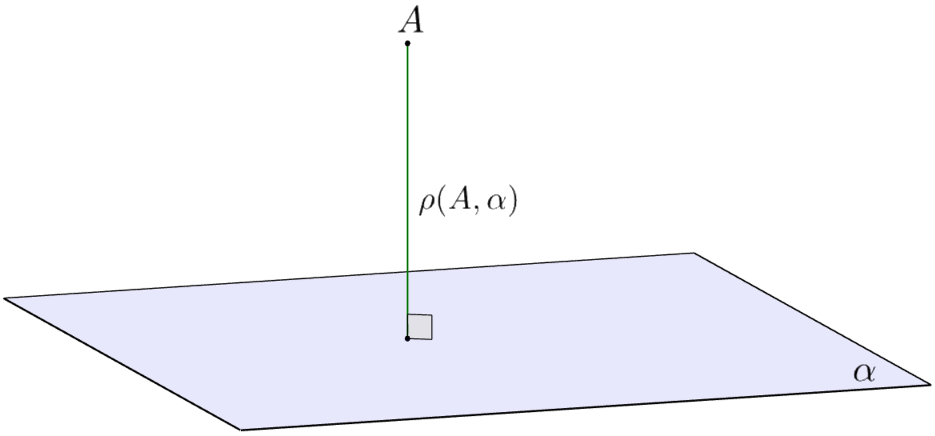
2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$



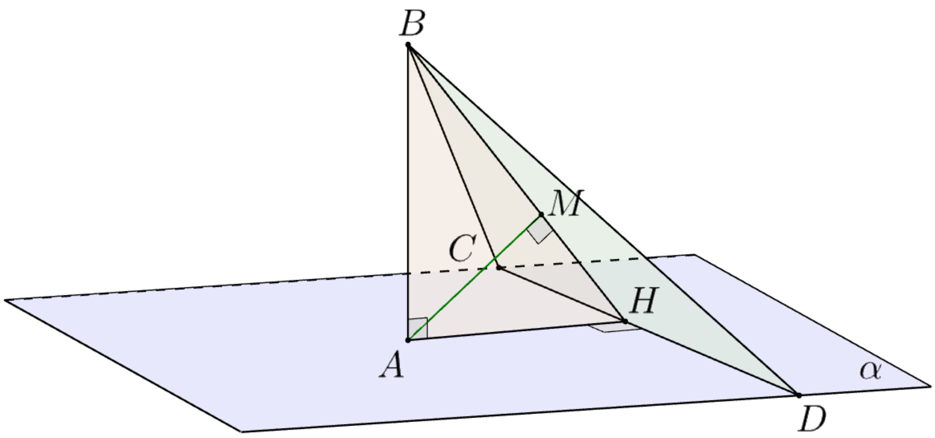
11 Вычисление расстояния от точки до плоскости

Определение: Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



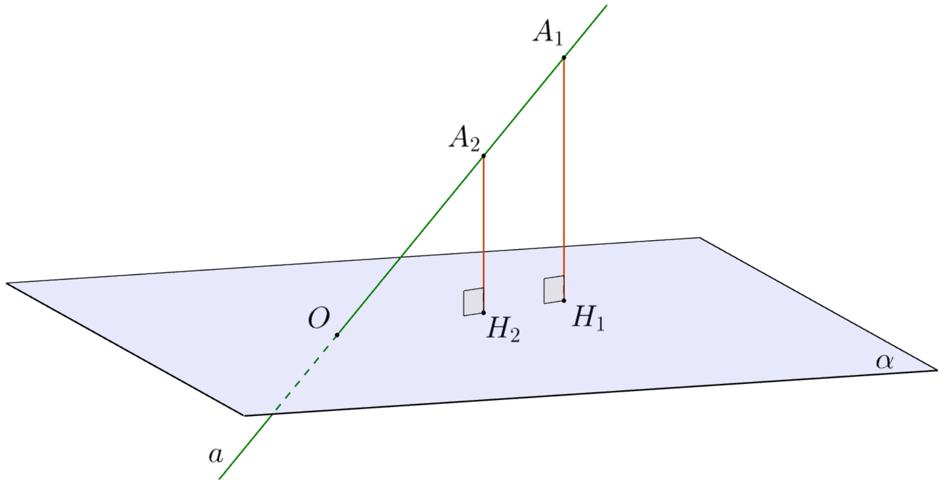
1. (**Построение перпендикуляра**) Пусть точки A, C и D лежат в плоскости α, а точка B лежит вне плоскости α и $AB \perp \alpha$. Мы хотим найти расстояние от точки A до плоскости (BCD).
Опустим перпендикуляр AH из точки A на прямую CD. Прямая CD перпендикулярна прямым AH и AB, значит, $CD \perp (BAH)$. Тогда высота AM треугольника ABH равна расстоянию от точки A до плоскости (BCD). Получаем:

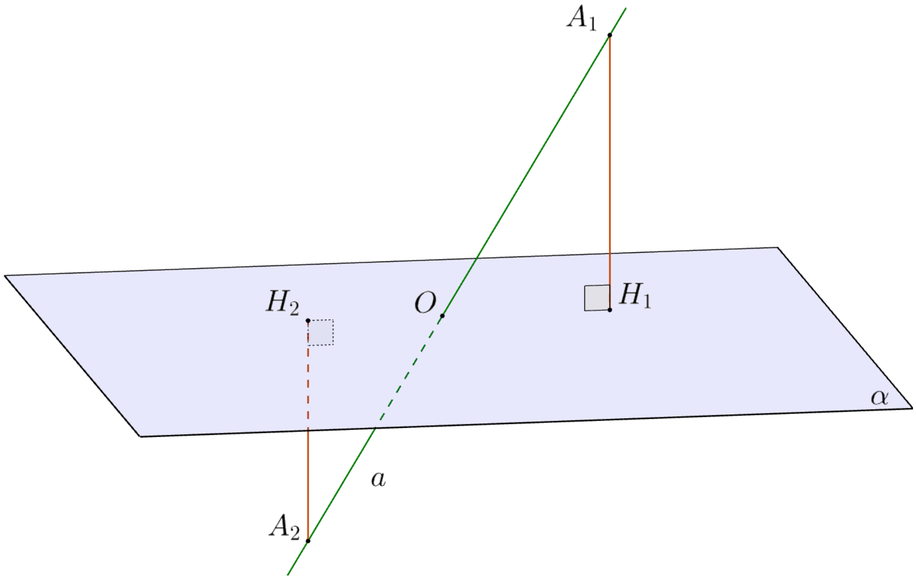
$$AM = \frac{AB \cdot AH}{BH} = \frac{AB \cdot AH}{\sqrt{AB^2 + AH^2}}.$$



2. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O. На прямой a отмечены две точки A_1 и A_2, тогда верно, что:

$$\frac{\rho(A_1,\alpha)}{\rho(A_2,\alpha)} = \frac{A_1O}{A_2O}.$$



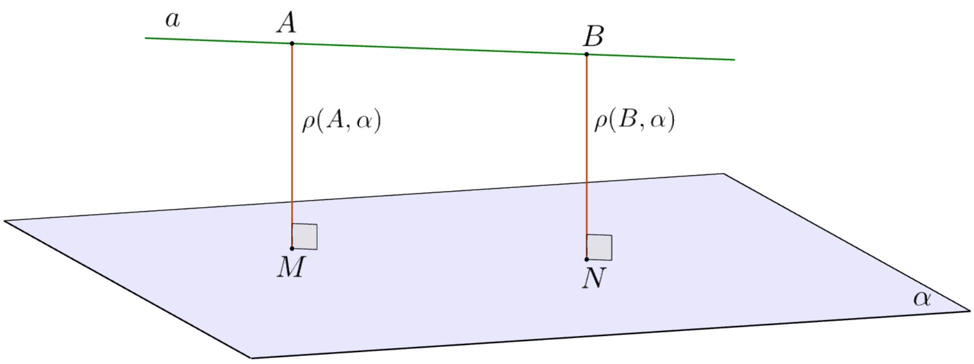


Доказательство: Пусть $H_1, H_2 \in \alpha$ и $A_1H_1 \perp \alpha$, $A_2H_2 \perp \alpha$. Таким образом, $A_1H_1 = \rho(A_1,\alpha)$ и $A_2H_2 = \rho(A_2,\alpha)$. Треугольники OH_1A_1 и OH_2A_2 подобны, значит,

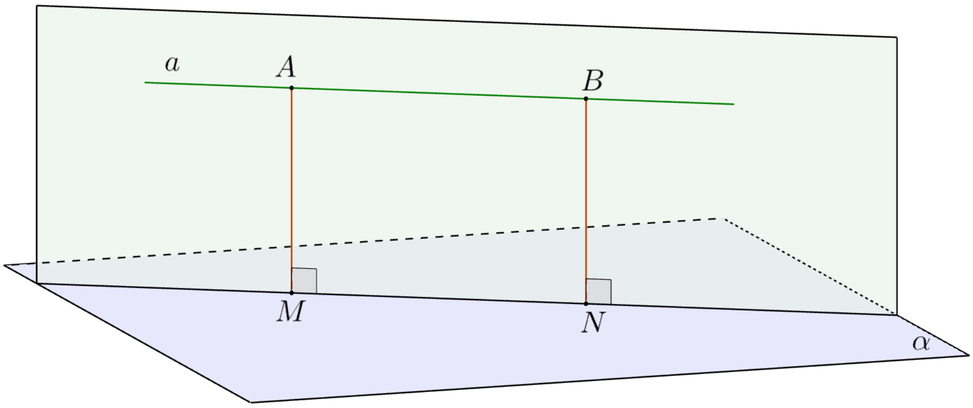
$$\frac{A_1O}{A_2O} = \frac{A_1H_1}{A_2H_2}.$$

3. Если прямая a параллельна плоскости α и точки A и B лежат на прямой a, то

$$\rho(A,\alpha) = \rho(B,\alpha).$$

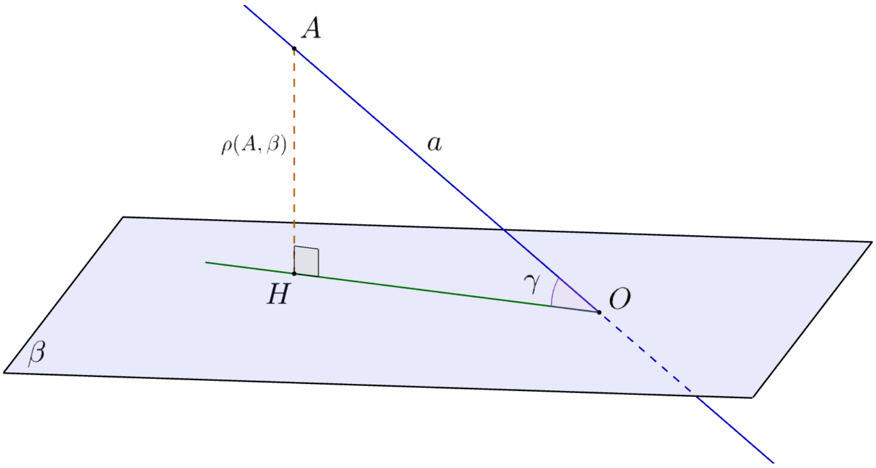


Доказательство: Пусть точки M и N лежат в плоскости α, причём $AM \perp \alpha$ и $BN \perp \alpha$. Проведём через точки A, M и N плоскость. Так как прямые AM и BN перпендикулярны плоскости α, то они параллельны, значит, прямая BN лежит в плоскости (AMN). Таким образом, точка B также лежит в плоскости (AMN). Прямая AB не пересекает плоскость α, поэтому прямые AB и MN параллельны, значит, $ABNM$ – прямоугольник. Таким образом, $AM = BN$.

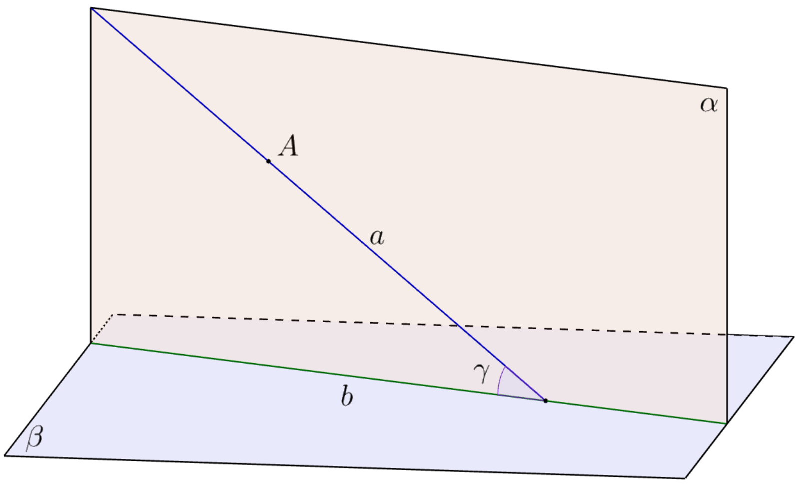


12 Вычисление угла между прямой и плоскостью

Определение: Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.
Если проекция прямой на плоскость – точка, то прямая перпендикулярна плоскости.
Пусть прямая a пересекает плоскость β в точке O. Возьмем некоторую точку A на прямой a, H – проекция этой точки на плоскость β. Тогда углом между прямой a и плоскостью β будем называть угол $\angle AOH$.

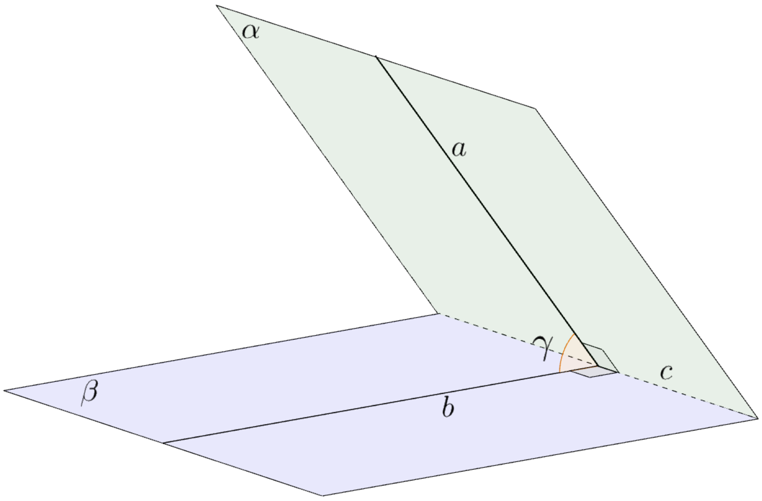


Можно иначе определить угол между прямой и плоскостью. Через прямую a проведём плоскость α, перпендикулярную плоскости β. Тогда углом между прямой a и плоскостью β будет угол между прямой a и прямой b, по которой пересекаются плоскости α и β.



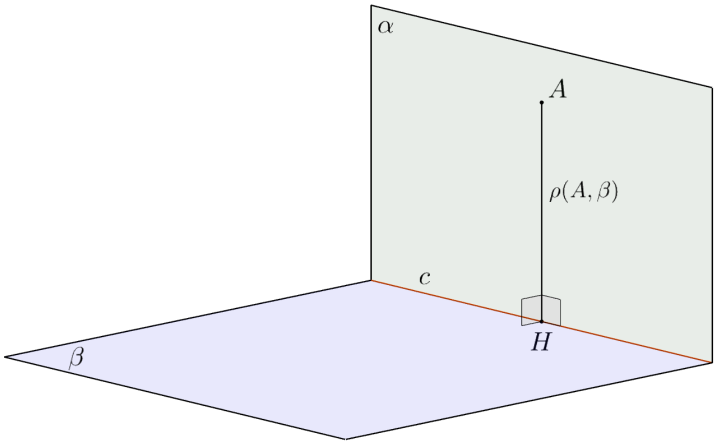
13 Вычисление угла между плоскостями

Определение: *Угол между плоскостями* – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях.
Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и перпендикулярна прямой c, а прямая b лежит в плоскости β и также перпендикулярна прямой c, тогда угол между плоскостями α и β равен углу γ между прямыми a и b.

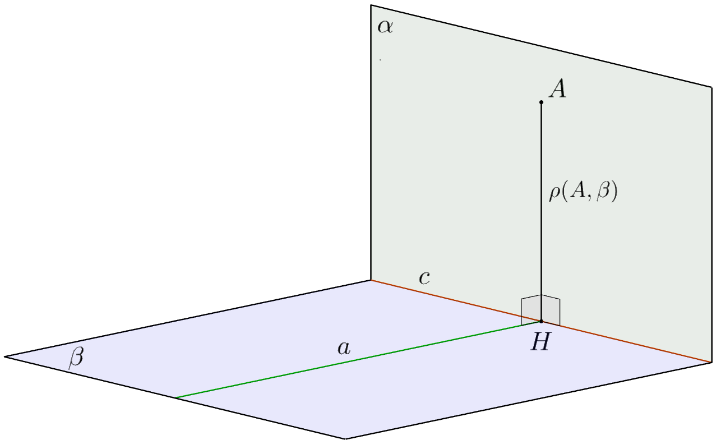


Плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

1. Пусть плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Точка A лежит в плоскости α, точка H проекция точки А на прямую c. Тогда отрезок AH перпендикулярен плоскости β.



Доказательство: Через точку H проведём прямую a, перпендикулярную плоскости α, тогда $AH \perp c$ и $AH \perp a$, то есть $AH \perp \beta$.

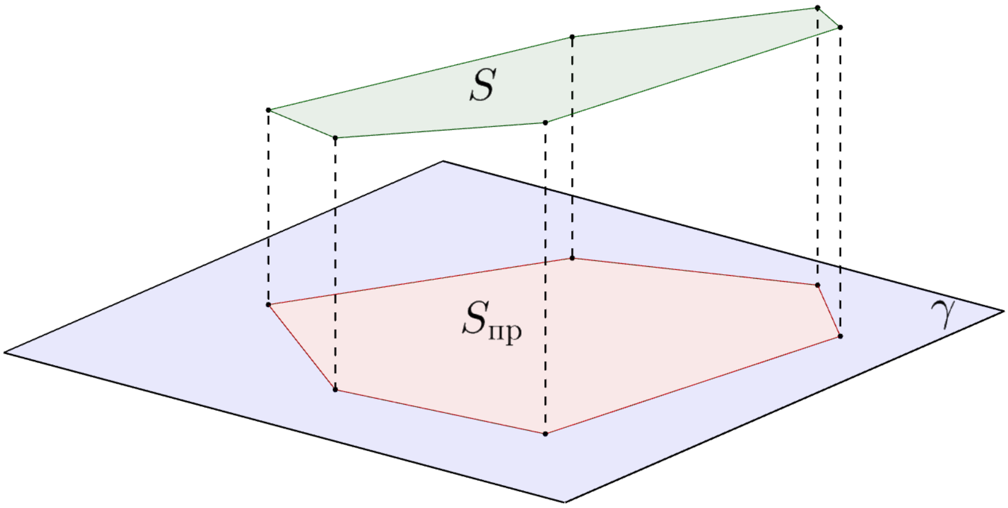

α
A
ρ(A, β)
c
H
a
β

14 Ортогональная проекция и площадь сечения

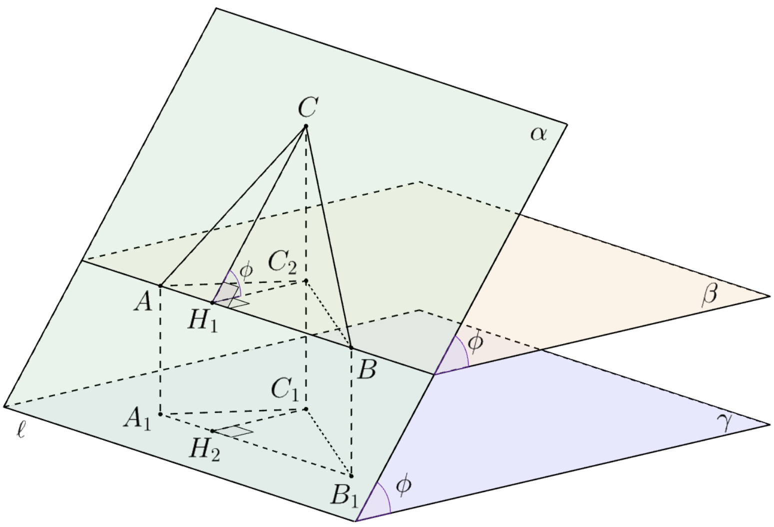
1. Пусть на плоскость γ мы спроецировали выпуклый многоугольник, тогда верна формула:

$$\frac{S_{\text{пр}}}{S} = \cos\phi,$$

где S – площадь многоугольника, $S_{\text{пр}}$ – площадь проекции многоугольника, ϕ – угол между плоскостью γ и плоскостью, в которой лежит многоугольник.



Доказательство: Будем считать, что $0 < \phi < 90°$. Пусть наш многоугольник лежит в плоскости α. Для начала рассмотрим случай, когда наш многоугольник – это треугольник ABC, у которого одна сторона (будем считать, что это сторона AB) параллельна ℓ – прямой пересечения плоскостей α и γ. Проекцией треугольника ABC на плоскость γ является треугольник $A_1B_1C_1$. Заметим, что плоскость (ABB_1) пересекается с γ по прямой A_1B_1, при этом $\ell \,||\, AB$, значит, $\ell \,||\, A_1B_1$ и $AB || A_1B_1$. Также понятно, что $AA_1 \,||\, BB_1$, так как $AA_1 \perp \gamma$ и $BB_1 \perp \gamma$. Таким образом, мы получили, что ABB_1A_1 – параллелограмм (на самом деле даже прямоугольник), значит, $AA_1 = BB_1$ и $A_1B_1 = AB$.
Проведём через прямую AB плоскость β, параллельную плоскости γ. Пусть прямая CC_1 пересекает плоскость β в точке C_2. Аналогично, $C_1C_2 \,||\, BB_1$ и $BC_2 \,||\, B_1C_1$, значит, $BC_2 = B_1C_1$. Также доказывается, что $AC_2 = A_1C_1$. Таким образом, мы получили, что треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ равны, поэтому нам достаточно найти площадь треугольника ABC_2.

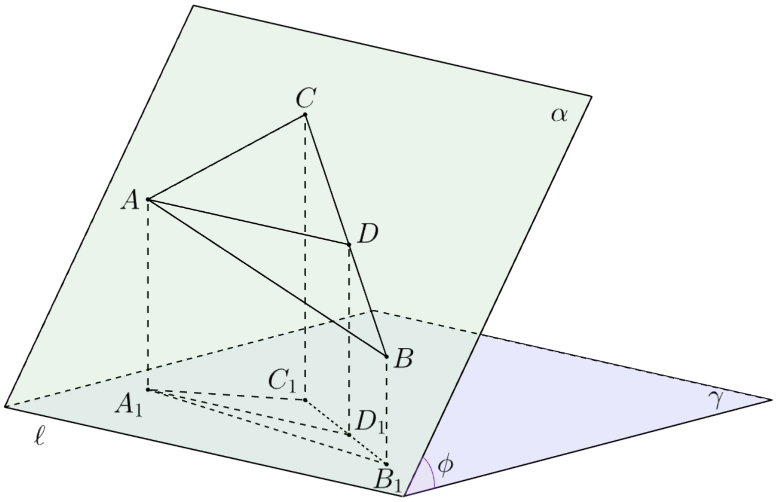


Пусть CH_1 – высота треугольника ABC. C_2H_1 – проекция CH_1 на плоскость β, тогда по обратной теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $AB \perp C_2H_1$, поэтому C_2H_1 – высота треугольника ABC_2. AB – прямая пересечения плоскостей α и β, причём $CH_1 \perp AB$ и $C_2H_1 \perp AB$, значит, $\angle(CH_1, C_2H_1) = \phi$. Тогда $C_2H_1 = CH_1 \cdot \cos\phi$. Получаем:

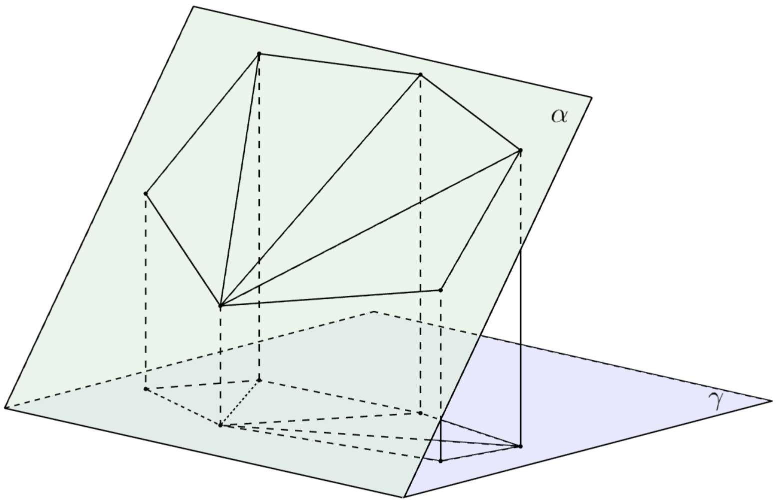
$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC_2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_2H_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH_1 \cdot \cos\phi = S_{ABC} \cdot \cos\phi.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \cos\phi$.

Теперь рассмотрим случай, когда ABC – произвольный треугольник. Мы можем выбрать одну из вершин треугольника так, что прямая, проходящая через эту точку параллельно ℓ, разобьёт его на два треугольника, у которых одна из сторон параллельна ℓ. Тогда для обоих из эти треугольников верна наша теорема, значит, она верна и для треугольника ABC.

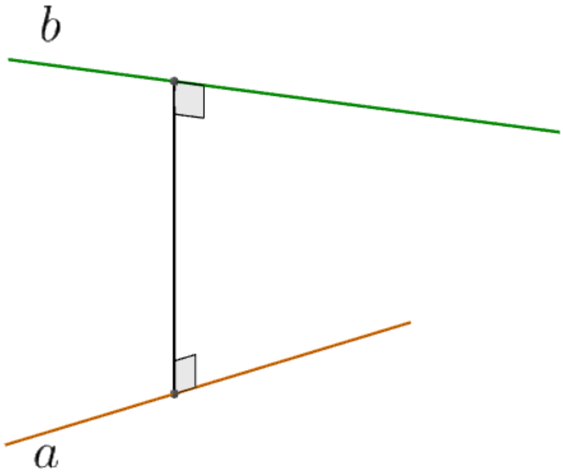


Наконец, если мы имеем дело с произвольным многоугольником, то поступим следующим образом: возьмём одну из точек многоугольника и проведём через неё всевозможные диагонали. Таким образом мы разобьём многоугольник на множество треугольников, для которых теорема верна, значит, она верна и для многоугольника.

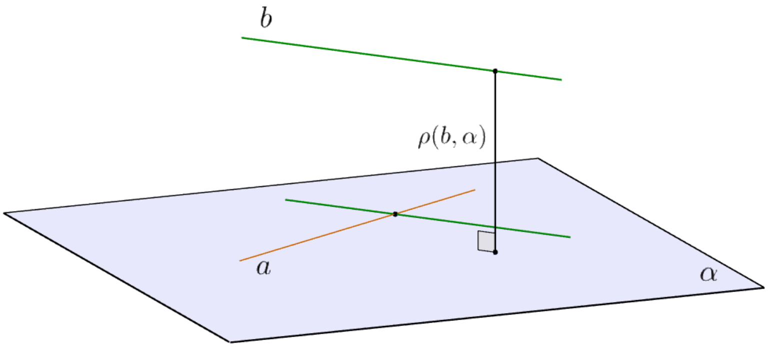


15 Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

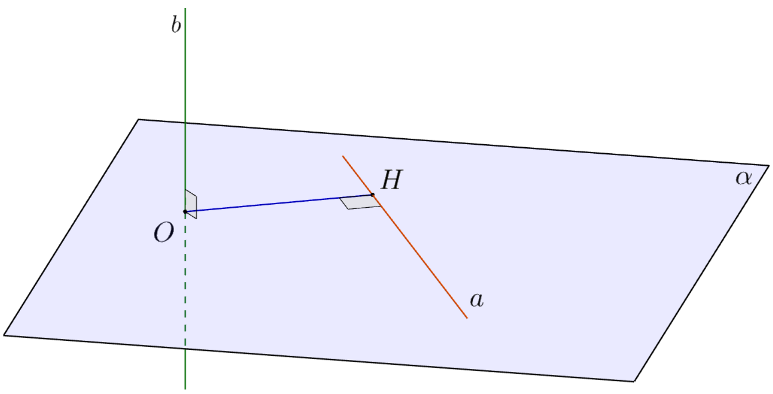
Определение: *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется длина отрезка, перпендикулярного обеим прямым.



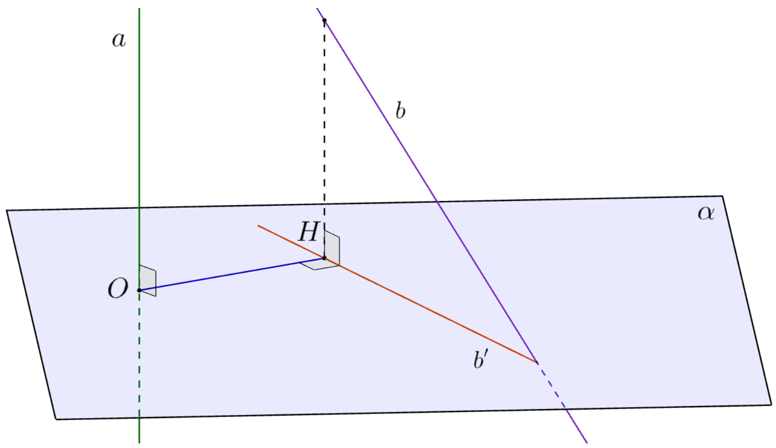
1. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



2. a и b – скрещивающиеся прямые. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке O. Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OH, тогда $\rho(a, b) = OH$, так как прямая b перпендикулярна любой прямой в плоскости α, значит, OH – общий перпендикуляр к прямым a и b.



3. Пусть прямая a перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке O, b' – проекция прямой b на плоскость α. Опустим из точки O на прямую b' перпендикуляр OH, тогда $\rho(a, b) = OH$.

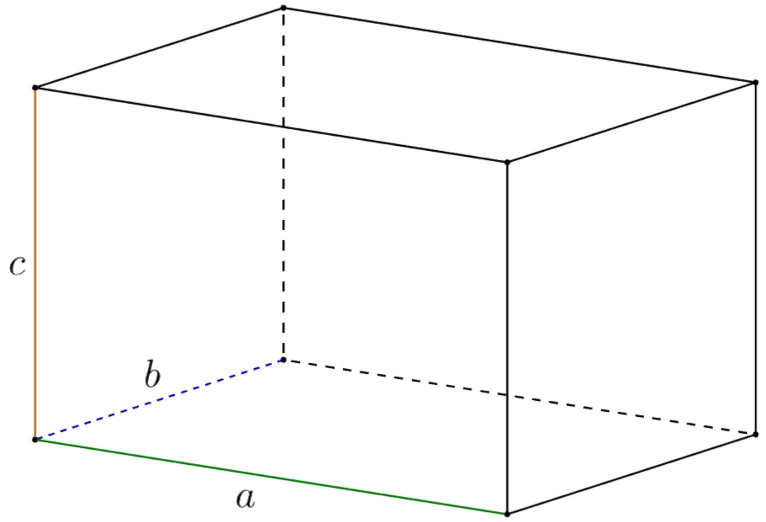

a
b
α
H
O
b′

16 Вычисление объёмов

1. Объём прямоугольного параллелепипеда с длинами измерений a, b и c равен

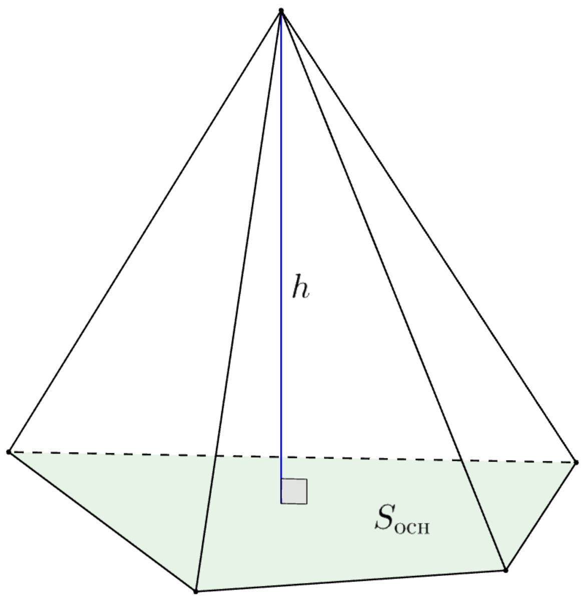
$$V = abc.$$

Объём куба со стороной a равен a^3.



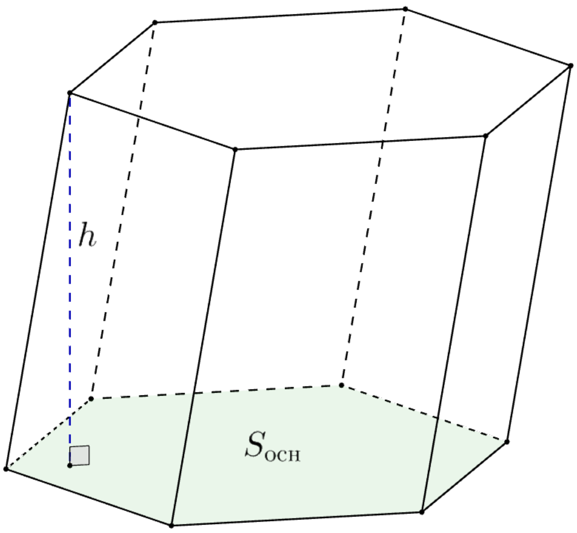
2. Объём пирамиды с высотой h и площадью основания $S_{\text{осн}}$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h.$$



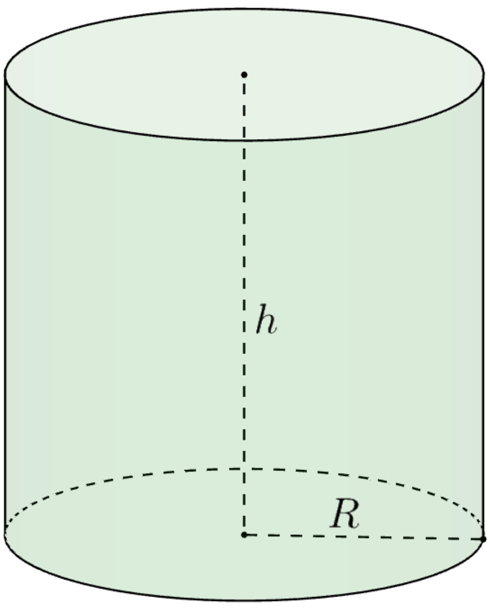
3. Объём призмы с высотой h и площадью основания $S_{\text{осн}}$ равен

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$



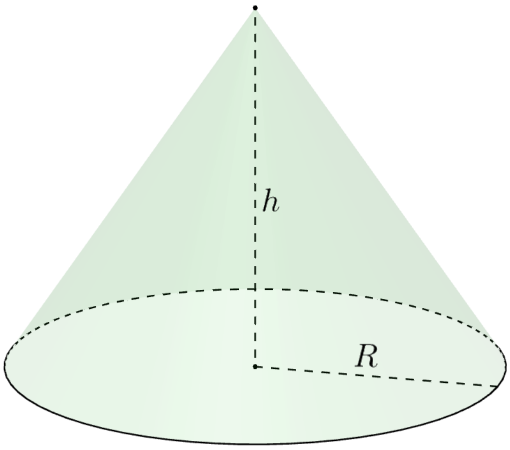
4. Объём цилиндра с высотой h и радиусом основания R равен

$$V = \pi R^2 h.$$



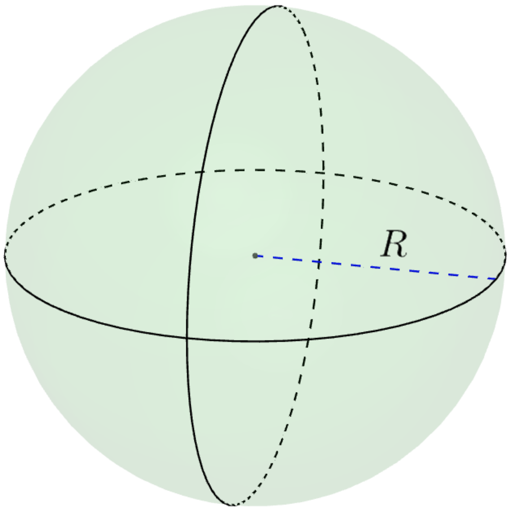
5. Объём конуса с высотой h и радиусом основания R равен

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



6. Объём сферы с радиусом R равен

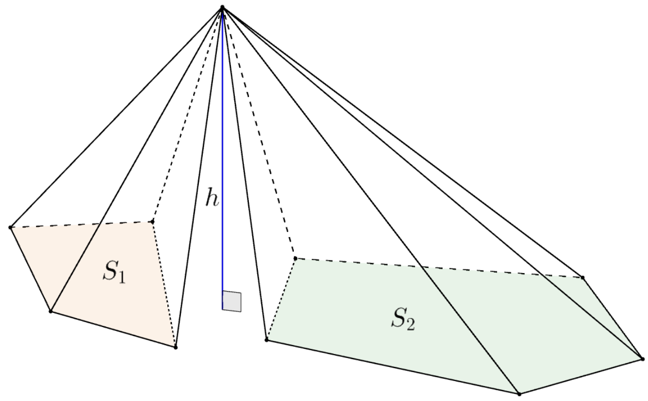
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



17 Теорема об отношении объёмов

1. Пусть есть две пирамиды с общей вершиной, основания которых лежат в одной плоскости. Причём площадь основания первой равна S_1, площадь основания второй равна S_2, тогда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

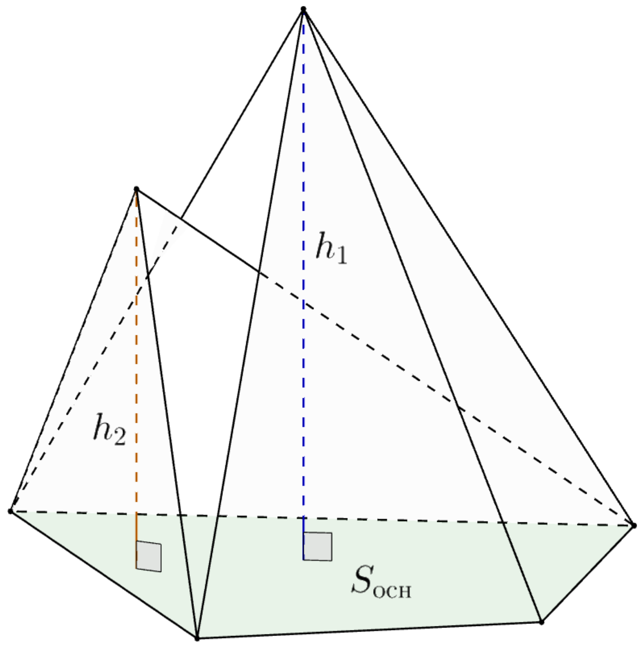


Доказательство: Данные пирамиды имеют общую высоту длины h. Объём первой пирамиды равен $V_1 = \frac{1}{3}S_1h$, объём второй равен $V_2 = \frac{1}{3}S_2h$. Значит,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}S_2h}{\frac{1}{3}S_1h} = \frac{S_2}{S_1}.$$

2. Пусть у нас есть две пирамиды с общим основанием и длинами высот h_1 и h_2 соответственно, тогда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$



Доказательство: Пусть площадь основания данных пирамид равна $S_{\text{осн}}$, тогда объём первой пирамиды равен $V_1 = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h_1$, объём второй равен $V_2 = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h_2$, значит,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h_2}{\frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$