профиматика

Математика • Русский язык • Обществознание • Физика • Информатика

5340+
учеников прошли наши курсы

5 ЛЕТ
опыт подготовки к экзаменам

1000+
учеников сдали на 90+

97%
ребят учатся в топ-30 вузах страны

Задача 17
основные факты

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!

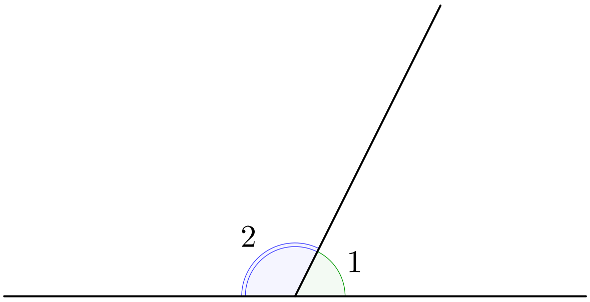
Содержание

1 Углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

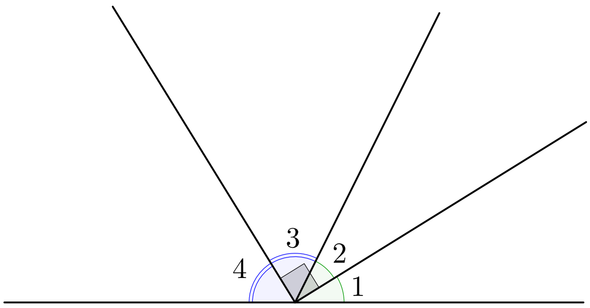
1. Сумма смежных углов равна 180°.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных.

2. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

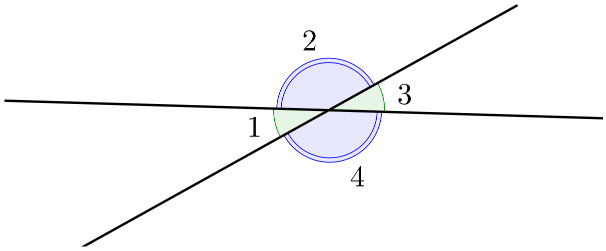


Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

3. Вертикальные углы равны.

$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$



Пусть даны две параллельные прямые и их секущая, тогда углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**, углы 3 и 6, 4 и 5 называются **накрест лежащими**, углы 3 и 5, 4 и 6 называются **внутренними односторонними**.

4. Соответственные углы равны:

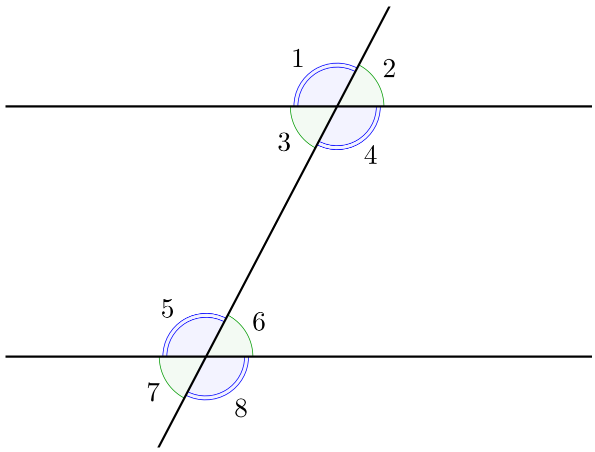
$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 4 = \angle 8;$$

Накрест лежащие углы равны:

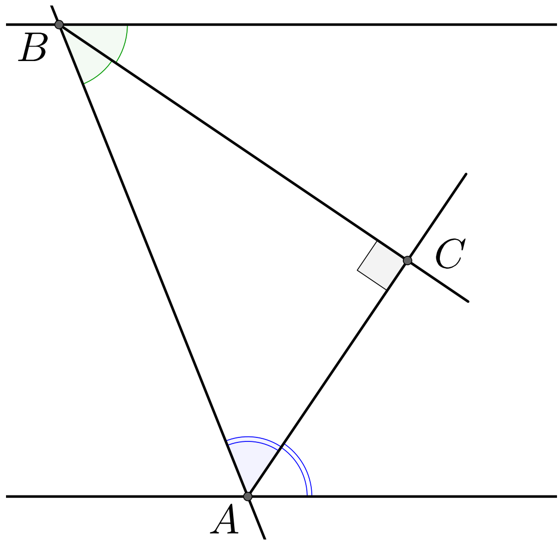
$$\angle 3 = \angle 6; \quad \angle 4 = \angle 5;$$

Внутренние односторонние углы в сумме дают 180 градусов:

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ; \quad \angle 4 + \angle 6 = 180^\circ.$$

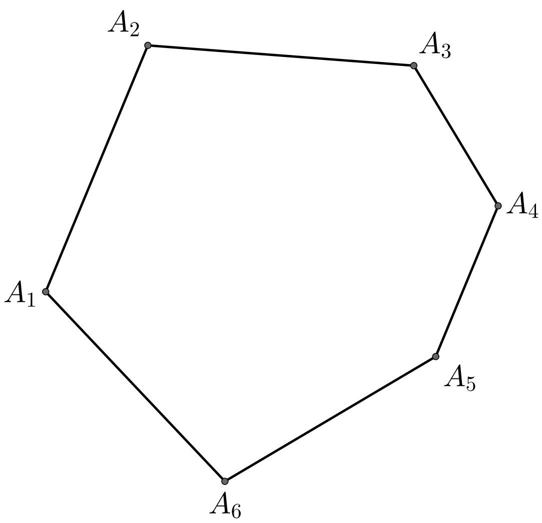


5. Биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны.



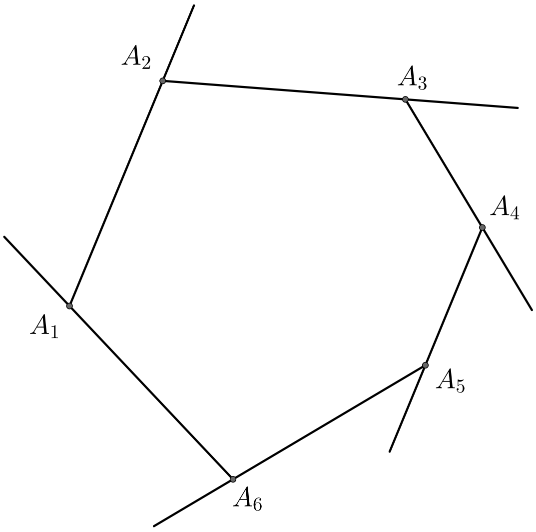
6. Сумма внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. Например, если $n = 6$, то

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 180^\circ \cdot (6-2) = 720^\circ.$$



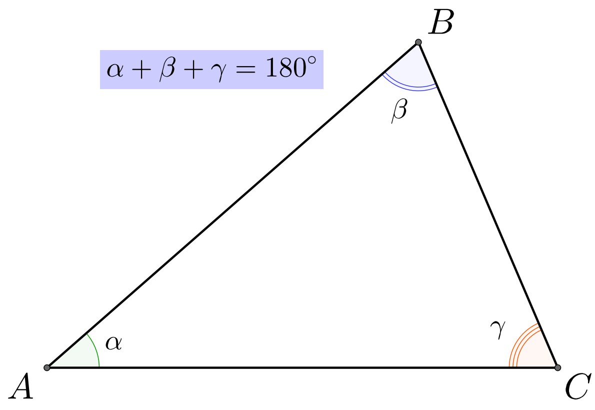
Внешним углом многоугольника будем называть угол, смежный внутреннему углу многоугольника.

7. Сумма внешних углов в выпуклом многоугольнике равна 360°.

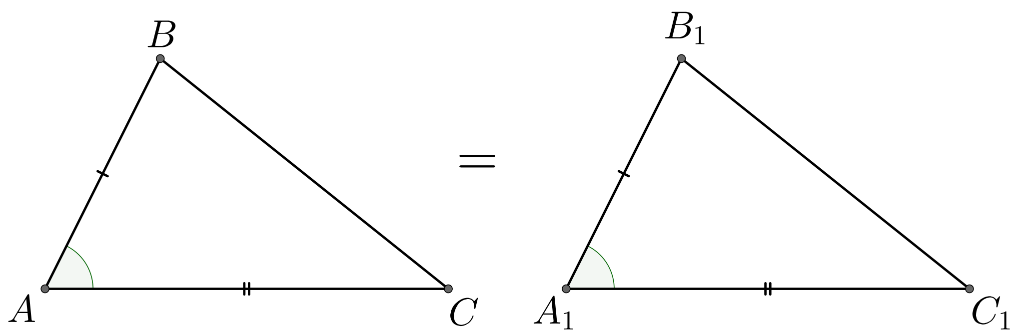


2 Треугольники общего вида

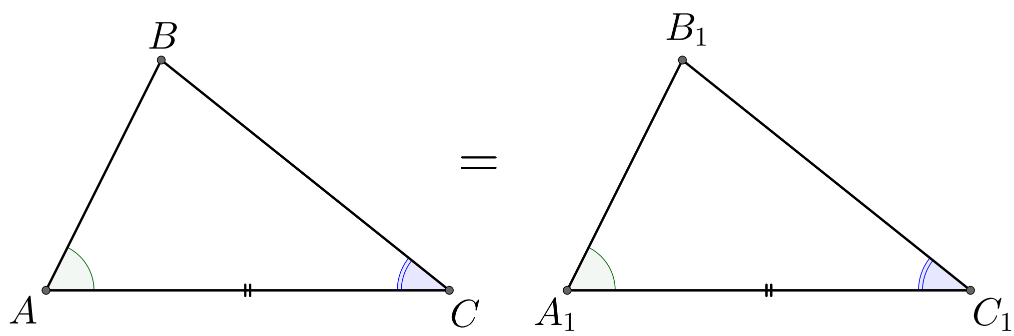
1. Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.



2. **Первый признак равенства треугольников:** по двум сторонам и углу между ними. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



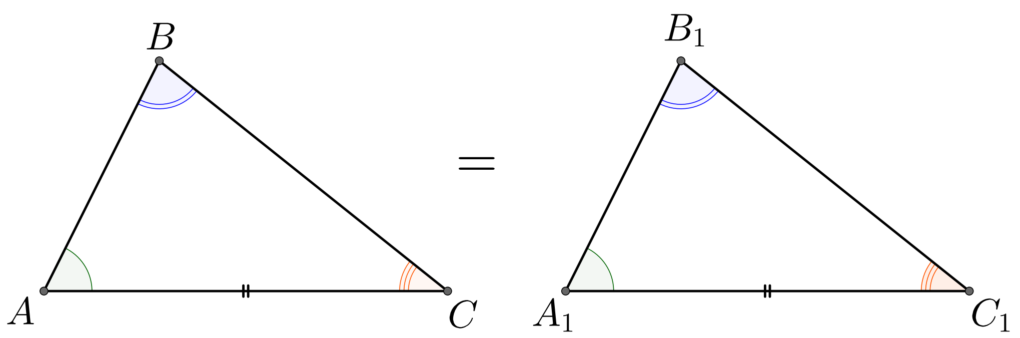
3. **Второй признак равенства треугольников:** по стороне и прилежащим к ней углам. Если сторона и прилежащие к ней углы равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



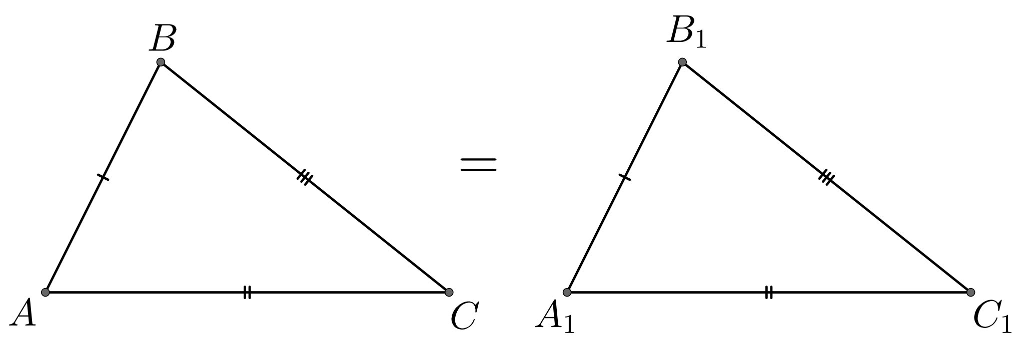
Замечание: На самом деле ситуация, в которой один угол прилёг к стороне, а второй – нет, также приводит к равенству треугольников, так как оставшийся угол задаётся однозначно по двум известным. Ситуация, в которой одна из пар равных углов прилегает к равной стороне, а вторая пара равных углов нет, тоже приводит к равенству треугольников. Действительно, пусть нам даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причём $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC = A_1C_1$, тогда

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1 \implies \angle C = \angle C_1$$

А значит треугольники равны по второму признаку.

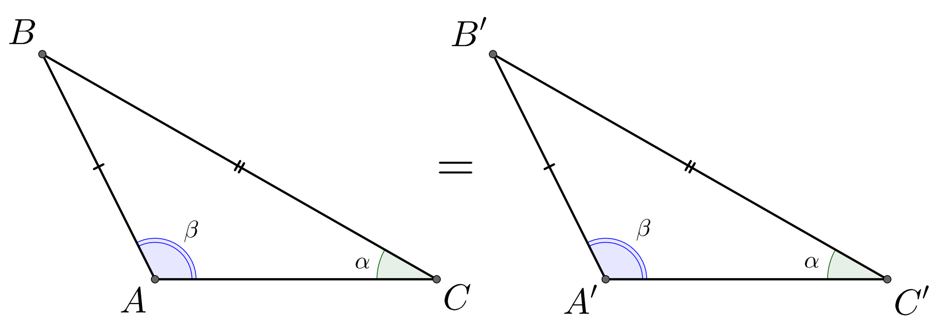


4. **Третий признак равенства треугольников:** по трем сторонам. Если три стороны треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

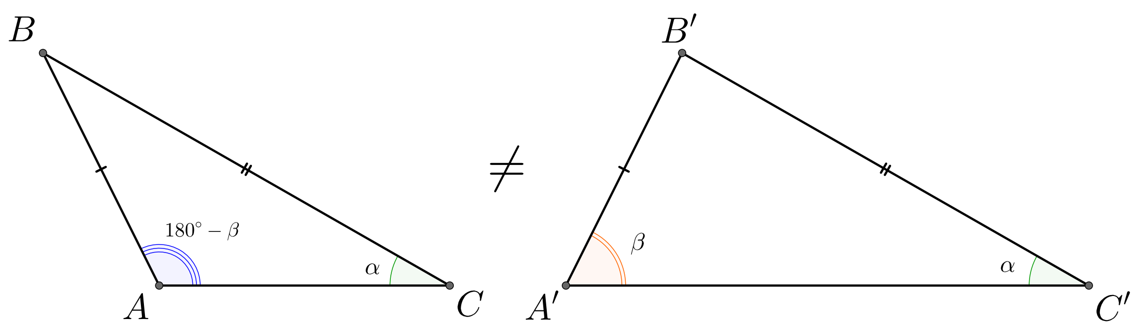


5. Если две стороны и угол напротив одной из сторон первого треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то возможны два варианта:

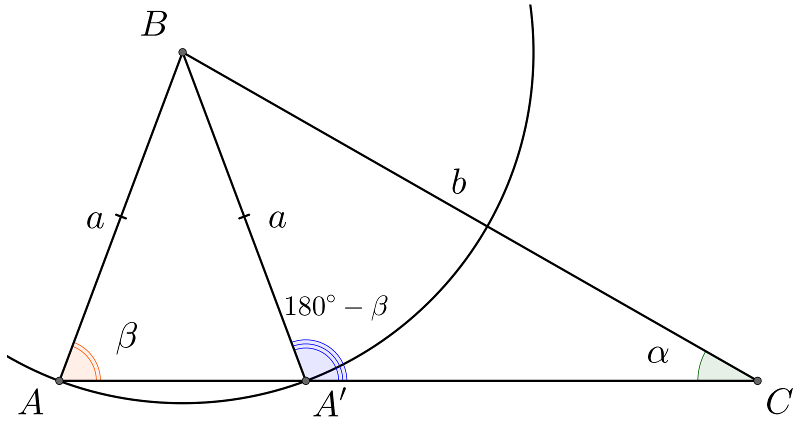
1) Углы напротив второй стороны равны $\Longleftrightarrow$ треугольники равны



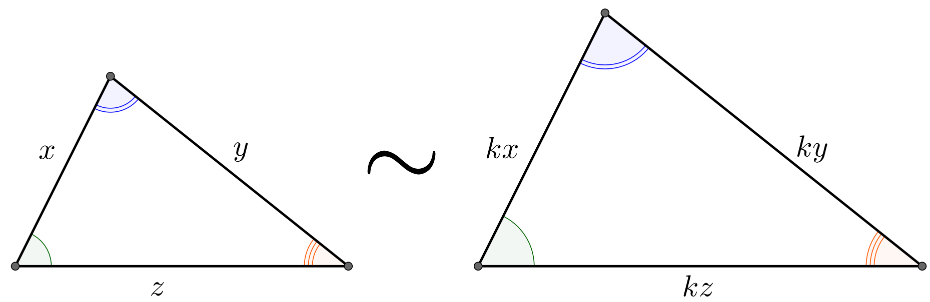
2) Углы напротив второй стороны дополняют друг друга до 180° $\Longleftrightarrow$ треугольники не равны (кроме случая прямоугольного треугольника).



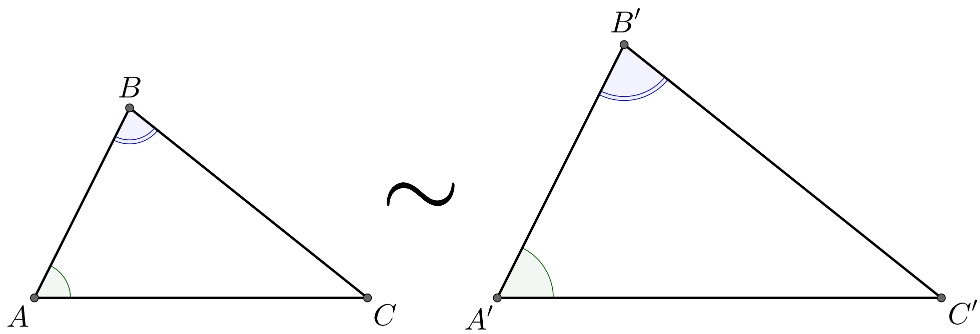
Замечание: Покажем, почему в четвёртом признаке равенства треугольников возникает два случая. Пусть длина стороны AB равна a, длина стороны BC равна b и угол при вершине C равен α. Построим два разных треугольника со сторонами a, b и углом α: построим угол α и назовем его вершину C, от вершины C отложим на одной из сторон угла отрезок, равный по длине b, его концом назовём точку B, через вершину B проведём окружность радиуса a, которая может пересечь вторую сторону угла в двух точках (назовём их A и A'). Тогда отрезки AB и $A'B$ имеют длину a, то есть мы получили два не совпадающих треугольника ABC и $A'BC$, которые имеют стороны a, b и угол α. Именно поэтому в первом признаке равенства треугольников речь идёт об угле **между** сторонами.



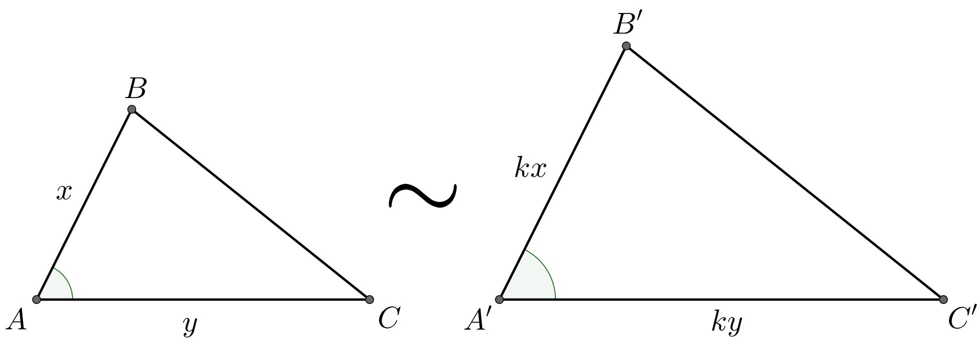
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника. Число k равное отношению соответственных сторон подобных треугольников называется **коэффициентом подобия**.



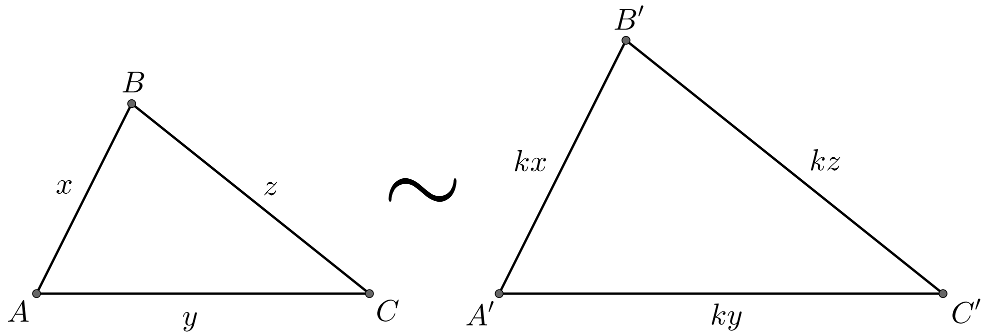
6. **Первый признак подобия двух треугольников:** по двум углам. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



7. **Второй признак подобия двух треугольников:** по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Если две стороны одного треугольника пропорциональны соответственно двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

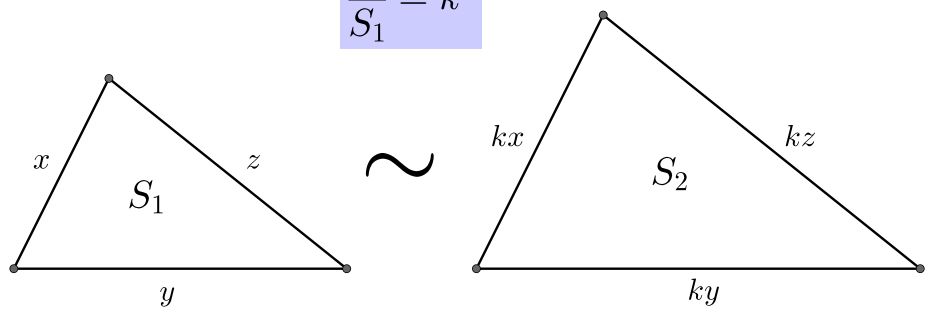


8. **Третий признак подобия двух треугольников:** по трём пропорциональным сторонам. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

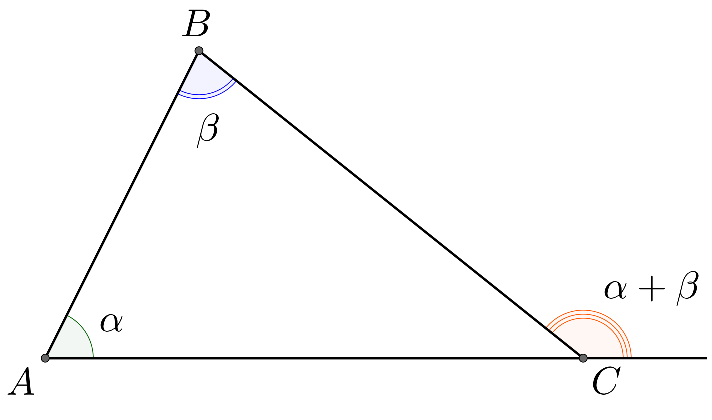


9. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$



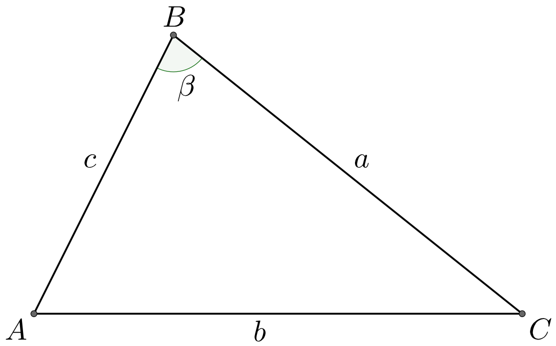
10. **Теорема о внешнем угле треугольника**: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.



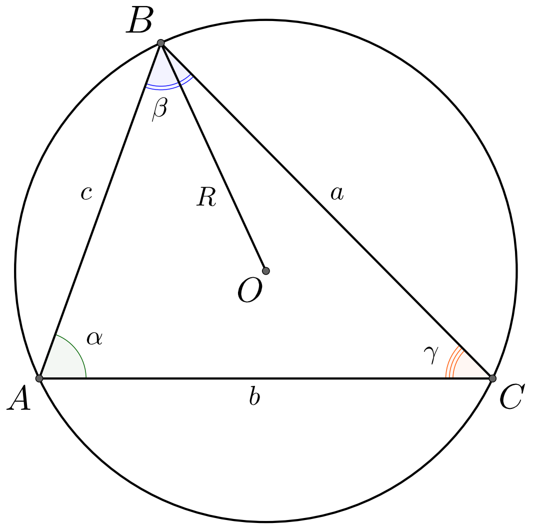
11. Напротив большей стороны треугольника лежит больший угол: если $b > a$ и $b > c$, то β – больший угол треугольника.

12. **Неравенство треугольника:** сумма двух любых сторон треугольника всегда больше третьей стороны, то есть:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$



13. **Теорема синусов:** $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, где R – радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности.

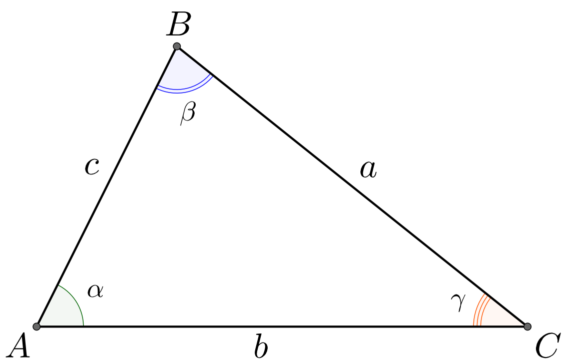


Замечание 1: Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

Замечание 2: А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольнике два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторону.

14. **Теорема косинусов** в произвольном треугольнике верны соотношения:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Теорема косинусов позволяет:

1) найти одну из сторон треугольника, если известны две другие стороны и угол между ними: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$;

2) найти угол треугольника, если известны все стороны треугольника: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

3) найти одну из сторон треугольника, если известные две стороны и угол не между ними с помощью квадратного уравнения (в этом случае решений может быть два): например, если мы знаем стороны b, c и угол между сторонами a и c, то сторону a мы можем найти из уравнения $a^2 - 2ac\cos\beta + c^2 - b^2 = 0$.

Замечание: Теорема Пифагора – это частный случай теоремы косинусов, действительно, если c – гипотенуза, a, b – катеты, получаем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90^0 = a^2 + b^2$, так как $\cos 90^\circ = 0$.

15. Пусть c – бОльшая сторона треугольника, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \iff \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Знаменатель всегда положителен, поэтому знак косинуса зависит только от числителя:

1) если $c^2 > a^2 + b^2$, то $\cos\gamma < 0$, значит треугольник тупоугольный;

2) если $c^2 = a^2 + b^2$, то $\cos\gamma = 0$ треугольник прямоугольный;

3) если $c^2 < a^2 + b^2$, то $\cos\gamma > 0$, значит угол γ – острый. Так как γ лежит напротив бОльшей стороны, то γ самый большой угол в треугольнике, а значит треугольник остроугольный.

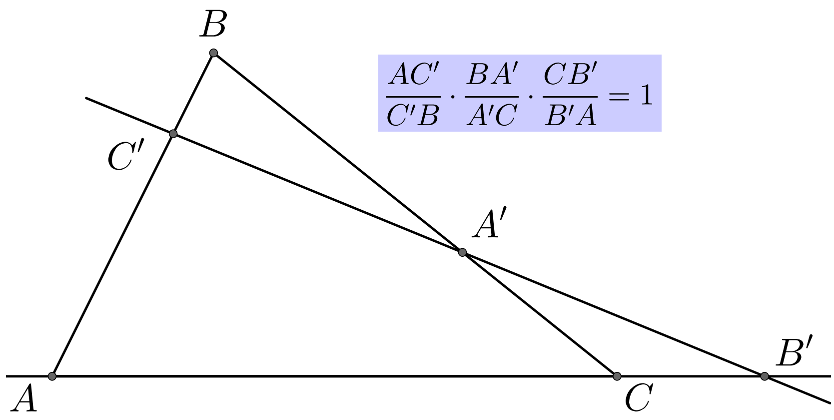
16. **Теорема Менелая.** Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C' – это точка ее пересечения со стороной AB, A' – точка ее пересечения со стороной BC и B' – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Обратно, пусть точки A', B', C' лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях, тогда если верно соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

то точки A', B', C' лежат на одной прямой.



Замечание 1. Теорему очень легко запомнить, используя следующее мнемоническое правило: «Вершина $\to$ точка; точка $\to$ вершина», т.е. вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

Замечание 2. Если бы из A мы пошли в B', ничего бы не изменилось. Наша теорема выглядела бы так:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Чевианой будем называть любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной.

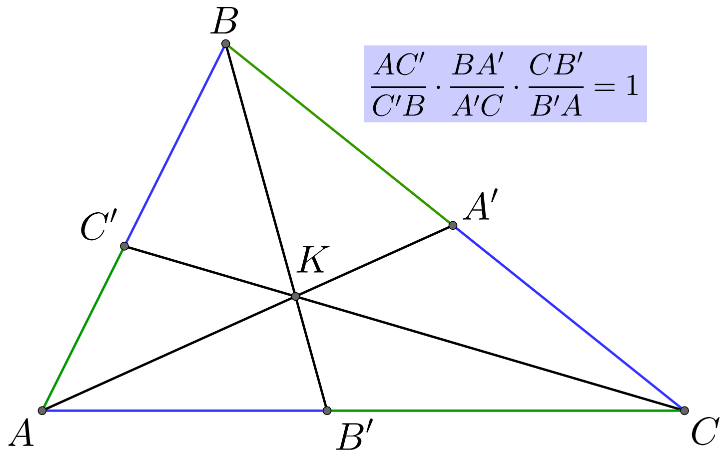
17. **Теорема Чевы**. Если три чевианы AA', BB', CC', проведённые из разных вершин треугольника, пересекаются в одной точке, то выполнено соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Обратно, если выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

то чевианы пересекаются в одной точке.

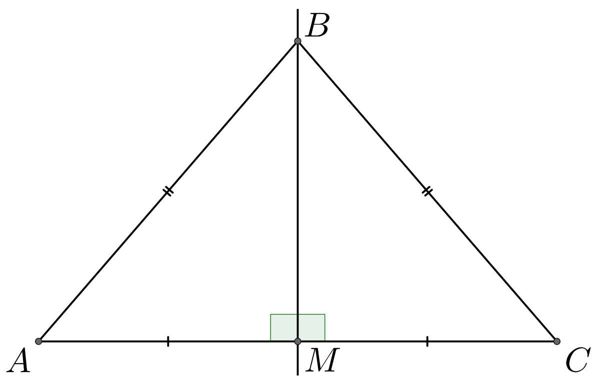


Замечание. Теорему Чевы можно запомнить ровно так же, как и теорему Менелая: то есть вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения чевианы и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

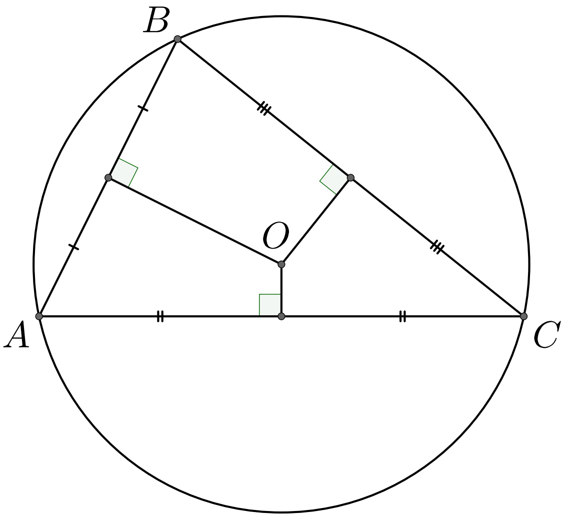
Прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину, называется **серединным перпендикуляром**.

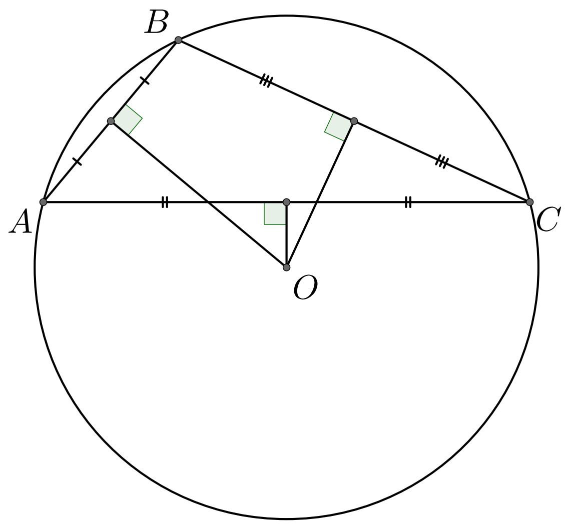
18. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

Обратно, если точка лежит на серединном перпендикуляре к некоторому отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка.



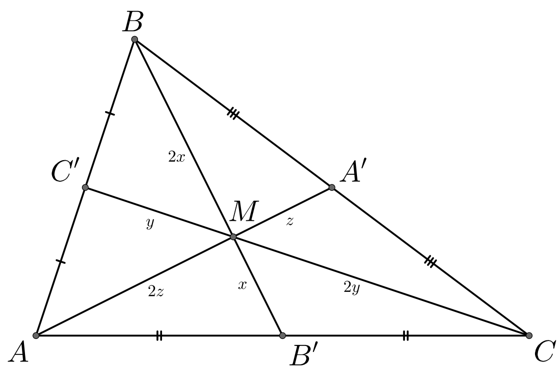
19. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной вокруг треугольника окружности.





Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

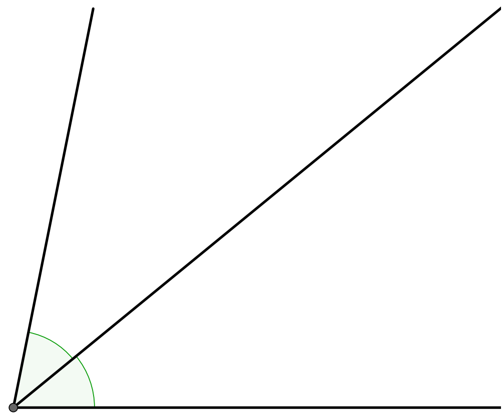
20. Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.



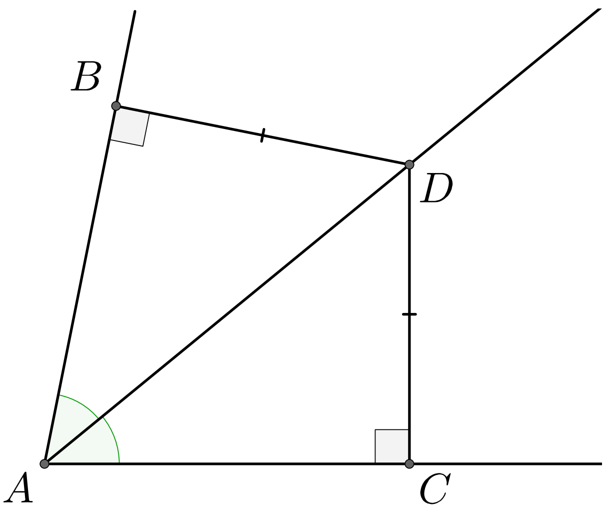
Замечание: Данный факт также можно доказать при помощи теоремы Менелая. Возьмём треугольник ABB' и прямую CC', тогда по теореме Менелая получим:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{B'C}{CA} = 1 \implies \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{1}{2} = 1 \implies \frac{BM}{MB'} = 2.$$

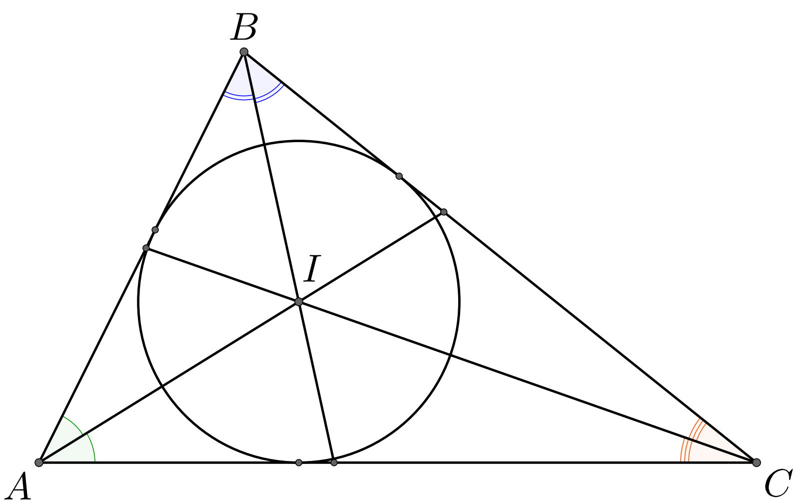
Биссектрисой называется луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.
Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



21. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон.
Обратно, точка, равноудалённая от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.

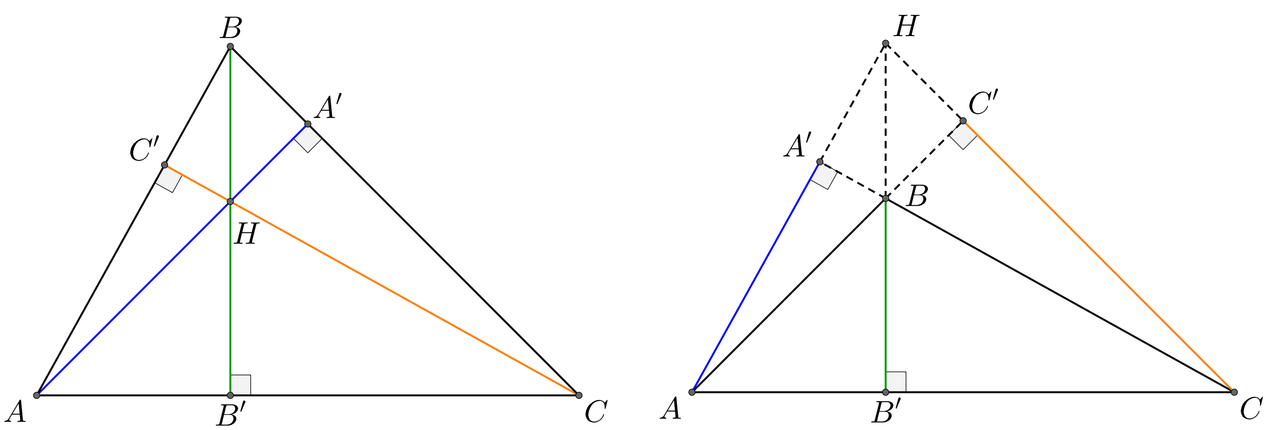


22. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в треугольник окружности.



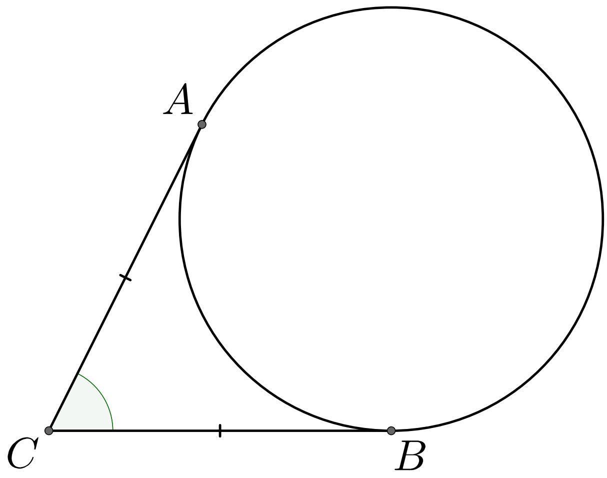
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

23. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка называется **ортоцентром** треугольника.

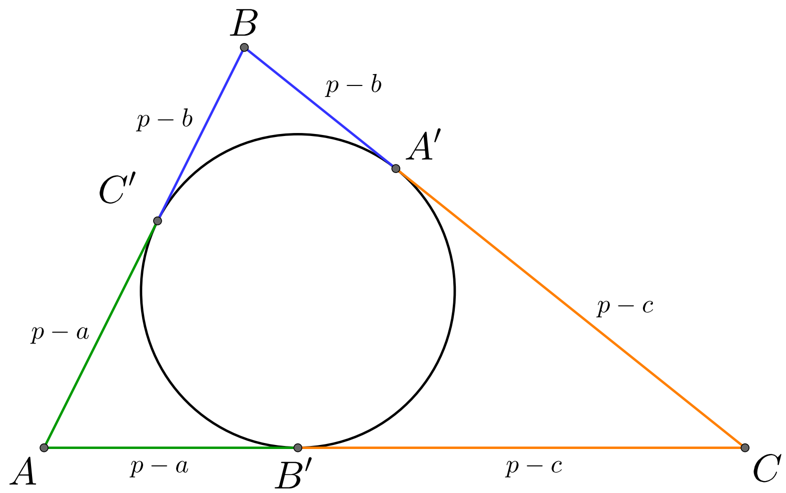


Калиткой будем называть отрезок, соединяющий вершину угла с точкой касания вписанной в этот угол окружности (это не устоявшийся термин, его не следует использовать на ЕГЭ).

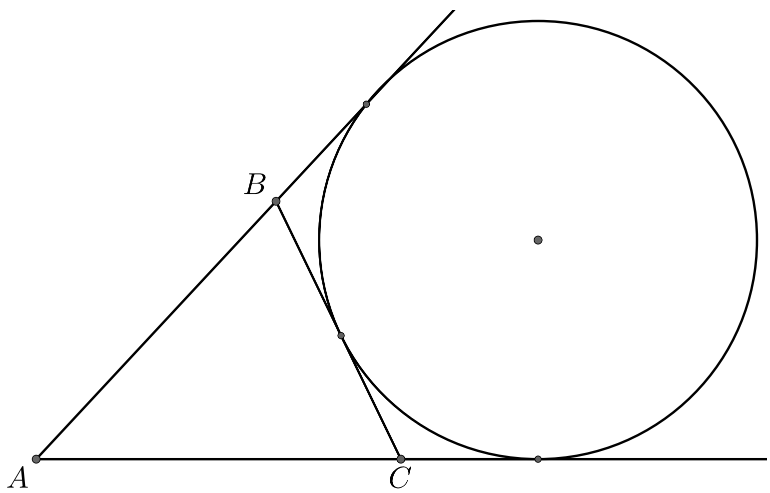
24. Длины калиток любого угла равны.



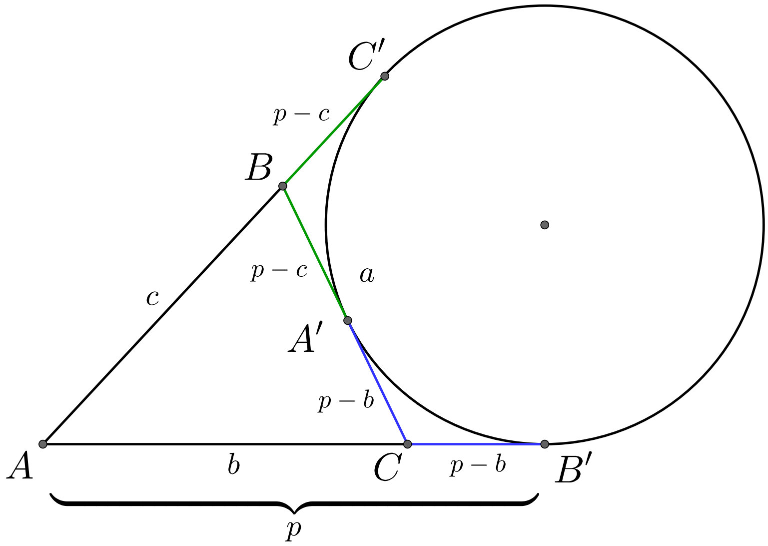
25. Пусть дан треугольник ABC, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Тогда калитка угла A имеет длину $p - a$, калитка угла B имеет длину $p - b$ и калитка угла C имеет длину $p - c$.



Окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух его сторон называется **вневписанной** окружностью треугольника.



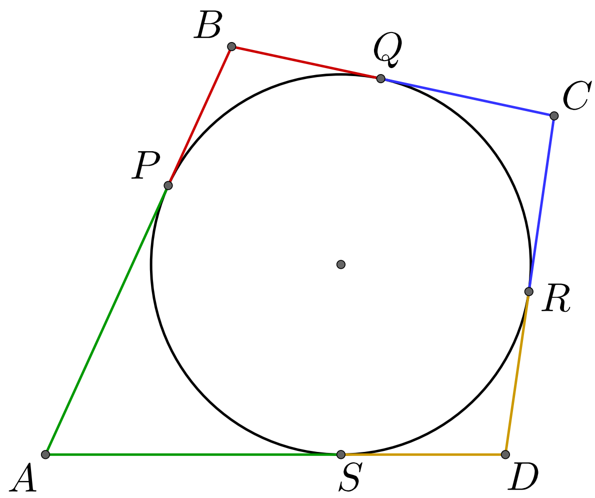
26. Пусть дана вневписанная окружность, касающаяся стороны BC треугольника ABC. Тогда длина калитки угла A равна p; длина калитки внешнего угла C, равна $p-b$; длина калитки внешнего угла B, равна $p-c$.



27. Пусть в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, тогда

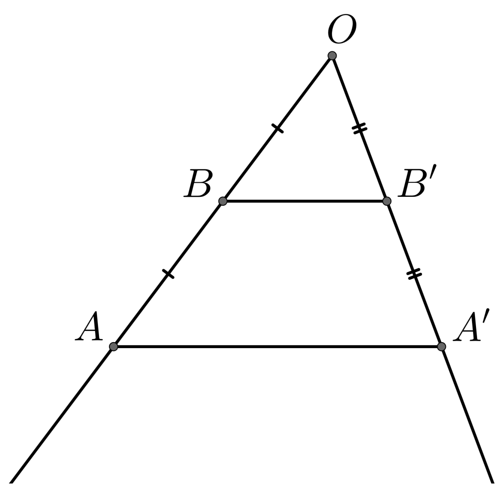
$$AD + BC = AB + CD.$$

Обратно: Если суммы противоположных сторон четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.



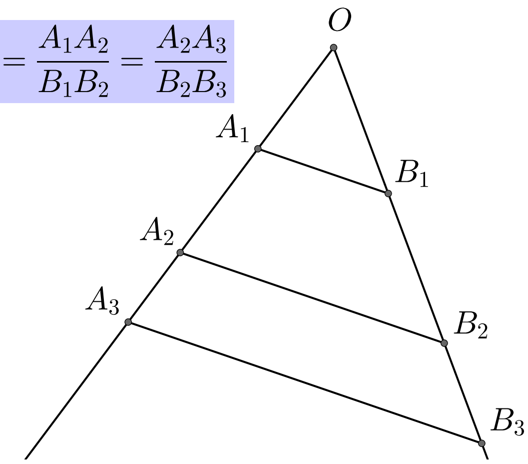
28. **Теорема Фалеса**. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла будут высечены также равные отрезки.

29. **Обратная теорема Фалеса**. Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них равные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



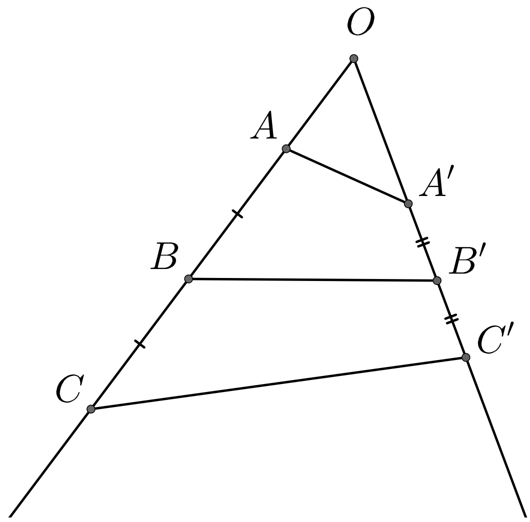
30.Обобщенная теорема Фалеса. Если на одной из сторон угла последовательно отложить отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то прямые отсекут на другой стороне угла, отрезки, пропорциональные отрезкам на первой стороне.

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$



31.Обратная обобщённая теорема Фалеса. Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них пропорциональные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

Замечание: очень важно, что пропорциональные (равные) отрезки должны начинаться от вершины угла, иначе обратные теоремы не будут работать.



Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием.

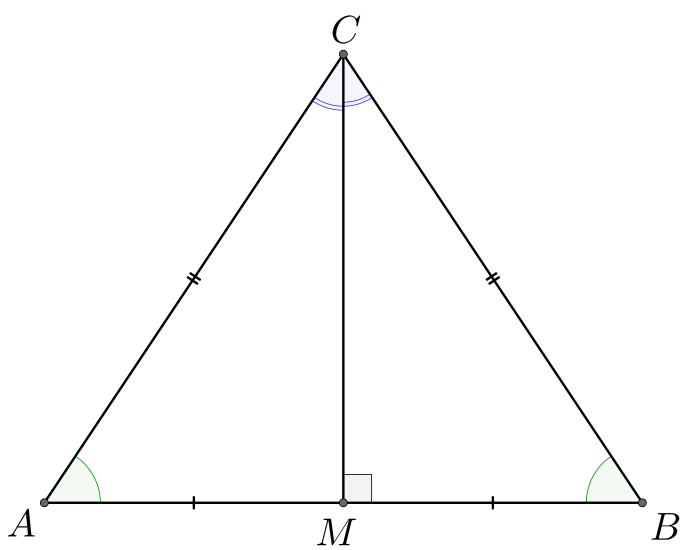
32. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. То есть, если

$$AC = BC,$$

то

$$\angle A = \angle B.$$

33. Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является медианой и высотой.



Замечание:

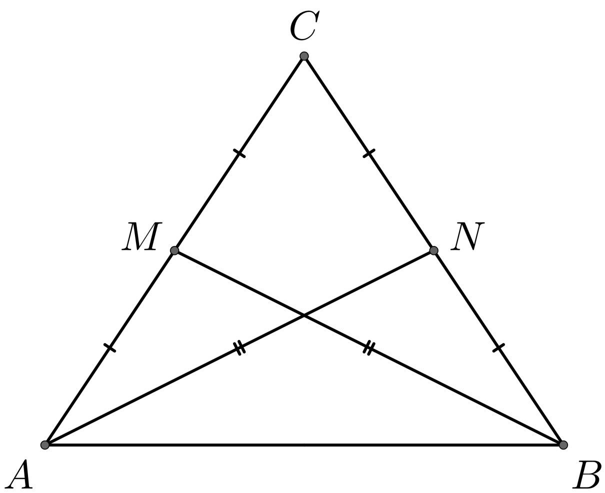
1) Если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то он равнобедренный.

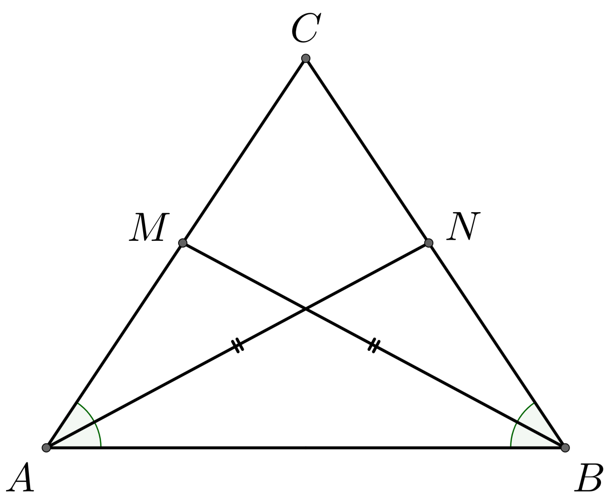
2) Если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то он равнобедренный.

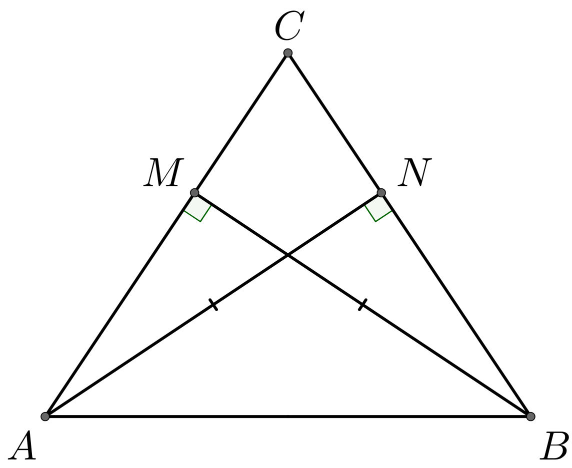
3) Если в треугольнике высота совпадает с биссектрисой, то он равнобедренный.

Замечание: Если углы при основании равны, то треугольник равнобедренный.

34. В равнобедренном треугольнике высоты, медианы и биссектрисы, проведённые из вершин основания, равны.







Замечание: Верны и обратные утверждения:

1) Если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный.

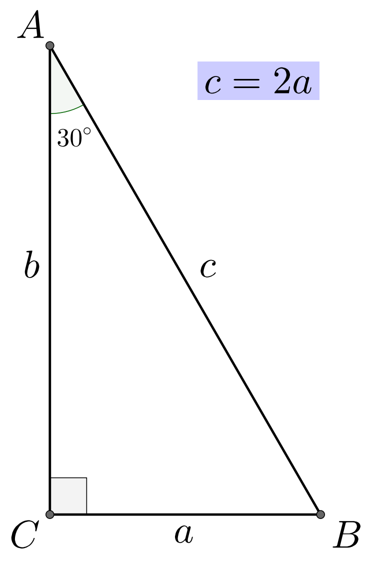
2) Если в треугольнике две высоты равны, то треугольник равнобедренный.

3) Если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

Первые два утверждения очевидны, а третье не имеет простого доказательства и называется теоремой Штейнера-Лемуса.

3 Прямоугольный треугольник

1. Напротив угла в $30°$ лежит катет, равный половине гипотенузы: если $\alpha = 30°$, тогда $2a = c$.



Замечание: Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то напротив этого катета угол $30°$.

Замечание: Если сторона напротив угла $30°$ вдвое меньше прилежащей к углу стороне, то треугольник прямоугольный (это не школьная теорема).

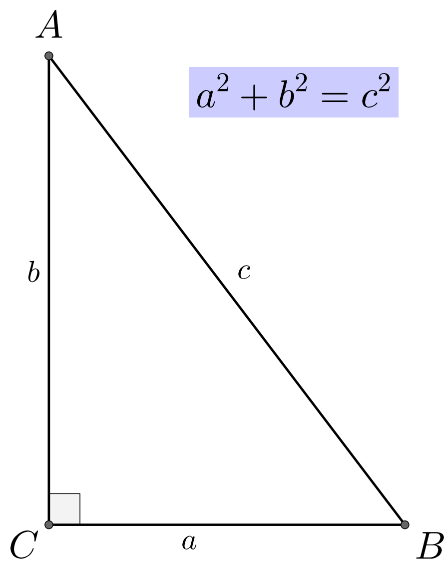
2. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Верно и обратное: Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c верно, что

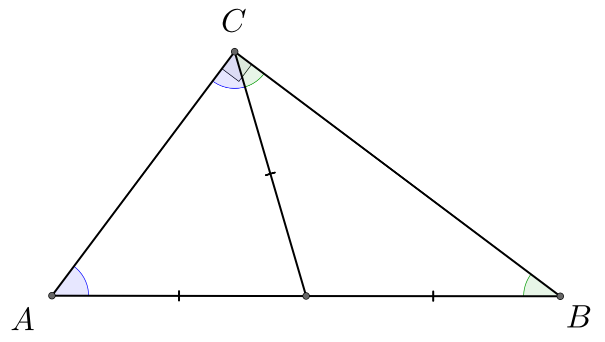
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

то угол, лежащий напротив стороны длина которой равна c, равен $90°$.

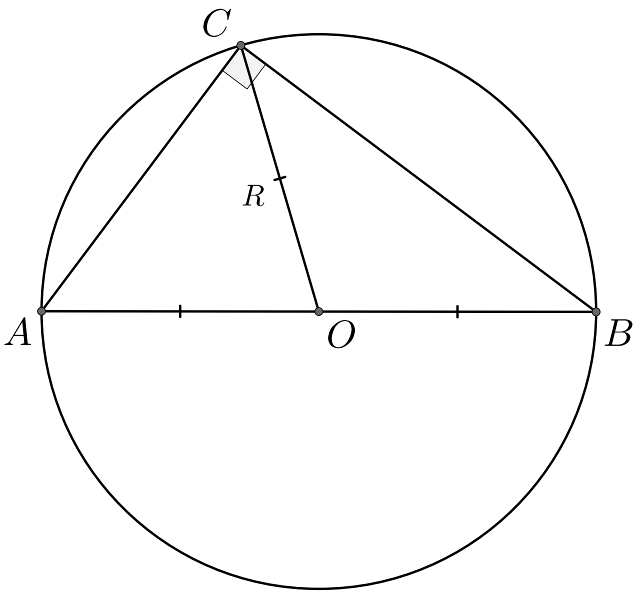


3. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

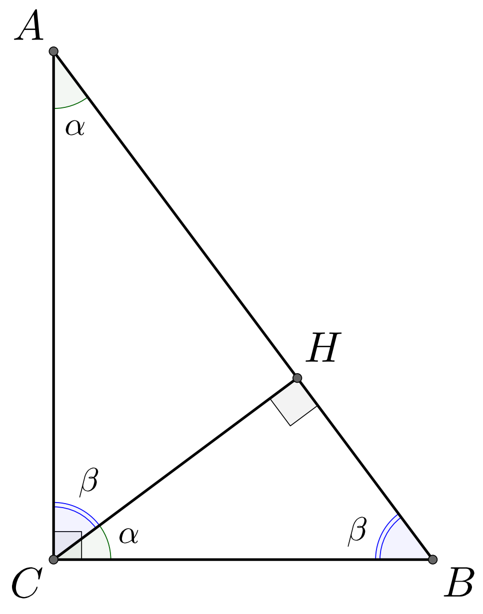
Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник – прямоугольный.



4. Гипотенуза является диаметром, а ее середина – центром окружности, описанной вокруг данного прямоугольного треугольника.



5. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол $\angle C$ – прямой), CH – высота, тогда треугольники ABC, ACH, CBH подобны.



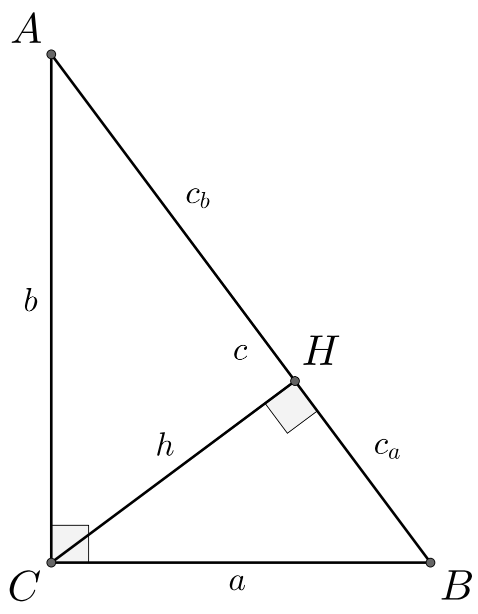
6. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$

Также верны следующие соотношения:

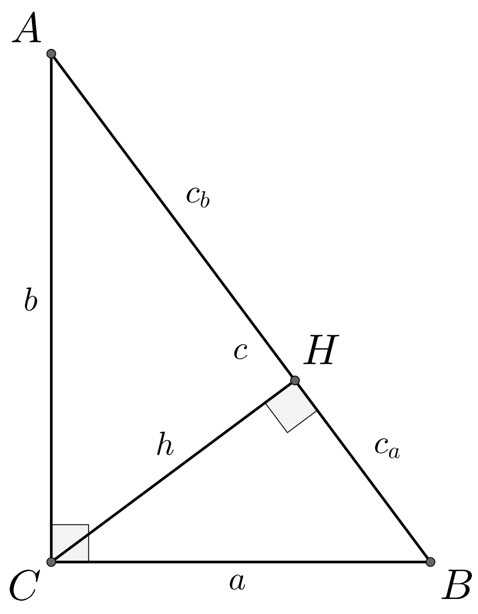
$$c_a c = a^2 \quad \text{или} \quad c_b c = b^2,$$

где c_a и c_b – проекции катетов на гипотенузу.



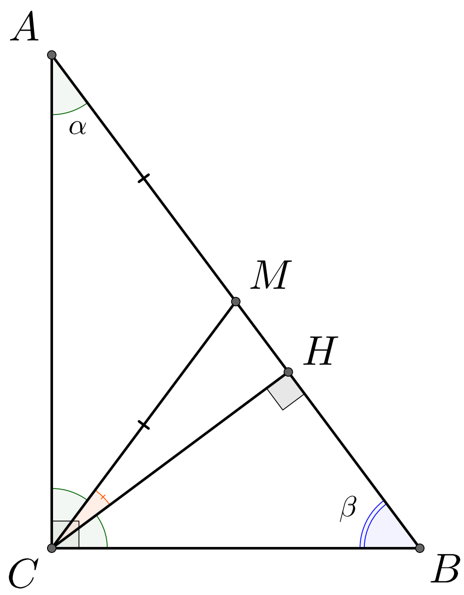
7. Пусть x_a, x_b, x_c – соответственные линейные элементы прямоугольных треугольников с гипотенузами a, b, c соответственно, тогда

$$x_a^2 + x_b^2 = x_c^2.$$



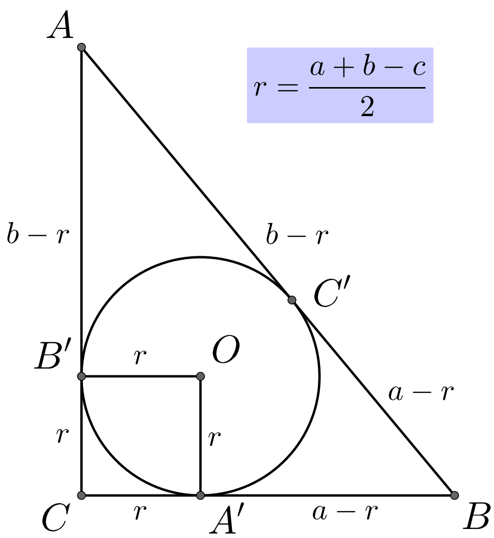
Замечание: Обратите внимание, что это могут быть как отдельные соответственные элементы, так и их линейные комбинации: I_a, I_b, I_c (центры); p_a, p_b, p_c; $r_a + R_a$, $r_b + R_b$, $r_c + R_c$ и т.д.
Например, пусть p_a, p_b, p_c – полупериметры соответственно треугольников CBH, ACH, ABC, тогда $p_a^2 + p_b^2 = p_c^2$.
Если r_a, r_b, r_c – радиусы вписанных окружностей, R_a, R_b, R_c – радиусы описанных окружностей треугольников CBH, ACH, ABC, тогда $(r_a + R_a)^2 + (r_b + R_b)^2 = (r_c + R_c)^2$.

8. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен разности острых углов треугольника.



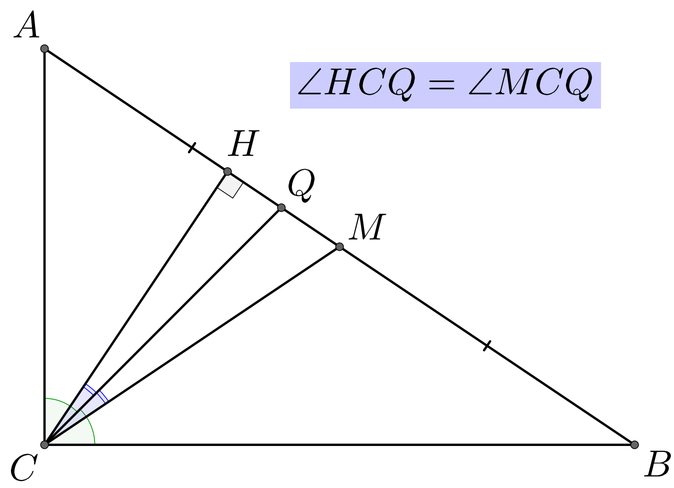
9. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$



10. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является также биссектрисой треугольника, образованного высотой, медианой (которые проведены из вершины прямого угла) и отрезком гипотенузы.

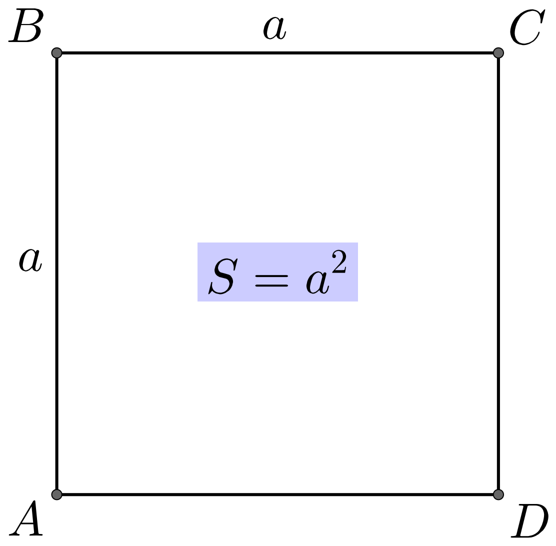
Верно и обратное: если в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой, исходящими из того же угла, то такой треугольник является прямоугольным.



4 Площади

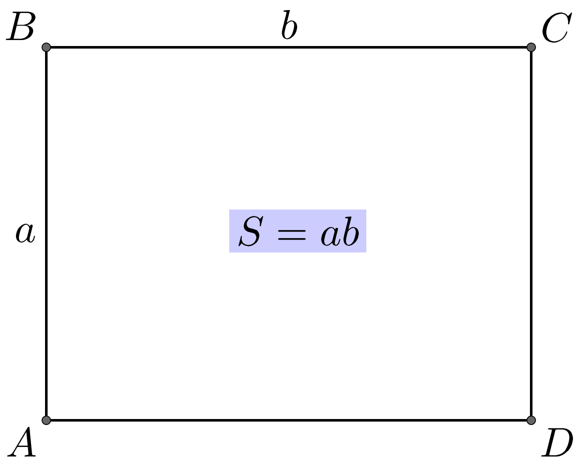
1. Если a – длина стороны квадрата, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = a^2.$$



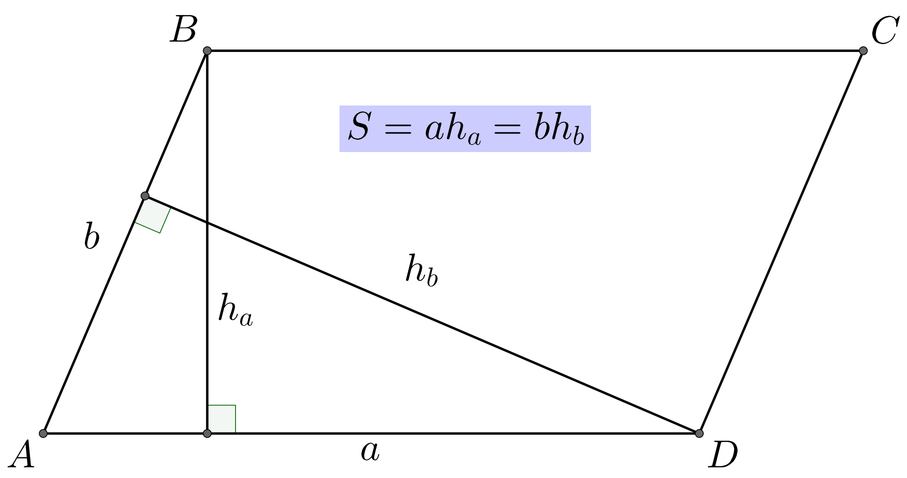
2. Если a и b – длины сторон прямоугольника, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = ab.$$



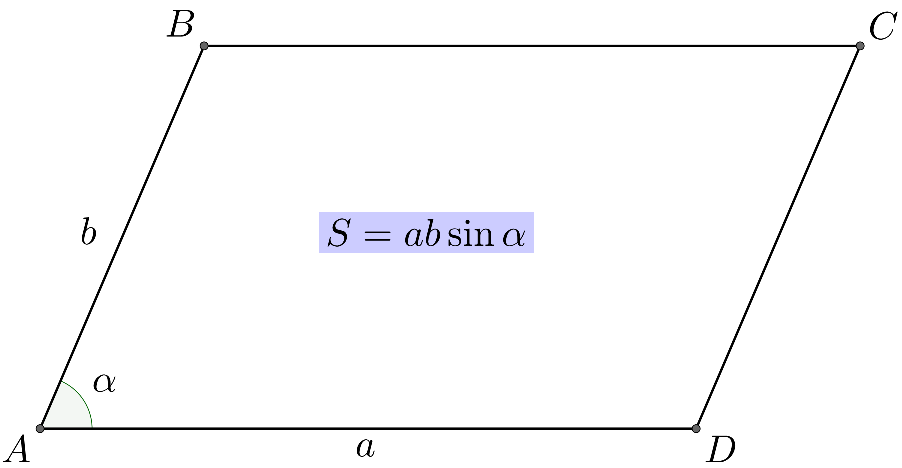
3. Если a и b – длины сторон параллелограмма, h_a и h_b – длины высот параллелограмма, тогда можно найти его площадь по формулам:

$$S = ah_a = bh_b.$$



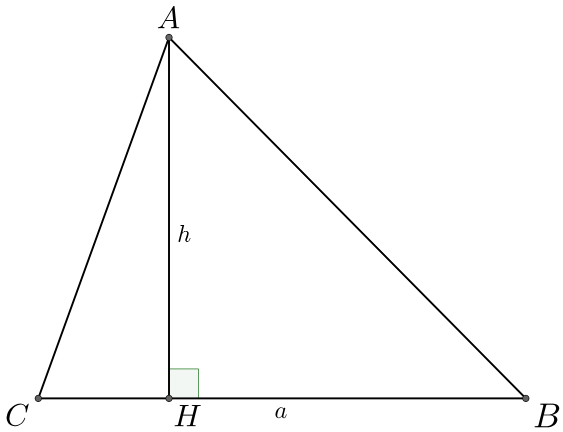
4. Если a и b – длины сторон параллелограмма, α – угол между этими сторонами, тогда мы можем найти площадь параллелограмма по формуле:

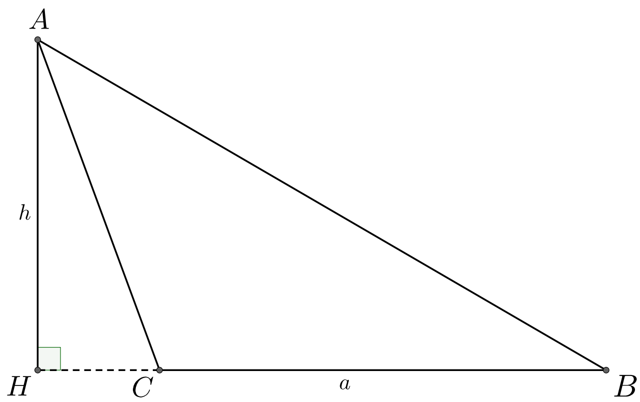
$$S = ab\sin\alpha.$$



5. Если a – длина стороны треугольника, h – длина высоты, проведённой к данной стороне, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

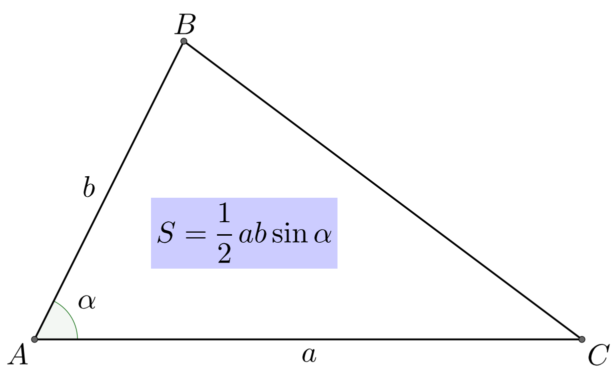
$$S = \frac{ah}{2}.$$





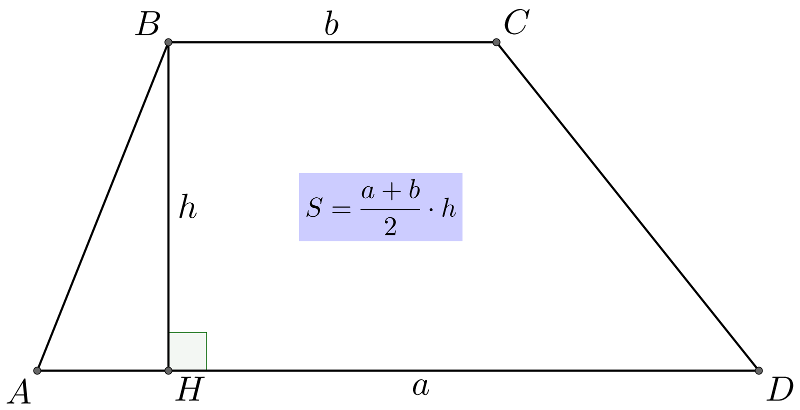
6. Если a, b – длины сторон треугольника, α – угол между этими сторонами, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



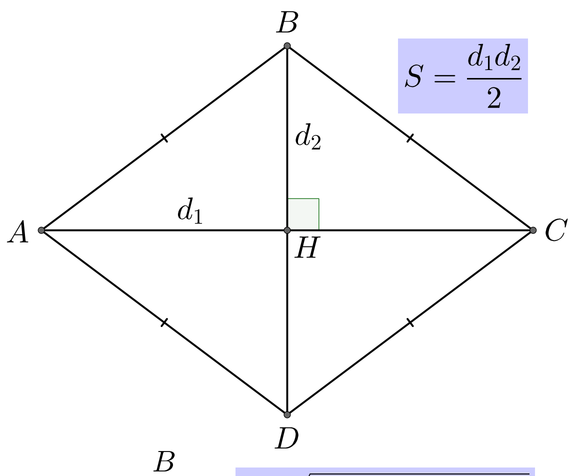
7. Если a и b – длины оснований трапеции, h – длина высота трапеции, то мы можем найти площадь трапеции по формуле:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



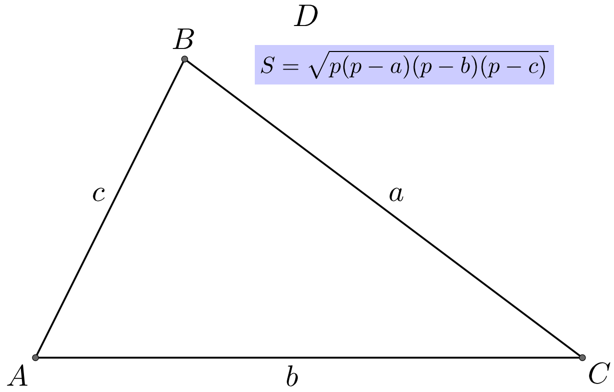
8. Если d_1 и d_2 – длины диагоналей ромба, тогда площадь ромба мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



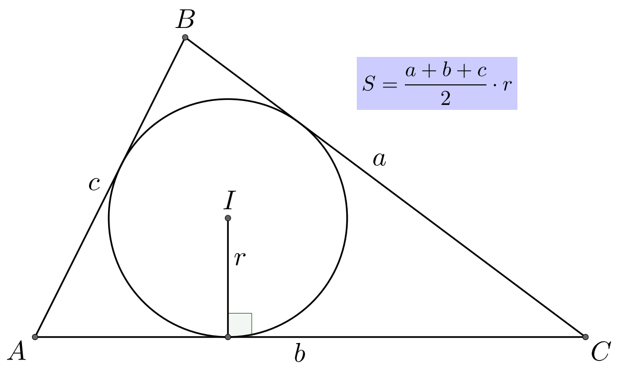
9. Если a, b, c – длины сторон треугольника, p – полупериметр треугольника, тогда площадь треугольника ABC мы можем найти по **формуле Герона**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



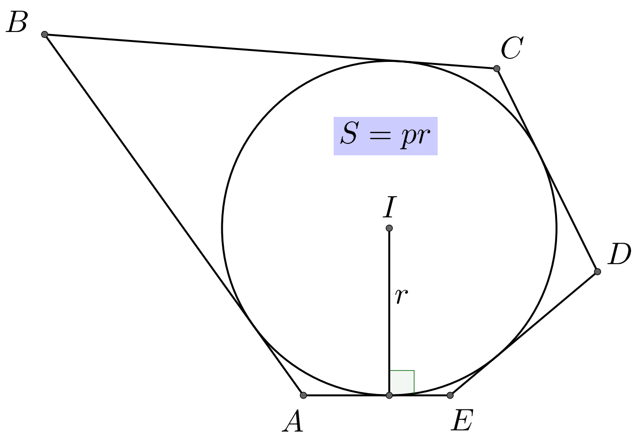
10. Пусть p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в данный треугольник, тогда площадь мы можем найти по формуле:

$$S = pr.$$



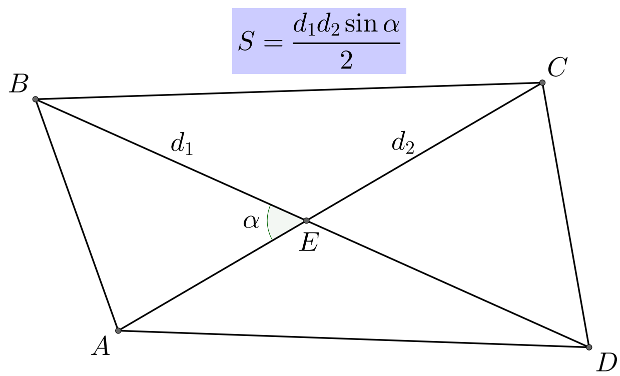
11. Если p – полупериметр многоугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в этот многоугольник, тогда его площадь можно найти по формуле:

$$S = pr.$$



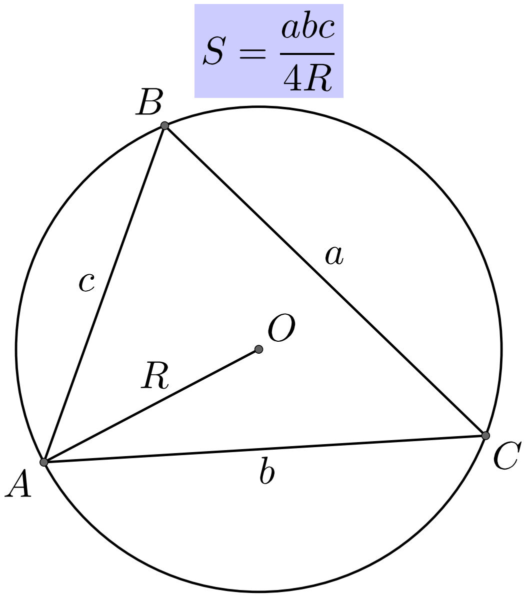
12. Если d_1, d_2 – длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$, α – угол между этими диагоналями, тогда площадь этого четырёхугольника равна:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}.$$



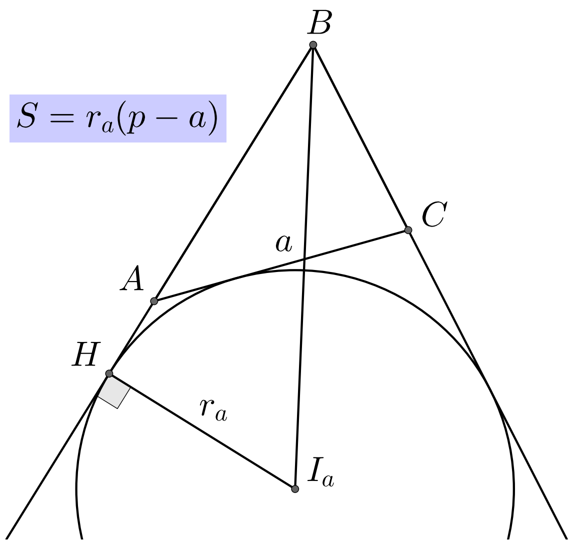
13. Пусть R – длина радиуса окружности, описанной вокруг треугольника ABC; a, b, c – длины сторон треугольника ABC. Тогда площадь данного треугольника можно найти по формуле:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$



14. Пусть p – полупериметр треугольника ABC; r_a, r_b, r_c – длины радиусов вневписанных окружностей. Тогда площадь треугольника ABC можно найти по формулам:

$$S = r_a(p-a); \quad S = r_b(p-b); \quad S = r_c(p-c).$$



Замечание: Из данных соотношений и формулы $S = p \cdot r$ (r – радиус вписанной окружности) легко получить, что

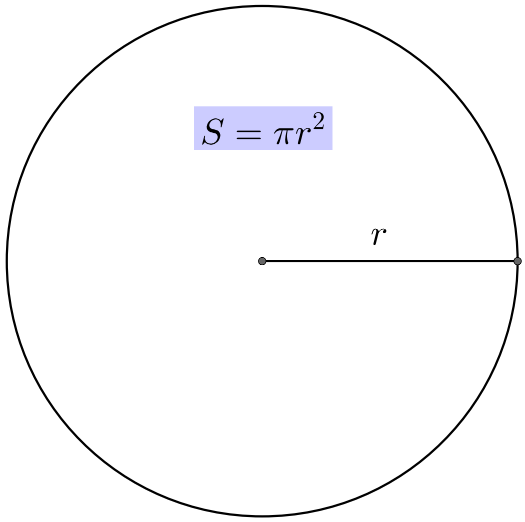
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Замечание: Из формулы Герона следует, что

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

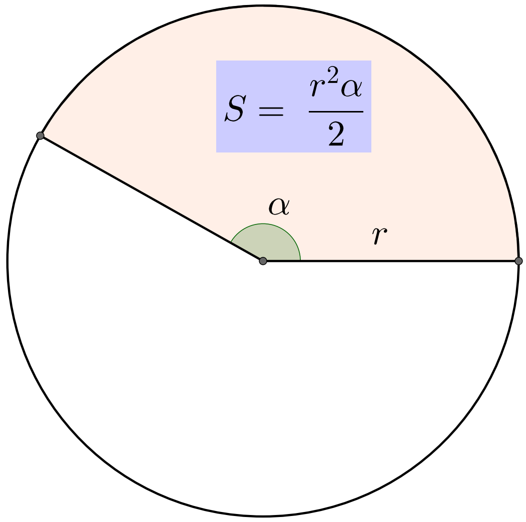
15. Площадь круга с радиусом длины r равна

$$S = \pi r^2.$$



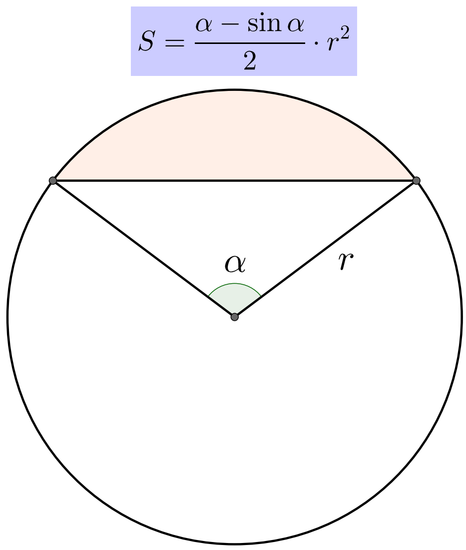
16. Площадь сектора круга с углом α (в радианах) и радиусом длины r равна

$$S = \frac{r^2\alpha}{2}.$$



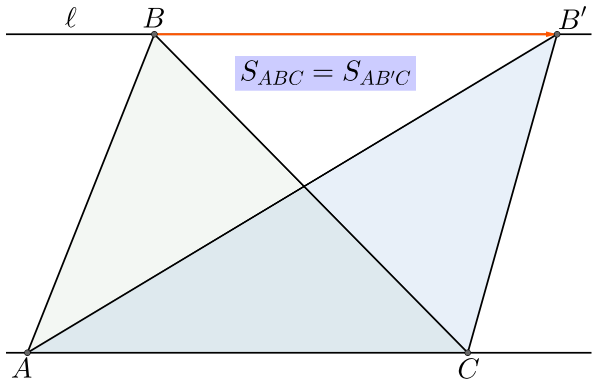
17. Площадь сегмента круга с углом α (в радианах) радиусом длины r равна

$$S = \frac{\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot r^2.$$

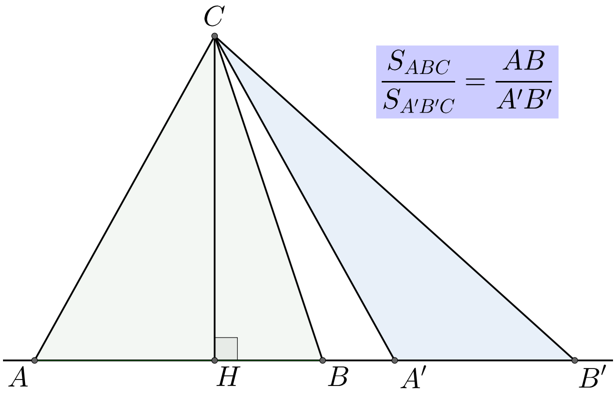


5 Свойства отношений и площадей

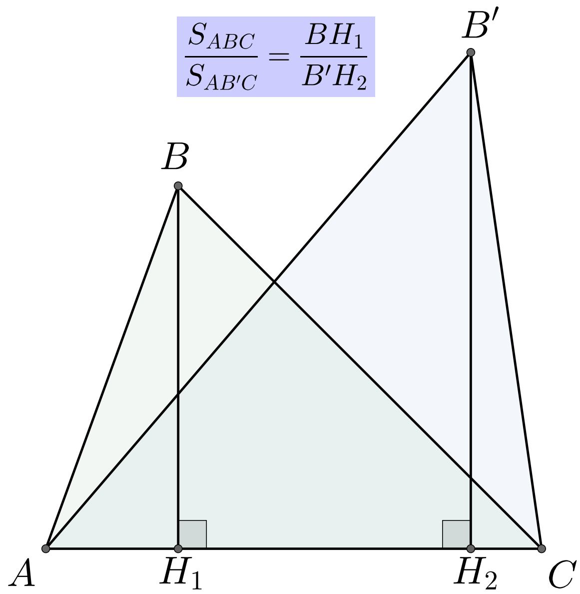
1. **(Рельсы Евклида).** Пусть у нас есть треугольник ABC, ℓ – прямая параллельная AC, проходящая через точку B. Отметим на ℓ точку B'. Тогда площади треугольников ABC и $AB'C$ равны.



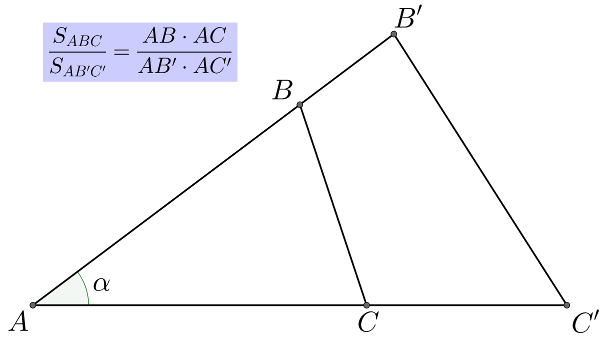
2. Площади треугольников с общей высотой относятся как длины оснований.



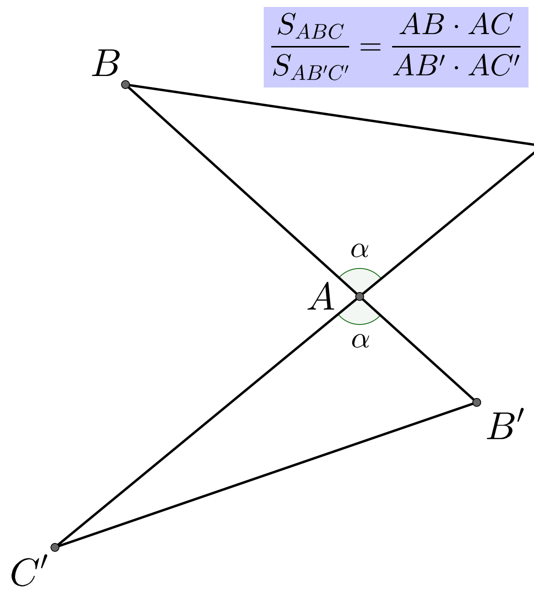
3. Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты.



4. Отношение площадей треугольников с общим углом равно отношению произведений сторон, образующих общий угол.

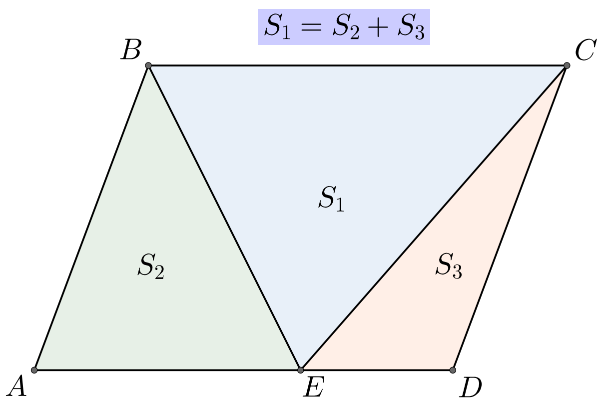


5. Отношение площадей треугольников с одинаковым углом равно отношению произведений сторон, выходящих из этого угла.



6. Пусть на стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, тогда

$$S_{CBE} = S_{ABE} + S_{CDE}.$$



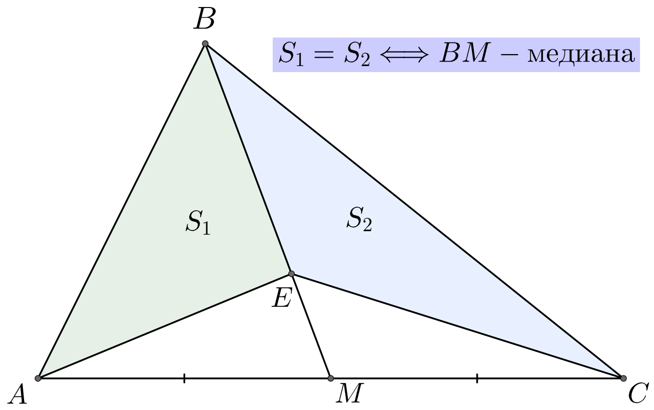
7. Пусть на стороне AC треугольника ABC отмечена точка M, на прямой BM отмечена точка E. Тогда если

$$S_{ABE} = S_{CBE},$$

то BM – медиана.

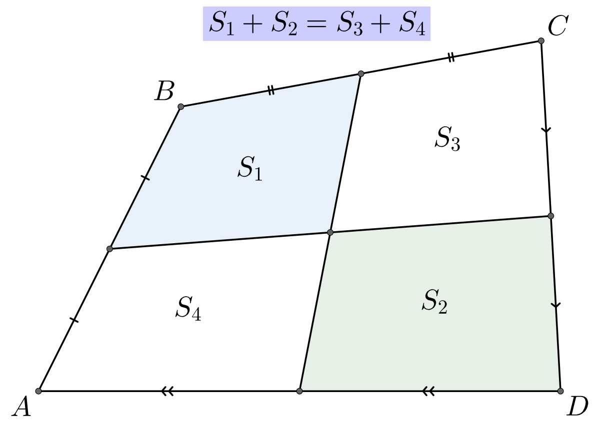
Обратно, если BM – медиана, то

$$S_{ABE} = S_{CBE}.$$



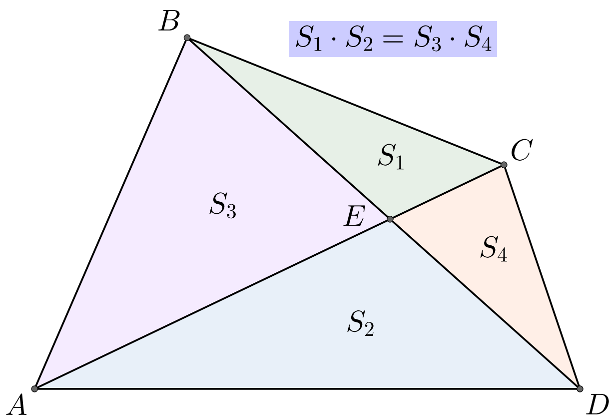
8. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ провели две прямые через середины противоположных сторон, тогда $ABCD$ разделился на четыре четырехугольника S_1, S_2, S_3, S_4, так, что

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4.$$



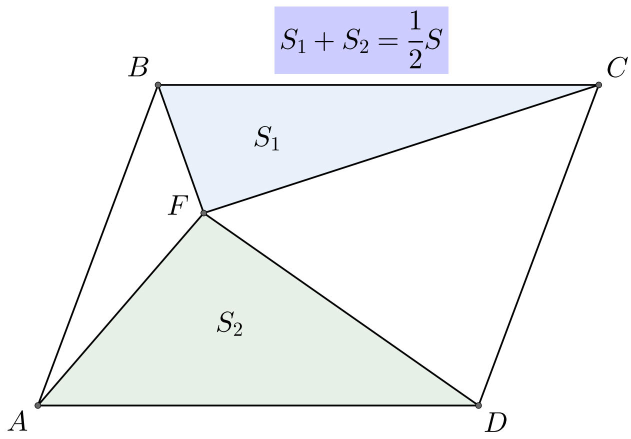
9. Пусть E – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, тогда верно равенство:

$$S_{BEC} \cdot S_{AED} = S_{AEB} \cdot S_{DEC}.$$



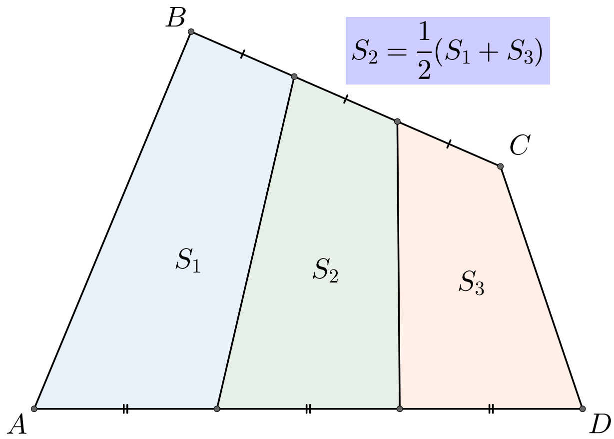
10. Пусть внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку F, тогда

$$S_{AFD} + S_{BFC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$



11. В четырехугольнике $ABCD$ разделим две противоположные стороны на 3 равные части, тогда $ABCD$ разделится на три четырехугольника с площадями S_1, S_2, S_3 так, что:

$$S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3).$$



профиматика

Начни заниматься с нами уже сегодня

Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ

Игорь Уколов

отец Профиматики

- Выпускник мехмата МГУ
- Лично подготовил 30+ стобалльников
- 3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый

Влад Вуль

отец корги и не только

- Диплом факультета прикладной математики МГОУ
- Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU
- 8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов
- Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.

Антон Гурко

преподаватель высшей математики

- Выпускник ВМК МГУ
- Учитель высшей категории со стажем более 10 лет
- Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

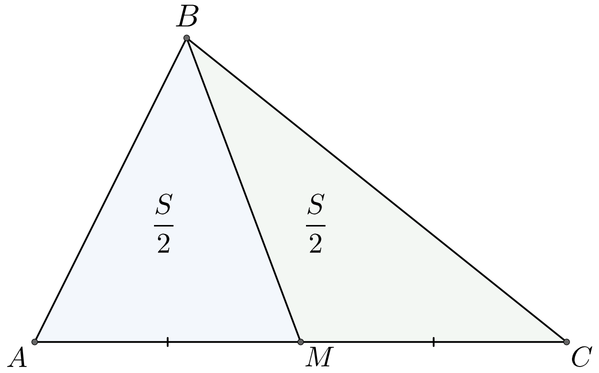
Ещё больше полезных методичек в нашем Telegram-канале

Отзывы о школе

6 Медиана

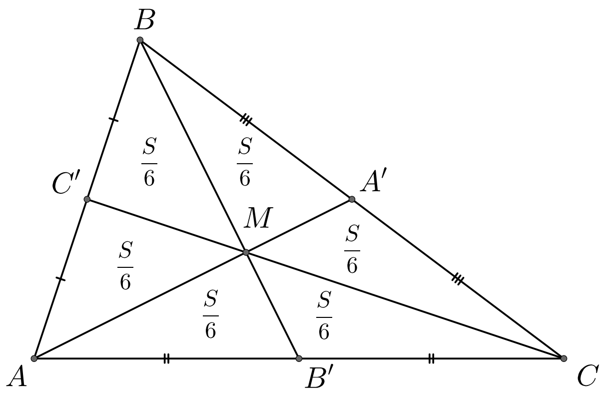
1. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

$$S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{S}{2}.$$



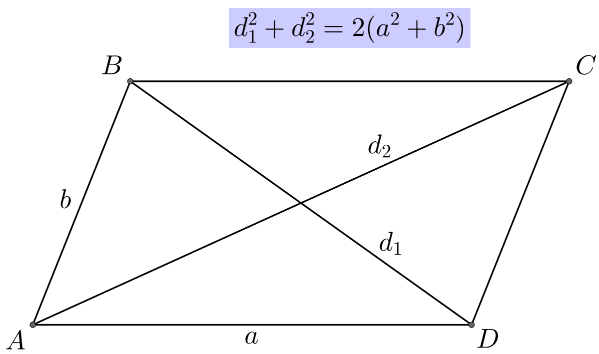
2. Медианы делят треугольник на 6 равновеликих частей:

$$S_{AMC'} = S_{C'BM} = S_{MBA'} = S_{A'MC} =$$
$$= S_{CB'M} = S_{MAB'} = \frac{S}{6}.$$



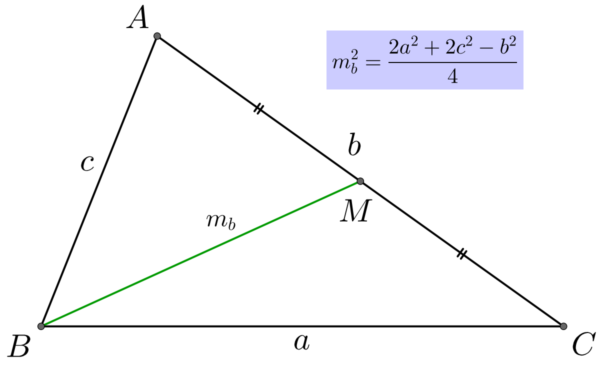
3. В параллелограмме со сторонами a, b и диагоналями d_1, d_2 выполняется **тождество параллелограмма**:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



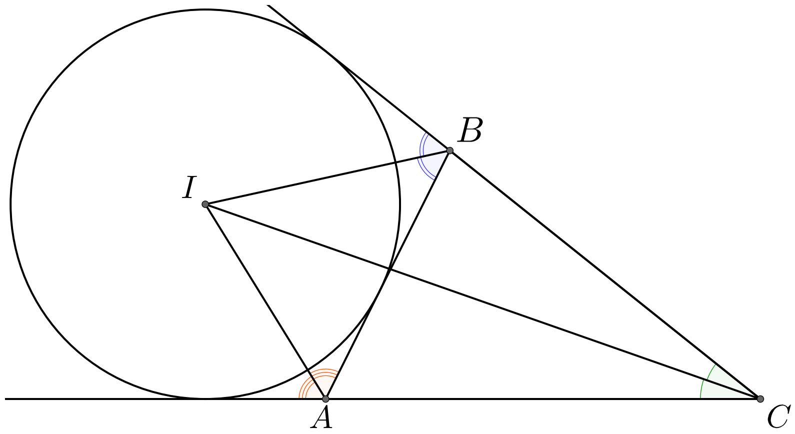
4. Формула для нахождения длины медианы треугольника:

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

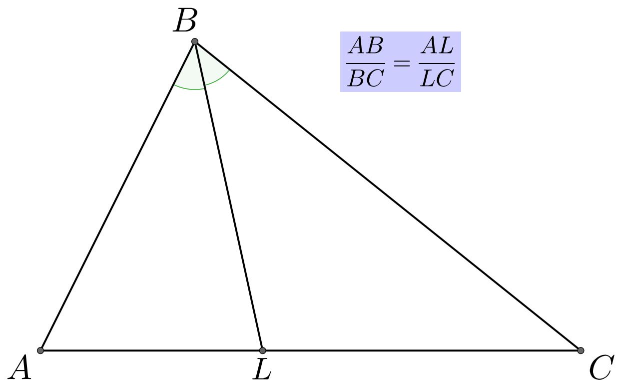


7 Биссектриса

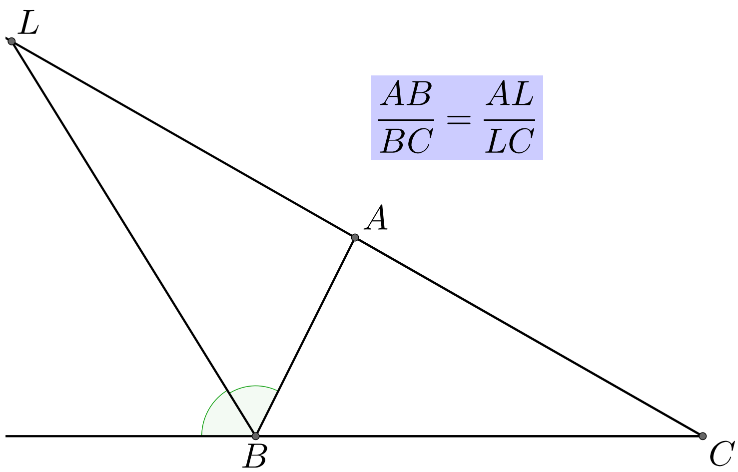
1. Биссектрисы двух внешних углов треугольника и одного внутреннего пересекаются в центре вневписанной окружности.



2. Отрезки, на которые биссектриса треугольника делит противолежащую сторону, пропорциональны прилежащим сторонам.



3. Биссектриса внешнего угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны CA в точке L так, что выполнено равенство:

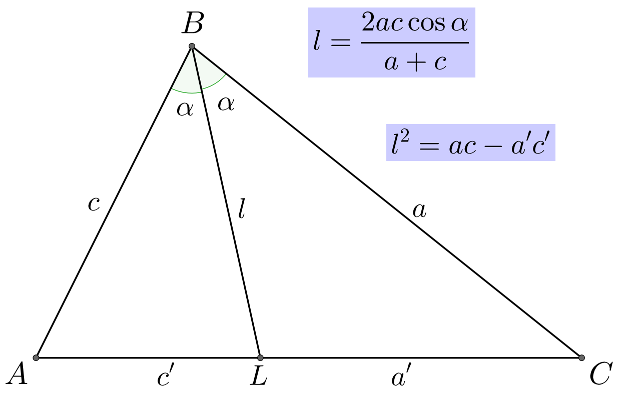


Замечание: Чтобы не путаться удобно запомнить следующее: стороны треугольника, выходящие из вершины угла из которого проведена биссектриса (не важно какая), относятся также как соответственные отрезки, выходящие из конца биссектрисы к другим вершинам.

4. Формулы нахождения длины биссектрисы треугольника:

$$l = \frac{2ac\cos\alpha}{a+c};$$

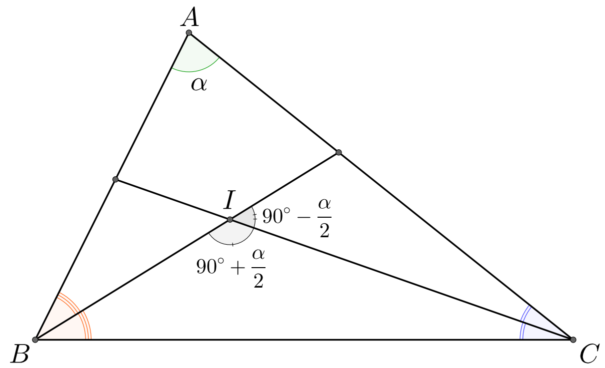
$$l^2 = ac - a'c'.$$



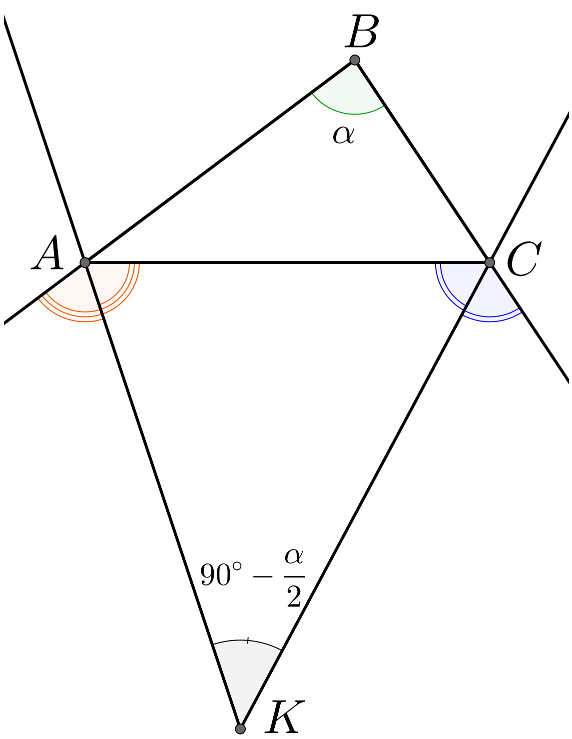
5. Угол между биссектрисами двух внутренних углов треугольника с третьим углом равным α равен

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

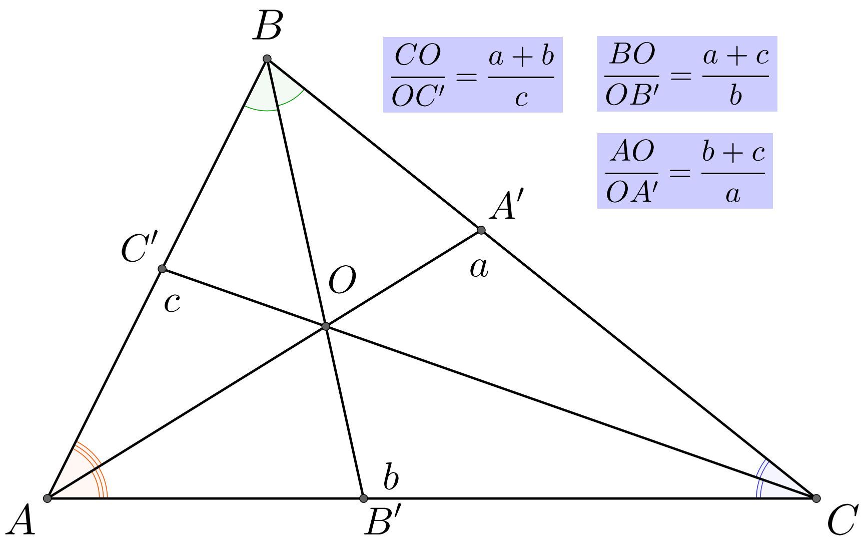
Смежный ему угол равен $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.



6. В треугольнике ABC угол между биссектрисами двух внешних углов A и C треугольника равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle ABC$.



7. Биссектрисы треугольника точкой пересечения делятся следующим образом:



$$\frac{CO}{OC'} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{BO}{OB'} = \frac{a+c}{b}$$

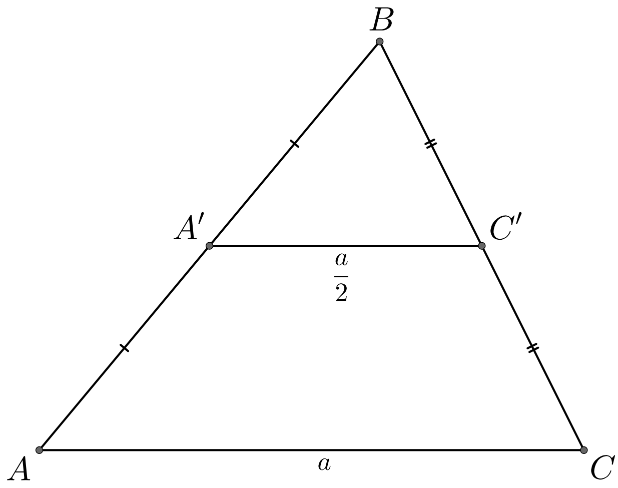
$$\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c}{a}$$

8 Средняя линия

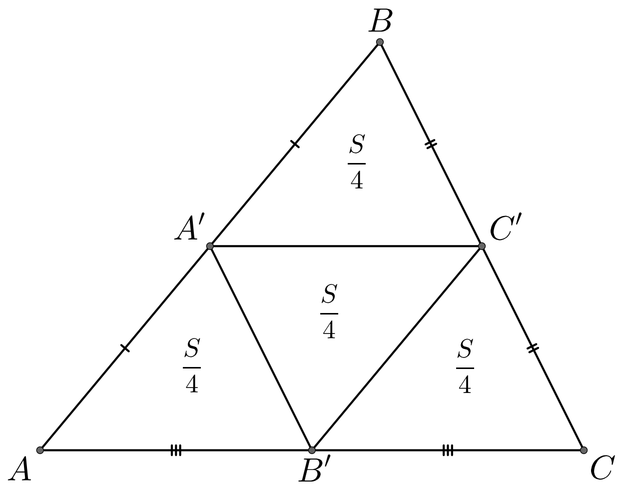
Средней линией треугольника будем называть отрезок, соединяющий середины двух сторон.

1. Средняя линия $A'C'$ треугольника ABC отсекает от него подобный треугольник $A'BC'$, причём коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$.

2. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

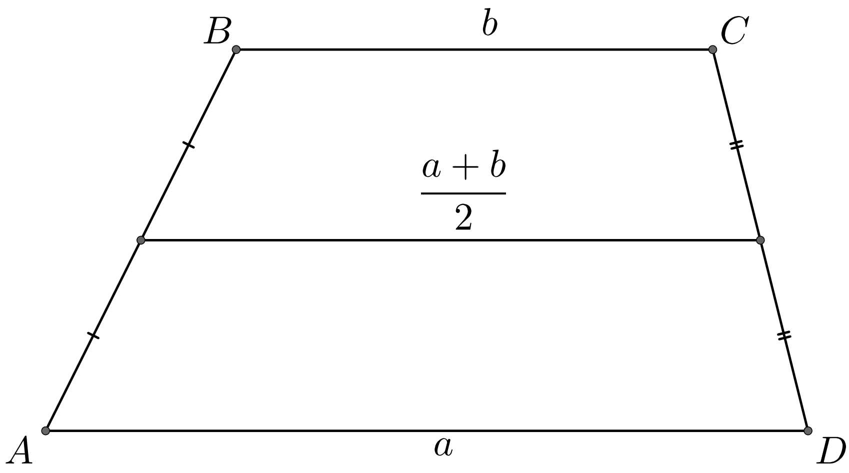


3. Средние линии делят треугольник на 4 равных треугольника площади которых равны $\frac{S}{4}$, где S – площадь исходного треугольника.

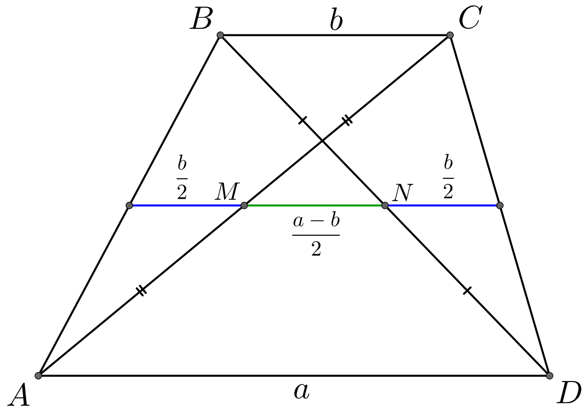


Среднией линией трапеции будем называть отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

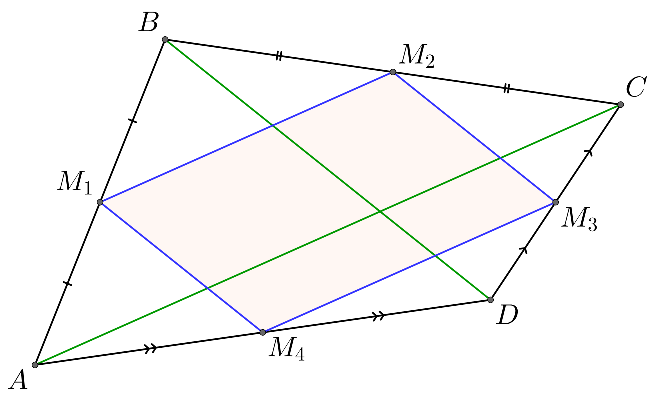
4. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

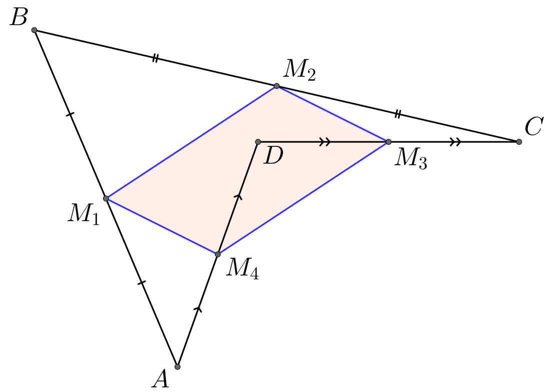


5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности длин оснований.

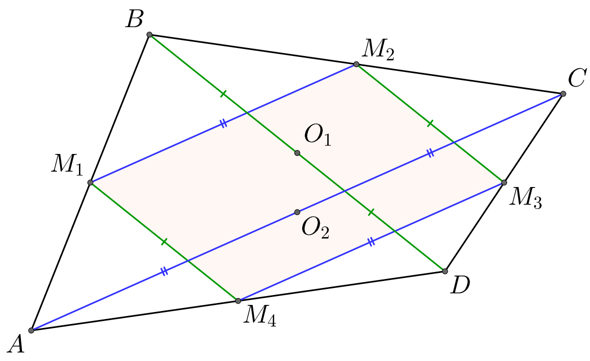


6. (**Теорема Вариньона**)
Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника (не обязательно выпуклого), является параллелограммом, площадь которого вдвое меньше площади четырехугольника. Полученный параллелограмм будем называть **параллелограммом Вариньона**.

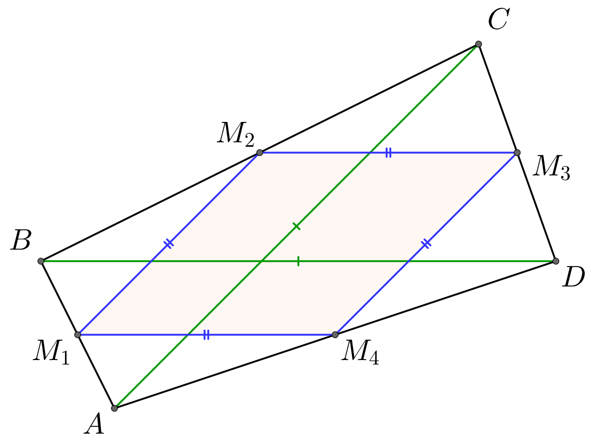




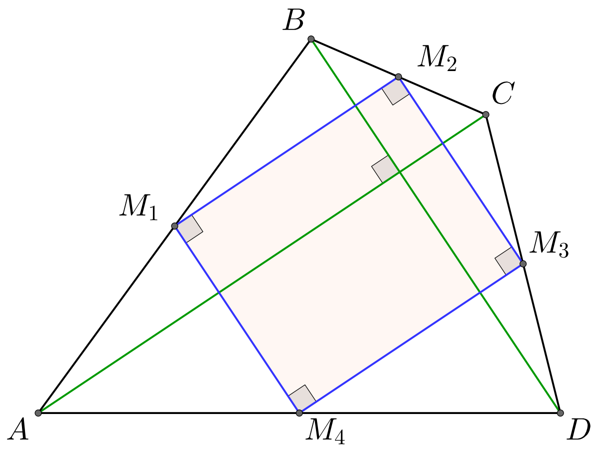
7. Стороны параллелограмма Вариньона равны половинкам диагоналей четырехугольника, из которого он получен.



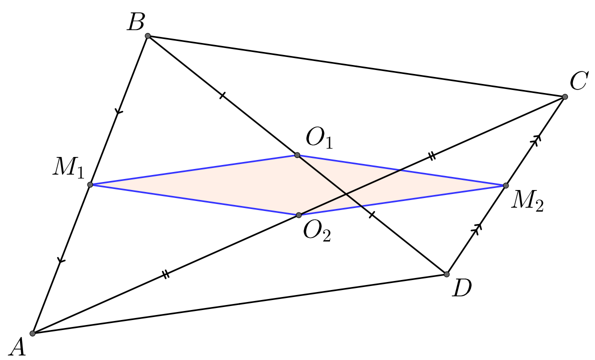
8. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.



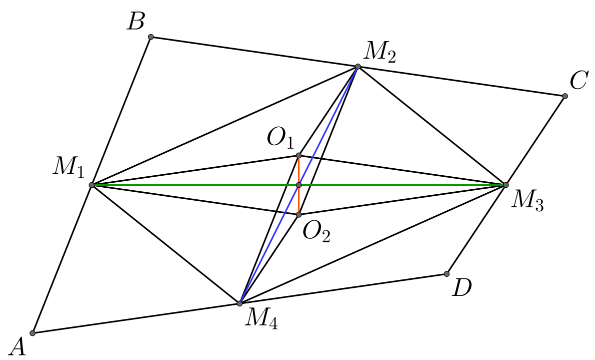
9. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.



10. Четырехугольник, вершинами которого являются середины двух противоположных сторон и диагоналей произвольного четырехугольника, является параллелограммом.

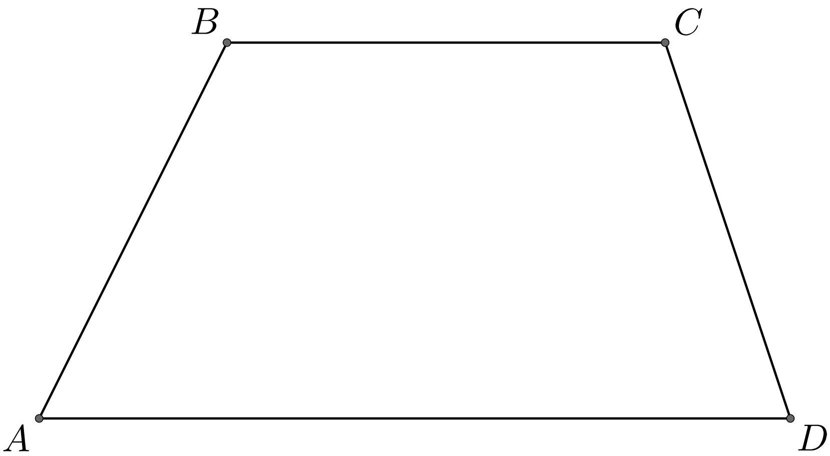


11. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 – середины последовательных сторон четырёхугольника, O_1, O_2 – середины диагоналей четырёхугольника, тогда M_1M_3; M_2M_4 и O_1O_2 пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения пополам.

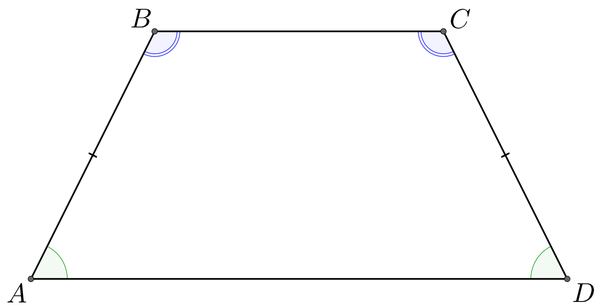


9 Трапеция

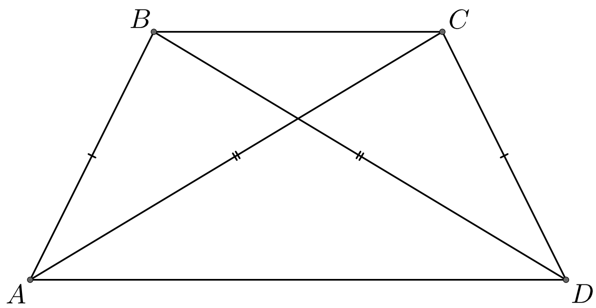
Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (они называются *основаниями*), а две другие – нет (они называются *боковыми сторонами*). Если у трапеции боковые стороны равны, то она называется *равнобедренной*.



1. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда углы при любом из оснований равны.

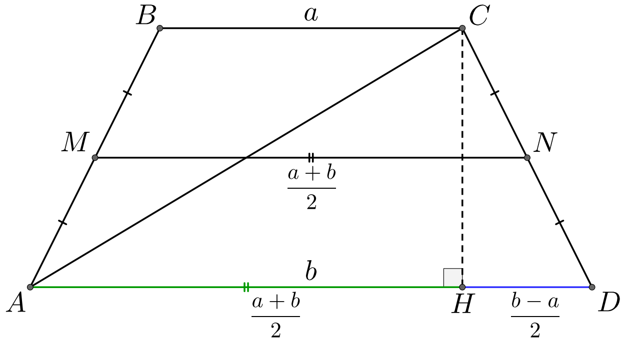


2. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда её диагонали равны.

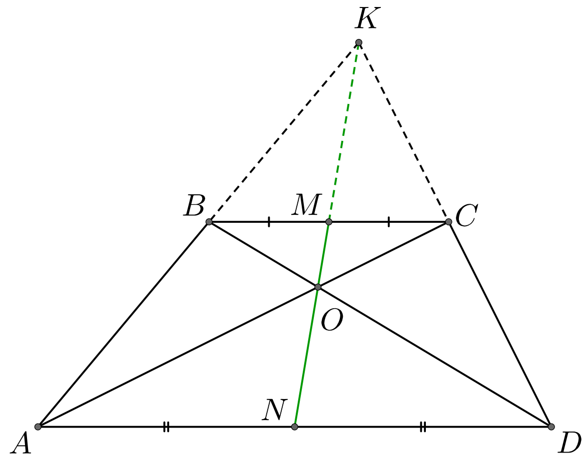


3. В равнобедренной трапеции проекция диагонали на бОльшее основание равна средней линии.

4. В равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на бОльшее основание равна полуразности длин оснований.

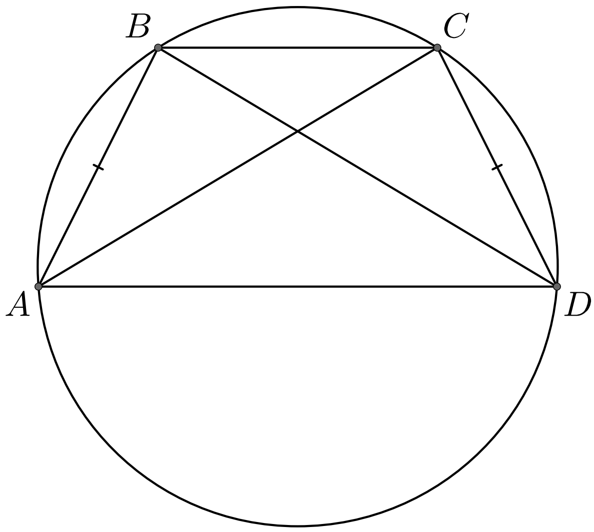


5. (**Замечательное свойство трапеции**). В трапеции середины оснований, точка пересечения продолжений боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

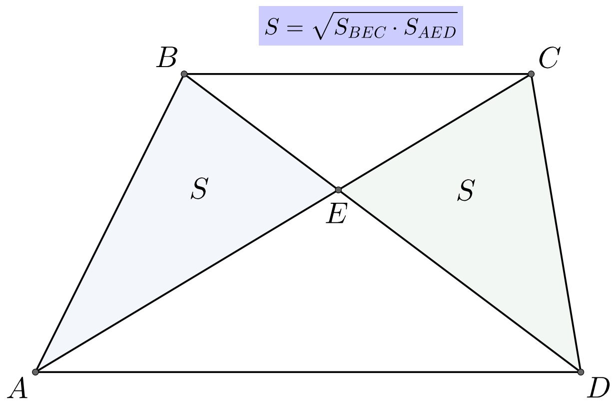


6. Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.

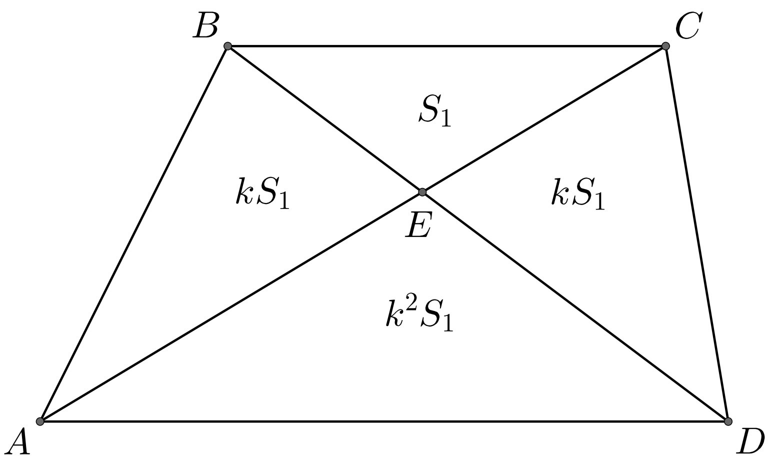
Обратно: Если вокруг трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной.



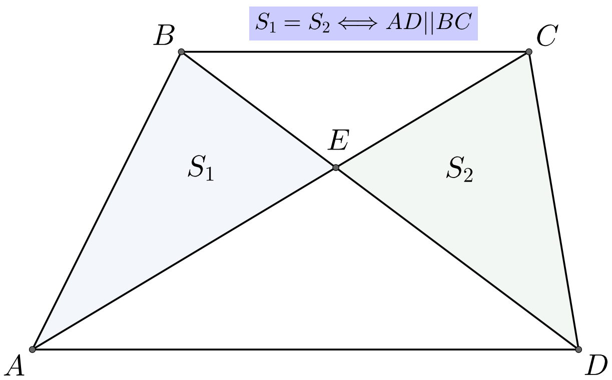
7. Треугольники при боковых сторонах трапеции, образованные диагоналями, равновелики. Их площади равны среднему геометрическому площадей треугольников при основаниях.



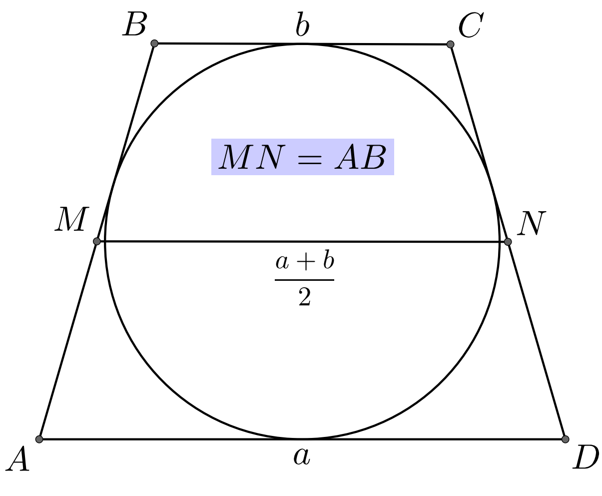
Замечание: Пусть k – коэффициент подобия треугольников BEC и AED. Тогда $S_2 = k^2 S_1$, $S = kS_1$. Получаем, что $S_{ABCD} = S_1 + 2kS_1 + k^2 S_1 = (k+1)^2 S_1$.



8. Пусть точка E является точкой пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, причём $S_{AEB} = S_{CED}$, тогда $ABCD$ – трапеция.

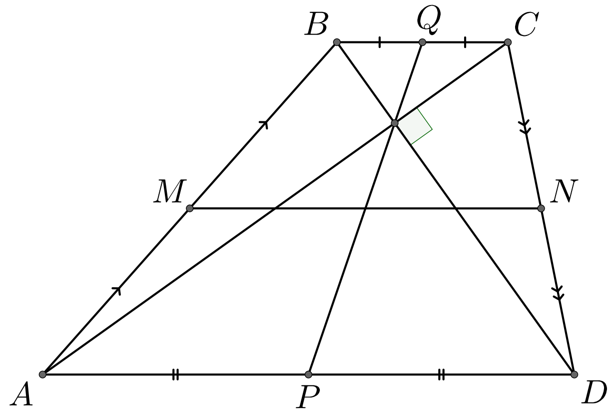


9. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона и средняя линия этой трапеции равны.



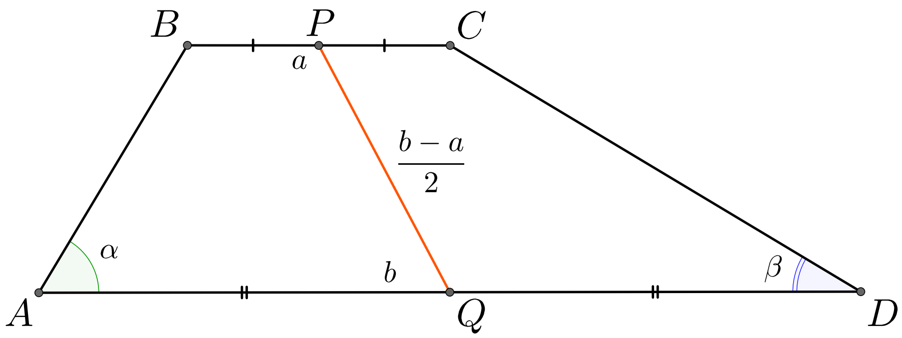
10. Если диагонали трапеции перпендикулярны, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен средней линии.

$$MN = PQ$$

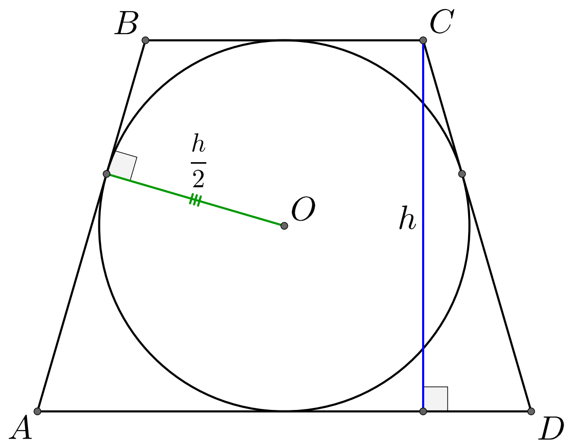


11. Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \implies PQ = \frac{b-a}{2}$$

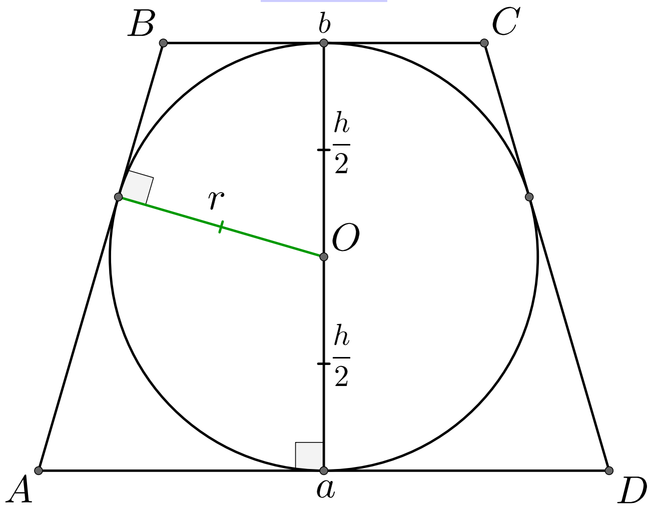


12. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине высоты этой трапеции.

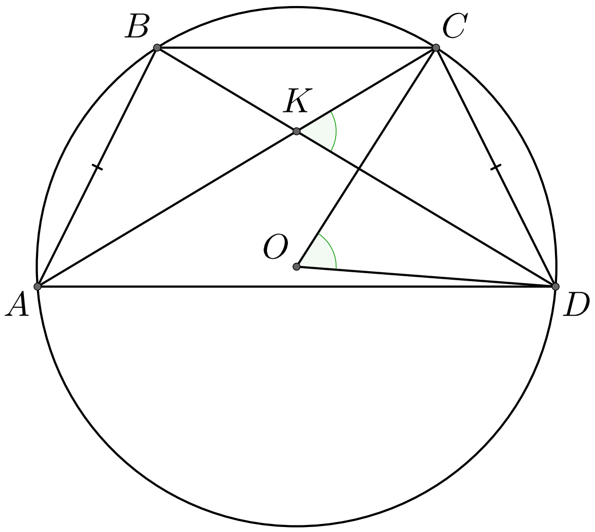


13. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен половине среднего геометрического длин оснований трапеции.

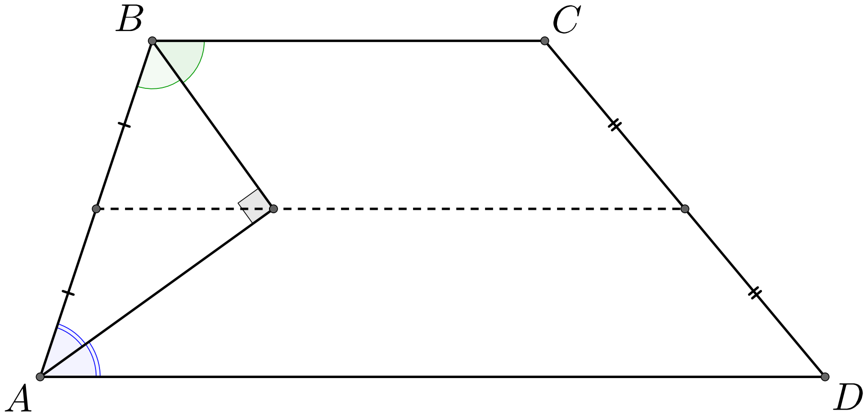
$$r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$



14. Угол, под которым видна боковая сторона равнобедренной трапеции из точки пересечения диагоналей, равен углу, под которым она видна из центра описанной окружности.

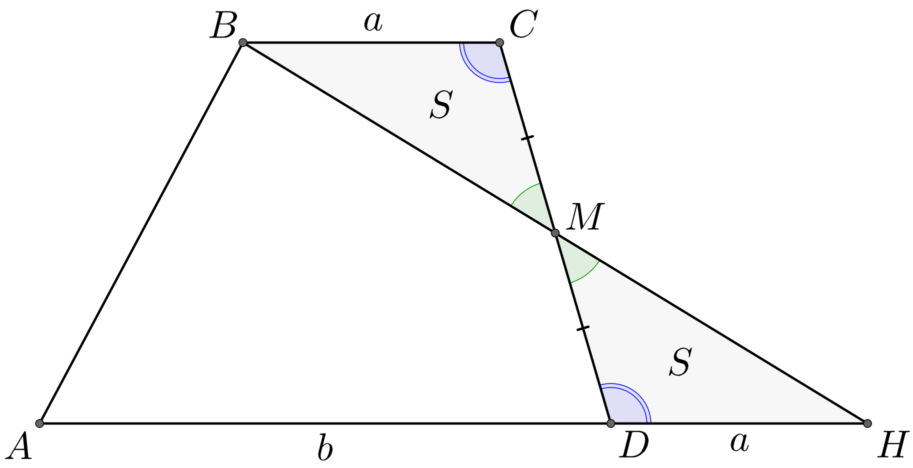


15. Биссектрисы внутренних односторонних углов трапеции пересекаются на средней линии под прямым углом.



16. В трапеции проведём через середину M боковой стороны CD прямую BM до пересечения с прямой AD. Полученные треугольники BCM и HDM равны. Из этого следует, что

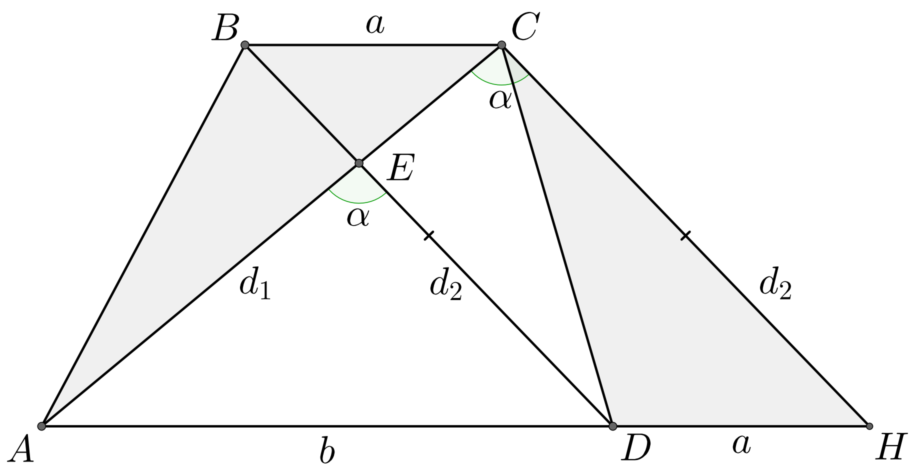
$$S_{ABCD} = S_{ABH}$$



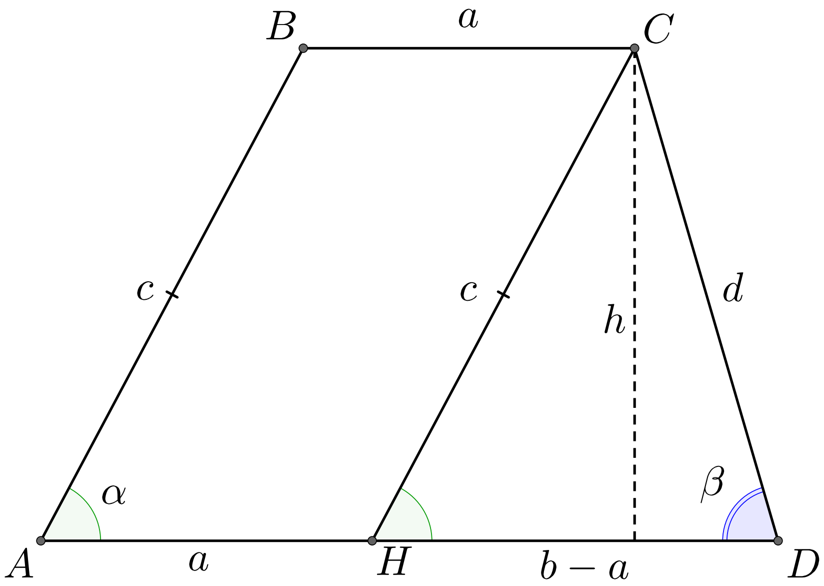
Замечание: Треугольники BMD и HMC также являются равными, потому что $\angle BMD = \angle CMH$, $CM = MD$ и $BM = MH$. В частности, это означает, что диагональ BD параллельна CH и $BCHD$ – параллелограмм.

17. Заметим, что если мы знаем основания и диагонали трапеции, то в треугольнике ACH нам известны все три стороны, а значит, мы можем найти площадь трапеции и угол между её диагоналями.

$$S_{ABCD} = S_{ACH}$$

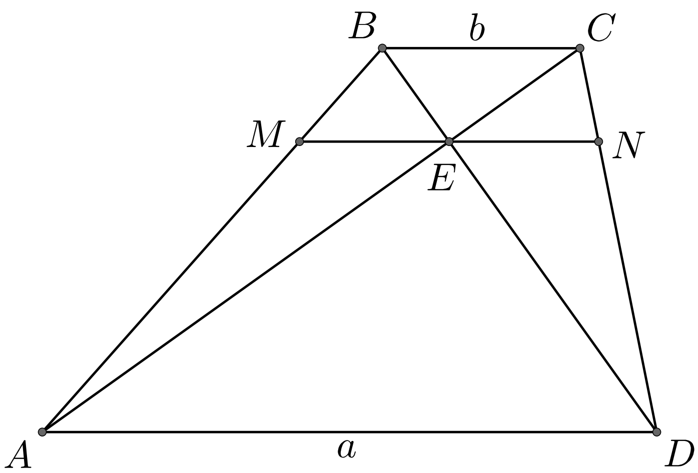


18. Через вершину C проведём отрезок CH параллельно боковой стороне AB. Тогда $ABCH$ – параллелограмм и $AH = a$, $HD = b - a$.
Заметим, что если мы знаем стороны трапеции, то мы знаем стороны треугольника CHD, поэтому мы можем найти углы α и β, а также высоту трапеции с помощью различных формул для площади треугольника.



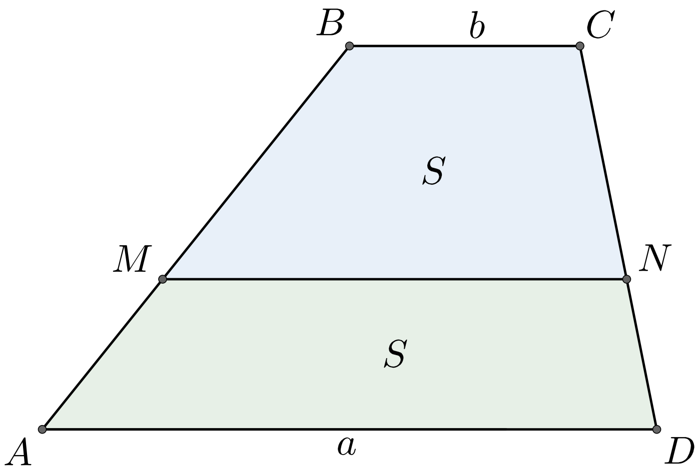
19. Длина отрезка MN, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно средней линии, равна среднему гармоническому длин оснований.

$$MN = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$



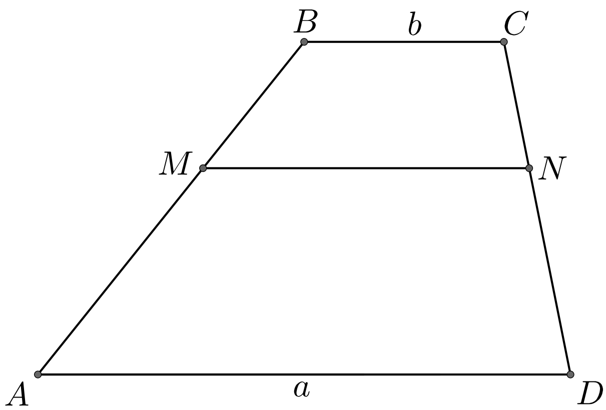
20. Длина отрезка MN, проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две равновеликих, равна среднему квадратическому длин оснований.

$$MN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



21. Длина отрезка MN, проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований.

$$MN = \sqrt{ab}$$

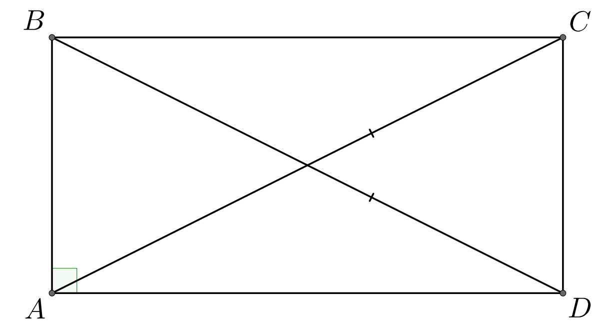


10 Основные четырёхугольники

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

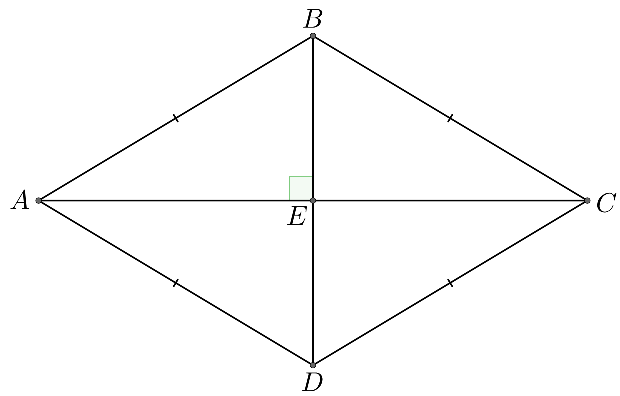
Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

1. Диагонали прямоугольника равны.

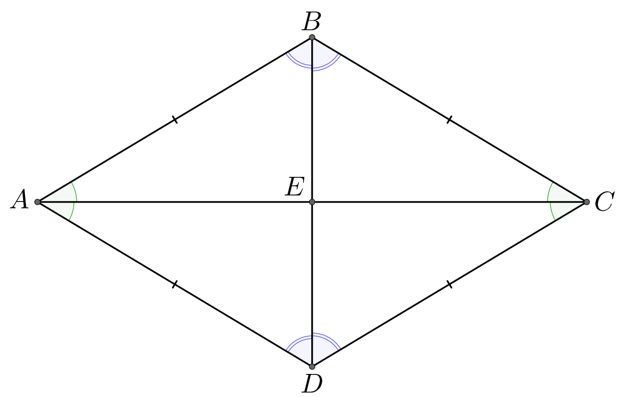


Ромбом называется параллелограмм у которого все стороны равны.

2. Диагонали ромба перпендикулярны.

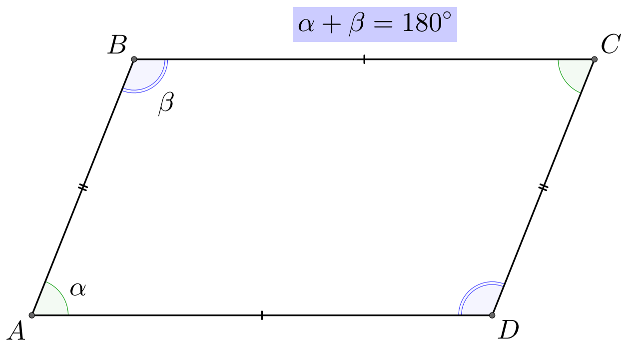


3. Диагонали ромба делят его углы пополам.



4. Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°, а противоположные углы равны.

Обратно: если в четырёхугольнике сумма любых двух соседних углов равна 180°, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

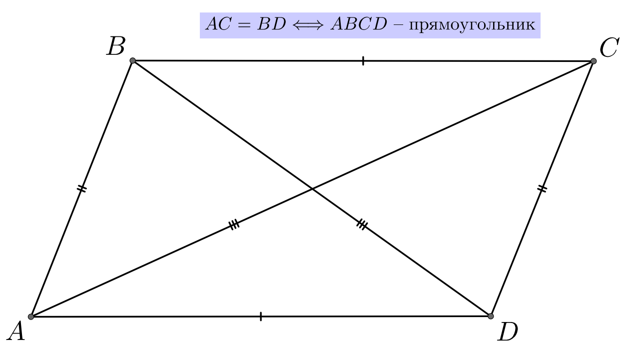


5. Если в четырёхугольнике противолежащие углы попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

6. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Обратно: если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

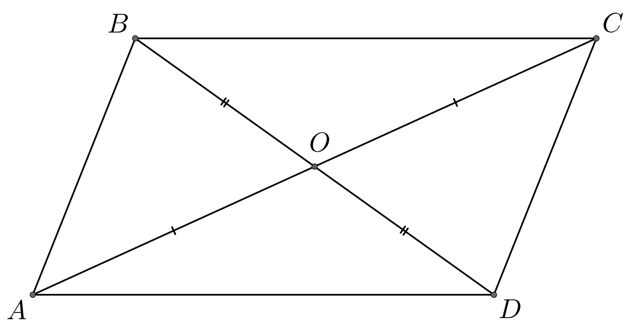
7. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.



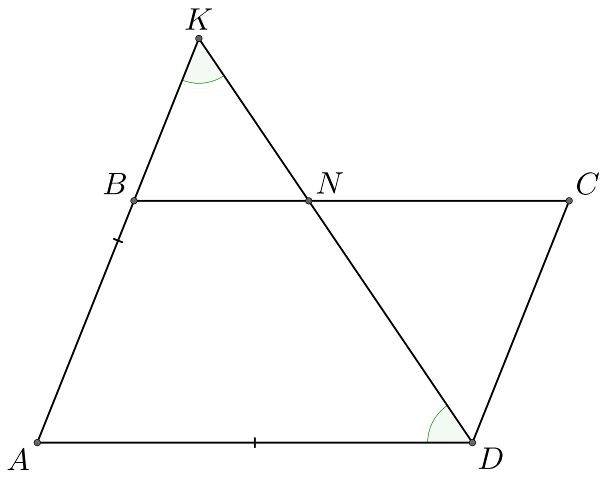
8. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

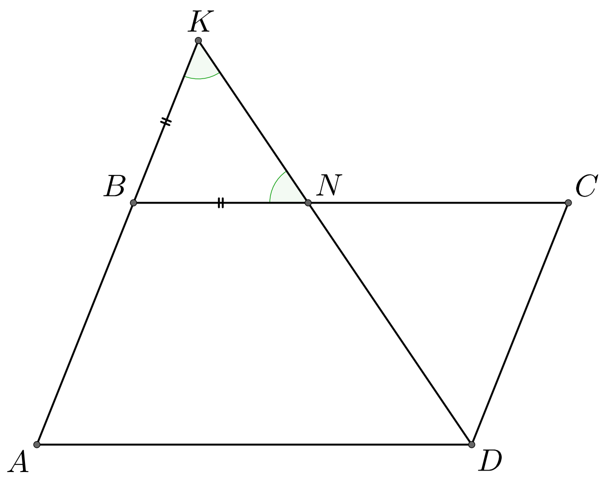
9. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

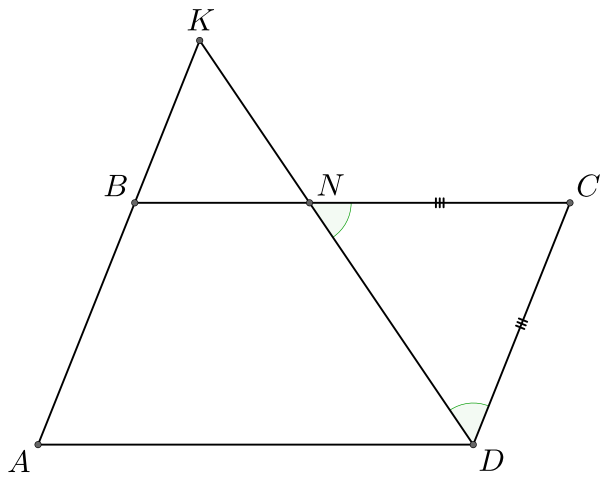
Обратно: если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.



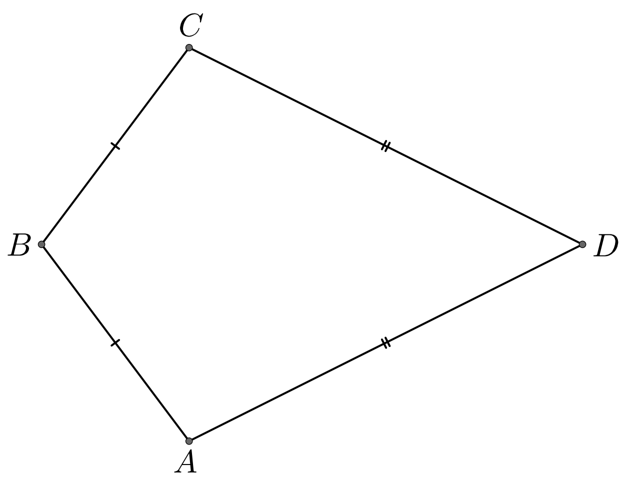
10. Пусть в параллелограмме проведена биссектриса угла D. Тогда треугольники DCN, NBK, DAK – равнобедренные.

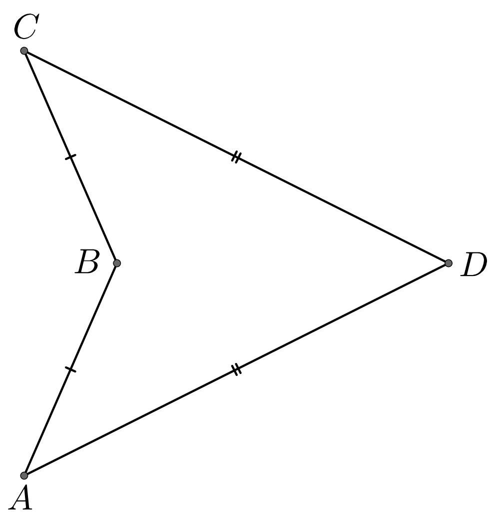






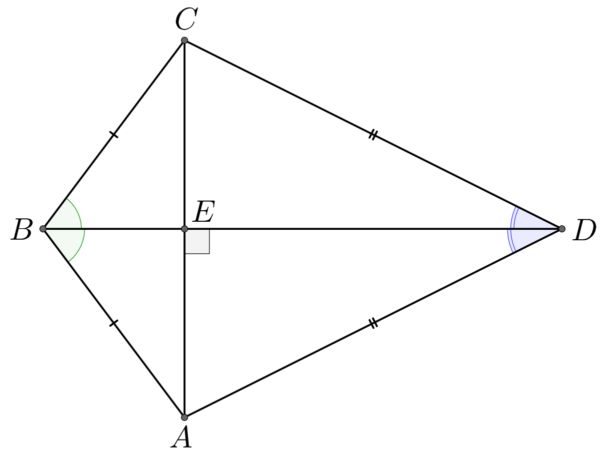
Дельтоидом называется четырёхугольник, у которого есть две пары равных соседних сторон.



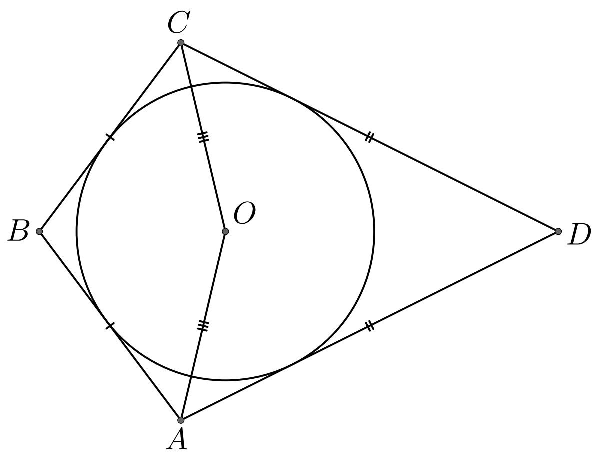


11. Одна из диагоналей дельтоида является биссектрисой двух его углов.

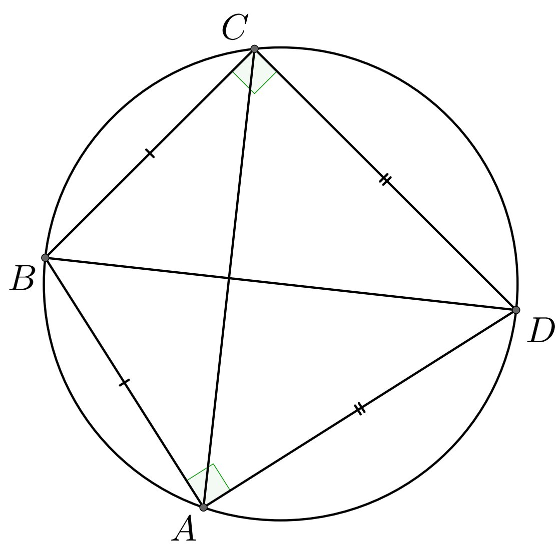
12. Диагонали дельтоида перпендикулярны.



13. В дельтоид $ABCD$ можно вписать окружность. Если $AB = BC$, $AD = DC$ и O – центр вписанной окружности, то $CO = OA$.



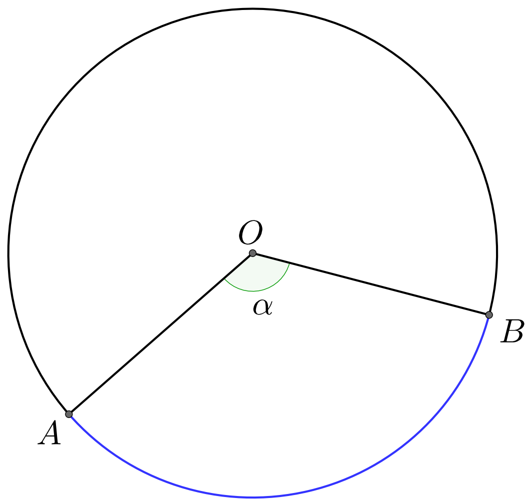
14. Вокруг дельтоида можно описать окружность тогда и только тогда, когда его неравные стороны образуют углы по $90°$.



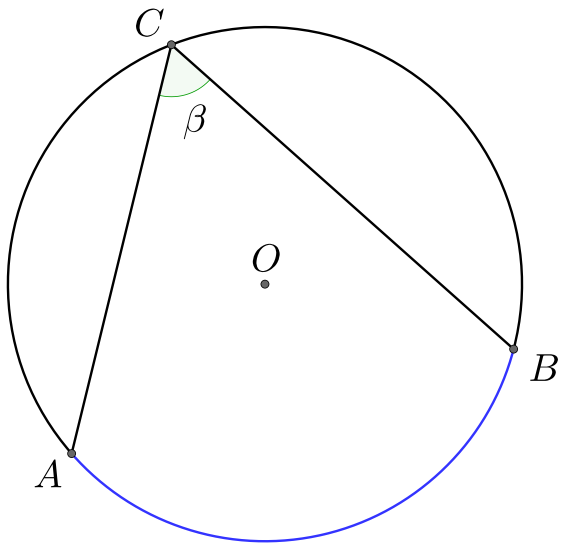
11 Центральные и вписанные углы

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**.

$$\alpha = \overset{\smile}{AB}.$$

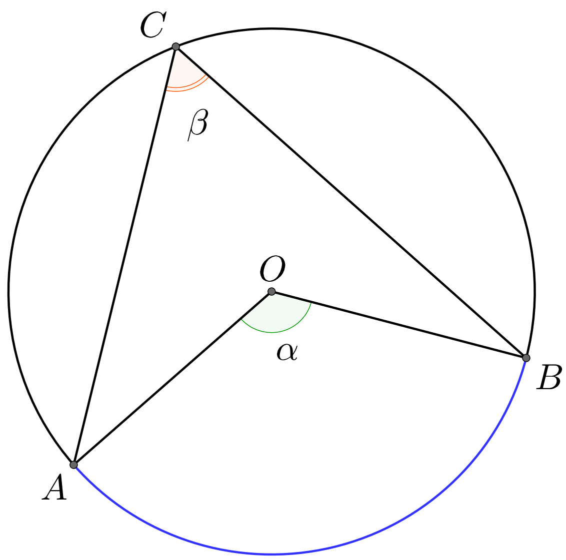


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность называется **вписанным**.



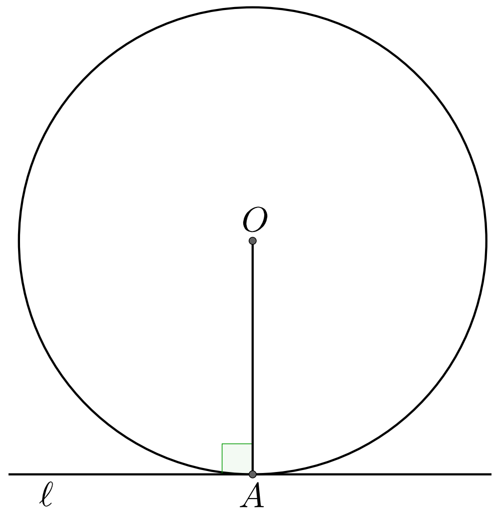
1. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha.$$

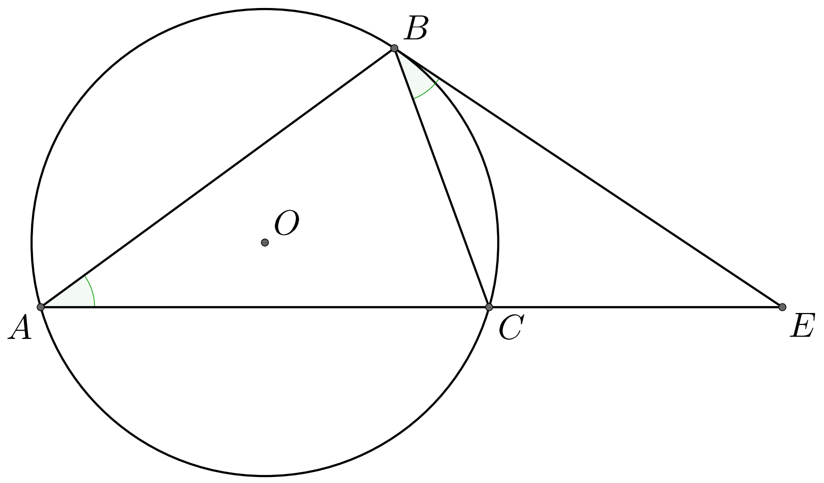


Замечание: В частности два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

2. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

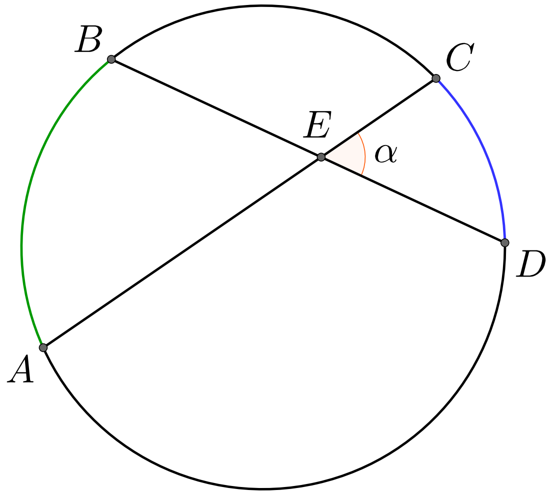


3. Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, равен вписанному углу, который опирается на дугу, стягиваемую хордой.



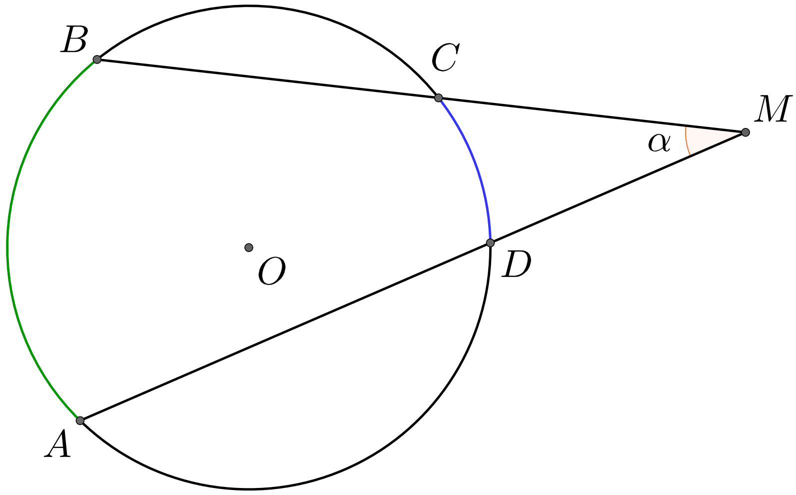
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме выскаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD}}{2}$$



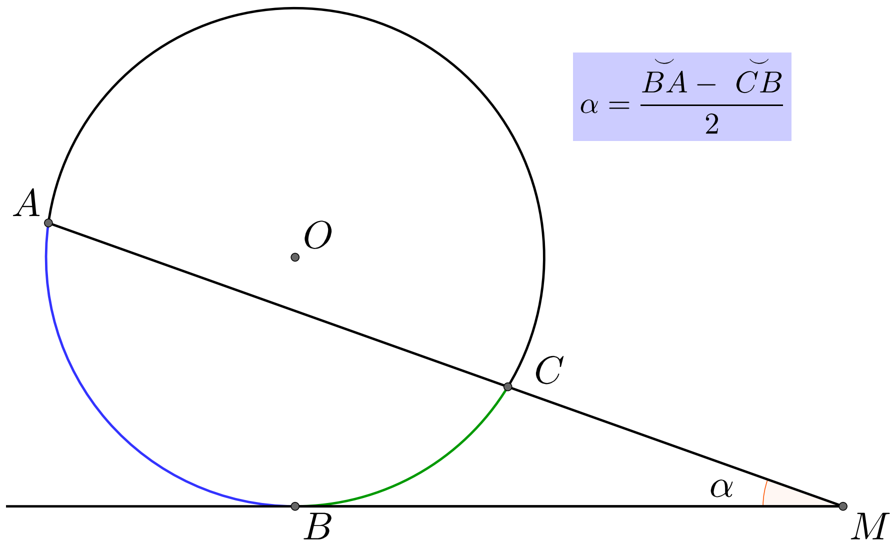
5. Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\smile AB - \smile CD}{2}$$

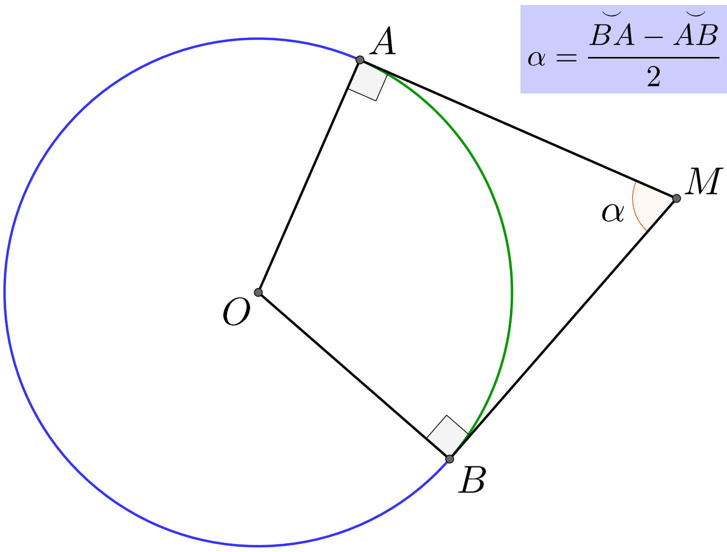


6. Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.

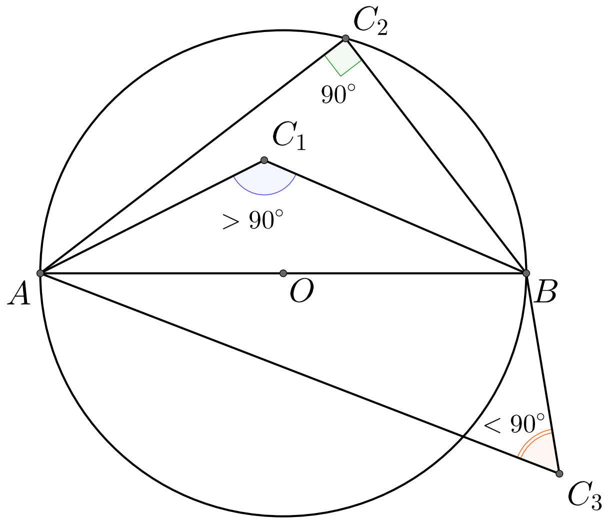
$$\alpha = \frac{\smile BA - \smile CB}{2}$$



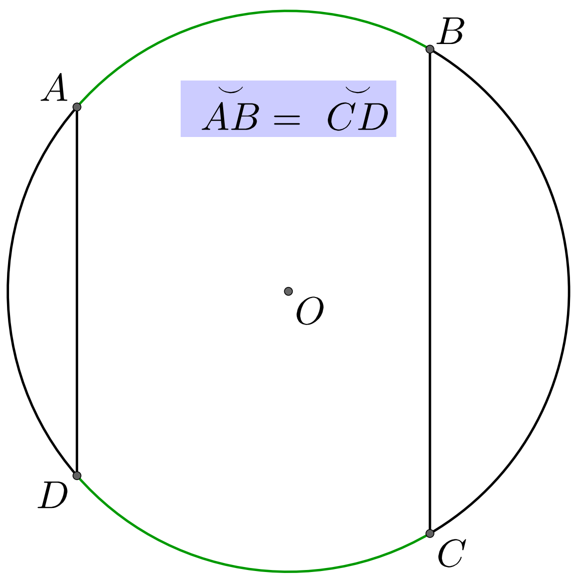
7. Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.



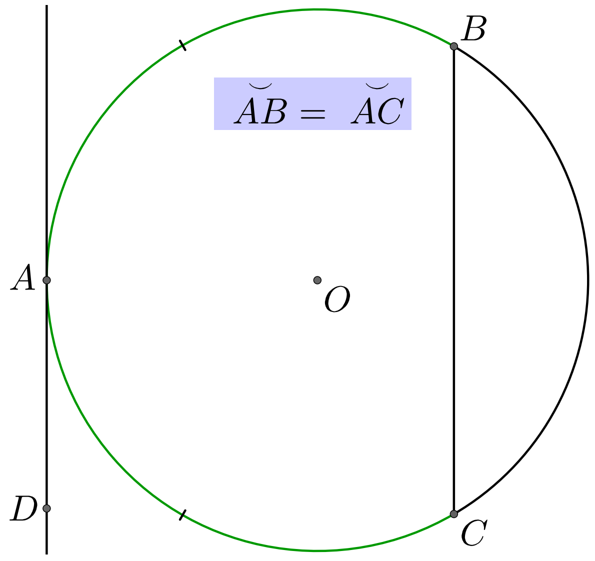
8. На отрезке AB как на диаметре построили окружность. Тогда:
1) Из точек, лежащих строго внутри окружности, диаметр AB виден под тупым углом.
2) Из точек, лежащих на самой окружности, диаметр AB виден под прямым углом.
3) Из точек, лежащих вне окружности, диаметр AB виден под острым углом.



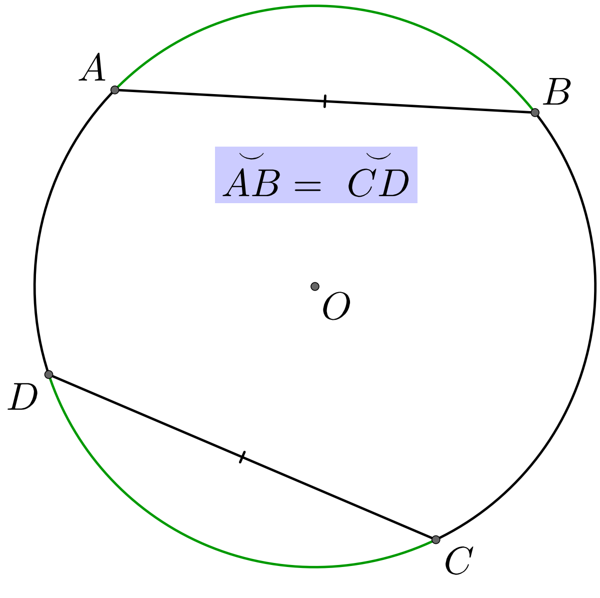
9. Дуги, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.



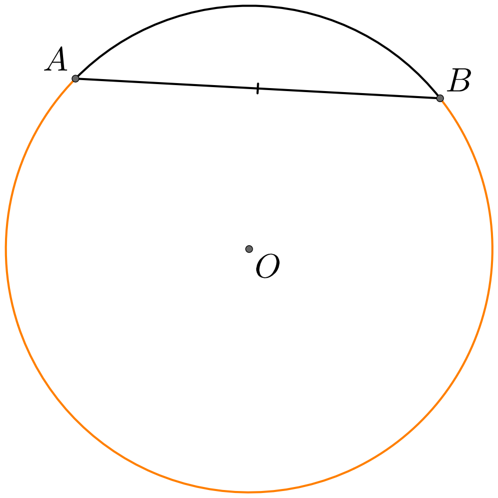
10. Дуги, заключенные между хордой и параллельной ей касательной, равны.

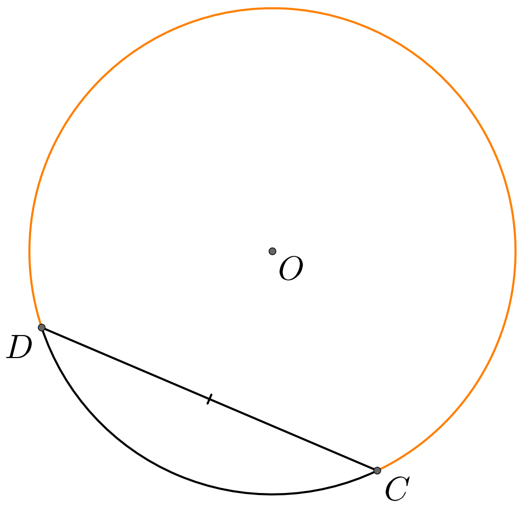


11. Дуги, стягиваемые равными хордами, равны.



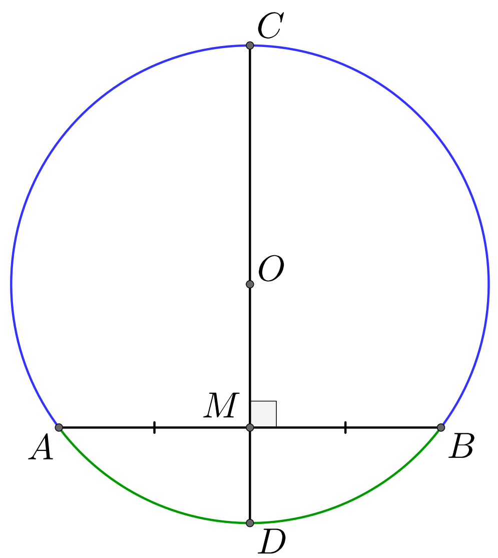
Замечание: Любая хорда стягивает две дуги окружности (например, хорда AB стягивает дуги $\smile{AB}$ и $\smile{BA}$). Тогда, если хорды AB и CD равны, то дуга $\smile{AB}$ равна дуге $\smile{CD}$ и дуга $\smile{BA}$ равна дуге $\smile{DC}$.





12. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит пополам саму хорду и дугу, стягиваемую ею.

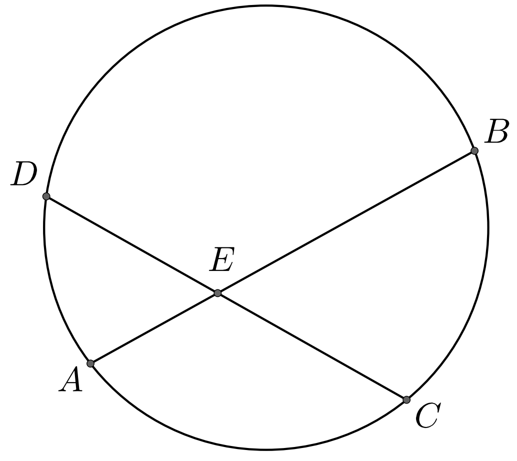
Обратно, диаметр, проходящий через середину хорды перпендикулярен ей.



13. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E, тогда

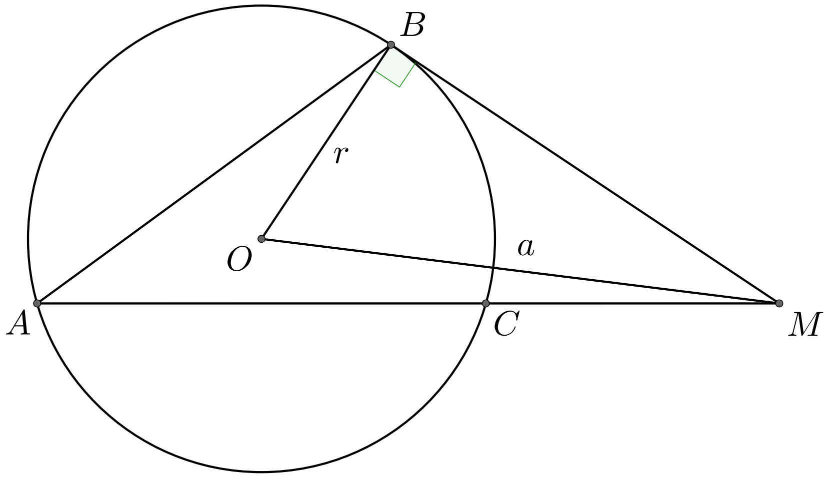
$$AE \cdot EB = DE \cdot EC.$$

$AE \cdot EB = DE \cdot EC$



14. Пусть M – точка вне окружности, a – расстояние от точки M до центра окружности, r – радиус окружности. Пусть BM – касательная к окружности. Секущая из точки M пересекает окружность в точках A и C, тогда

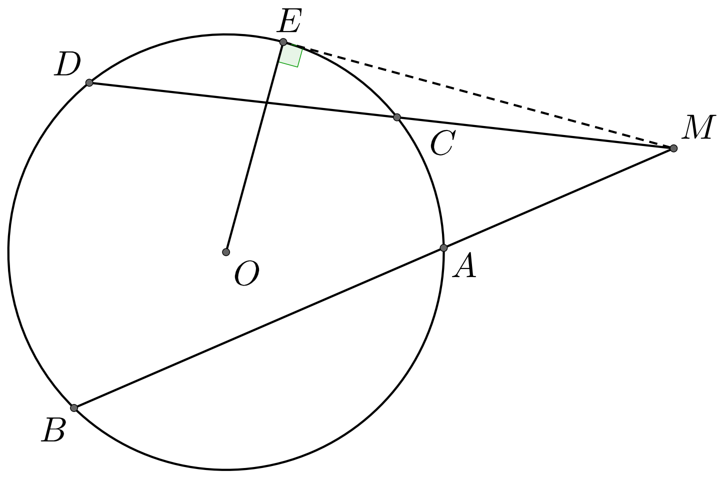
$$MB^2 = MC \cdot MA = a^2 - r^2$$



Замечание: Данное утверждение можно также переформулировать иначе.
Квадрат касательной равен произведению всей секущей на её внешнюю часть.

15. Пусть M – точка вне окружности. ME – касательная к окружности. Из точки M выходят две секущие: первая пересекает окружность в точках A и B, вторая – в точках C и D. Тогда:

$$ME^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

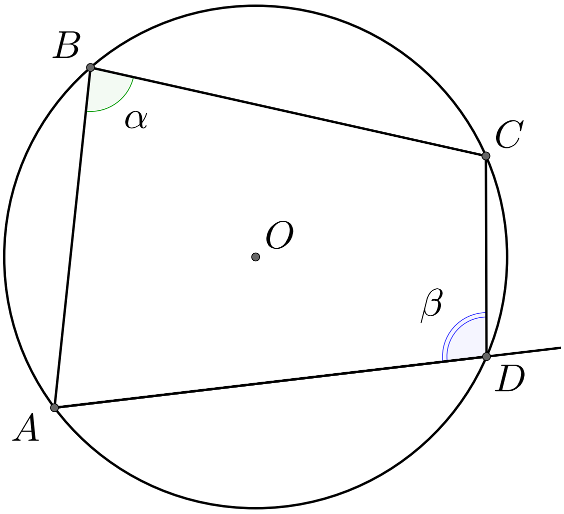


12 Вписанные и описанные четырехугольники

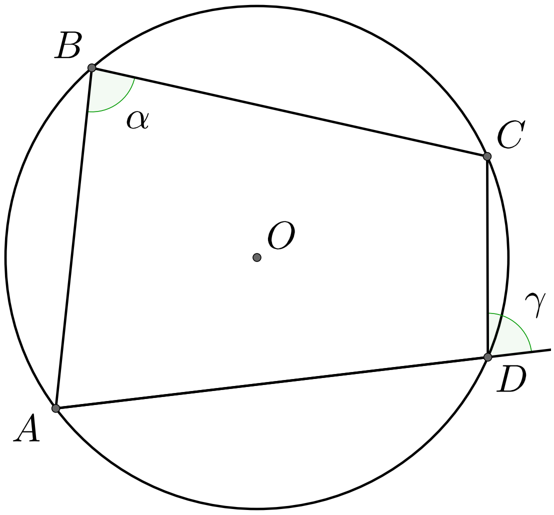
1. **(Первый признак).** Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°.

Другая формулировка: Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда всякий угол равен смежному к своему противоположному.

$\alpha + \beta = 180^\circ \iff ABCD$ – вписанный

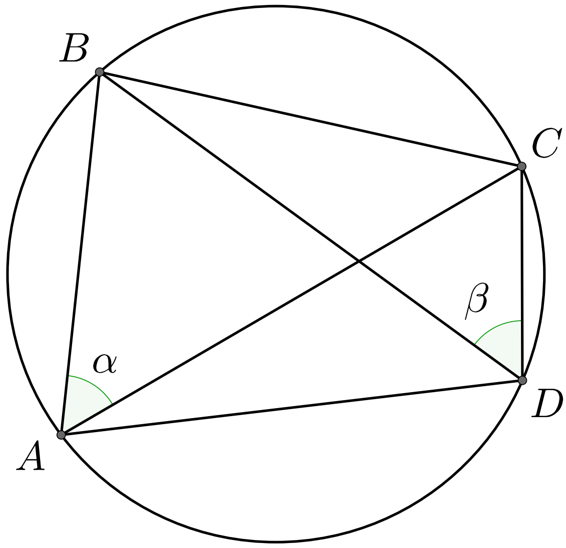


$\alpha = \gamma \iff ABCD$ – вписанный

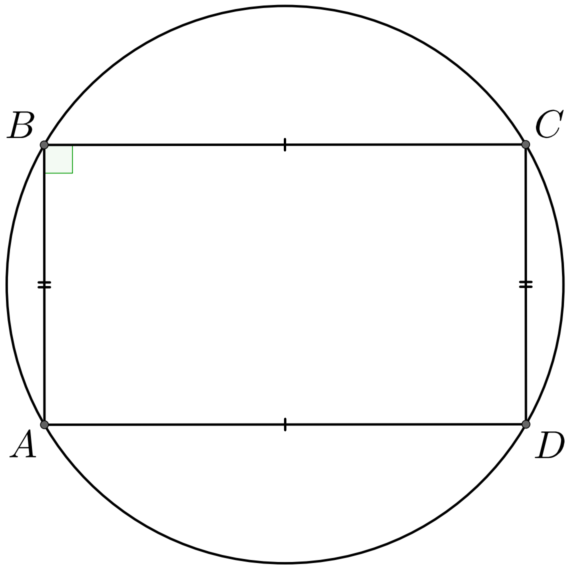


2. **(Второй признак).** Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда углы между диагональю и стороной, опирающиеся на одну сторону, равны.

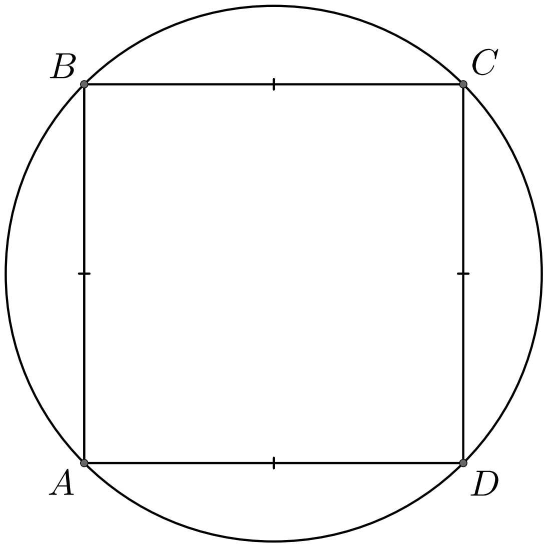
$\alpha = \beta \iff ABCD$ – вписанный



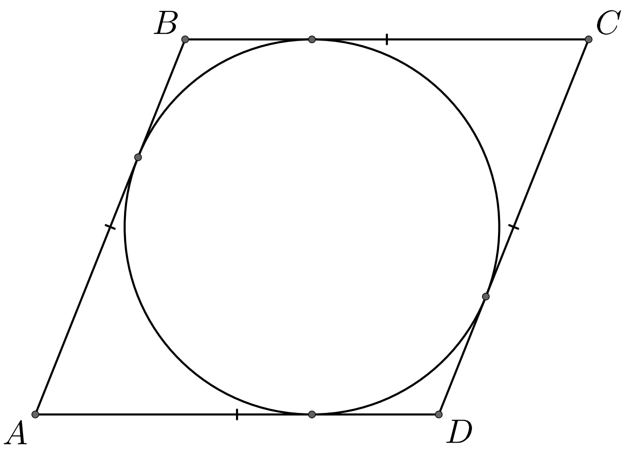
3. Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.



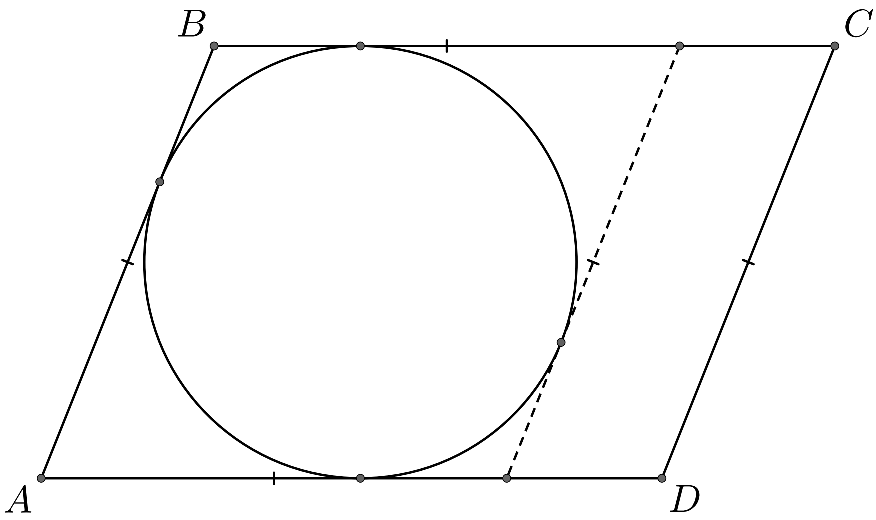
4. Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.



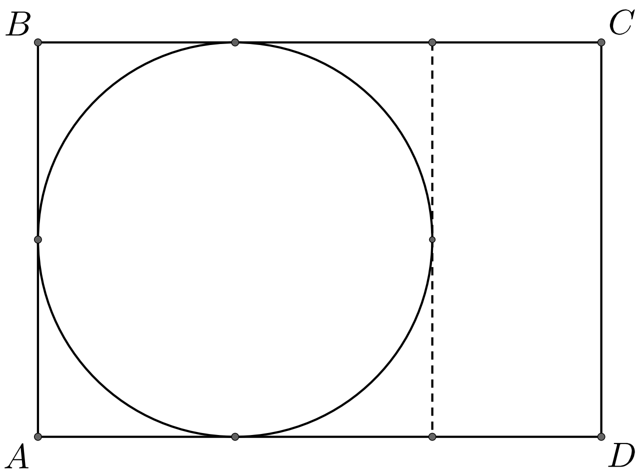
5. В любой ромб можно вписать окружность.



6. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

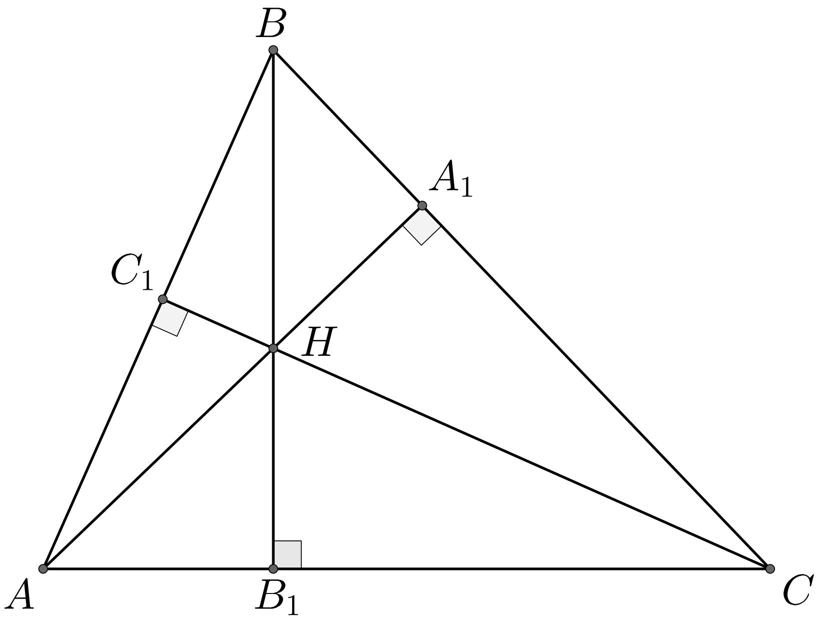


7. В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.

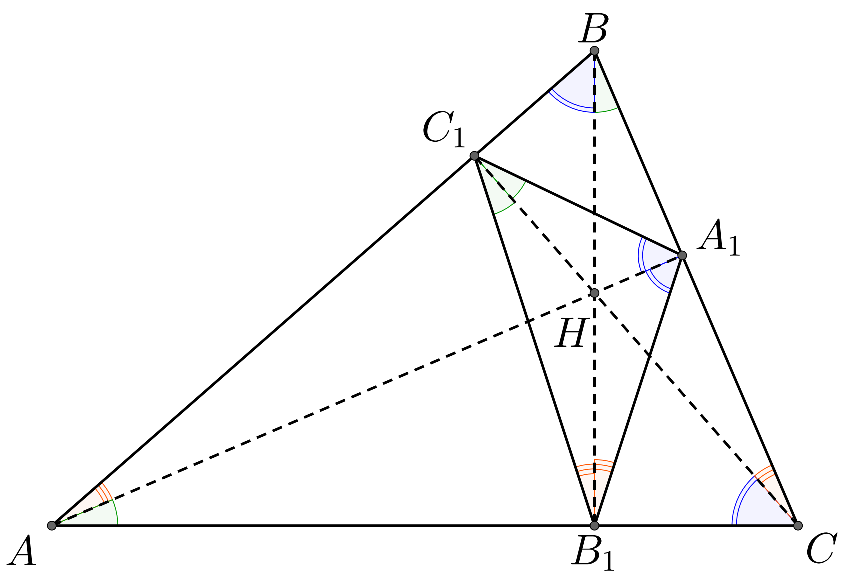


13 Свойства ортоцентра

1. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Тогда вокруг четырёхугольников AC_1HB_1, CB_1HA_1, BC_1HA_1 и AC_1A_1C, BC_1B_1C, AB_1A_1B можно описать окружности.



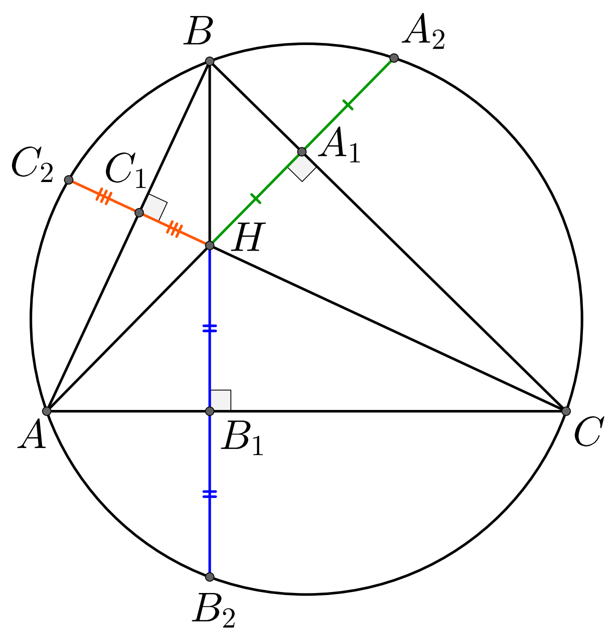
2. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется **ортотреугольником**, а высоты треугольника ABC содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.



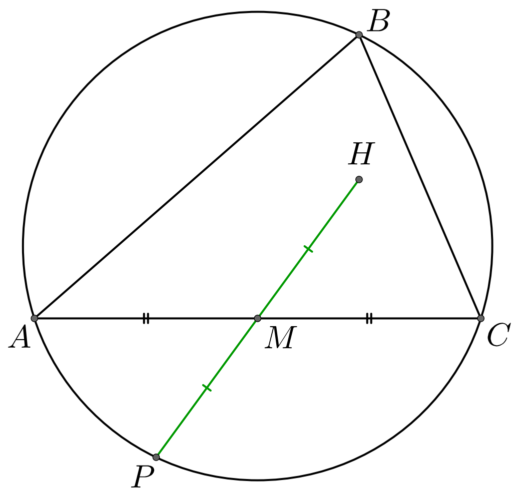
3. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекают описанную вокруг ABC окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Тогда

$$HA_1 = A_1A_2; \quad HB_1 = B_1B_2; \quad HC_1 = C_1C_2,$$

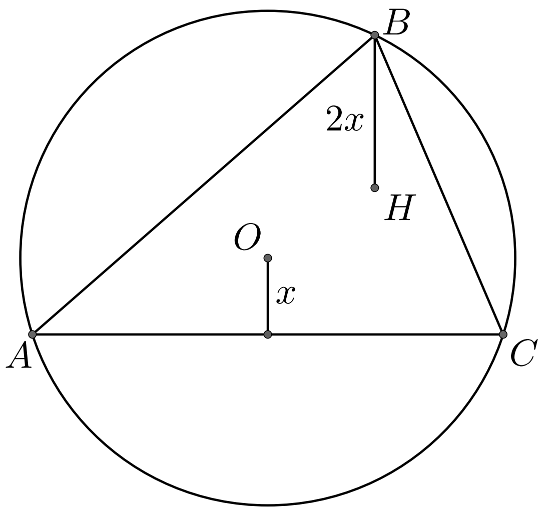
где H – ортоцентр треугольника.



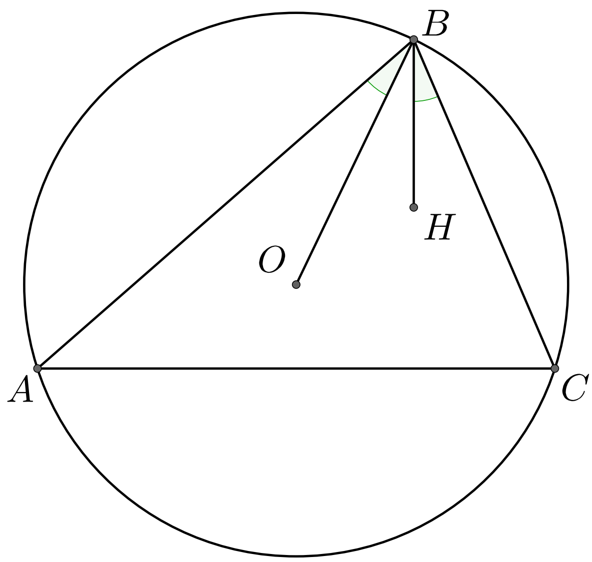
4. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, M – середина стороны AB, P – точка пересечения прямой HM описанной вокруг ABC окружностью, тогда $PM = MH$.



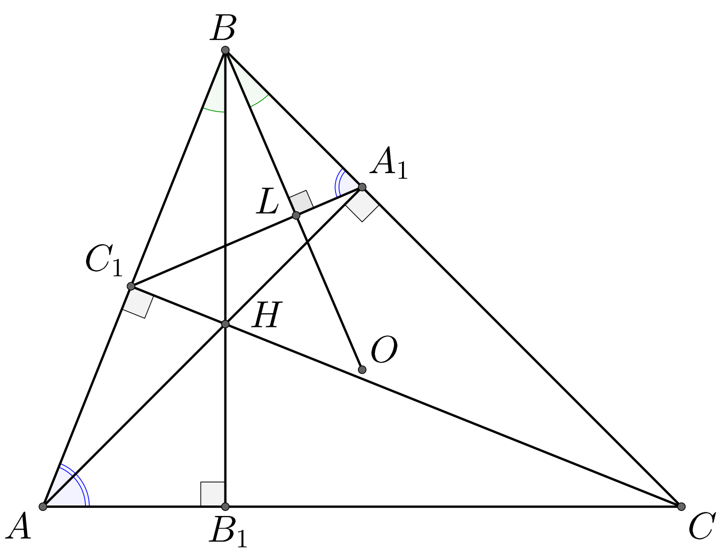
5. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности. Тогда расстояние от точки B до H вдвое больше, чем расстояние от точки O до стороны AC.



6. H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности, тогда $\angle ABO = \angle HBC$.

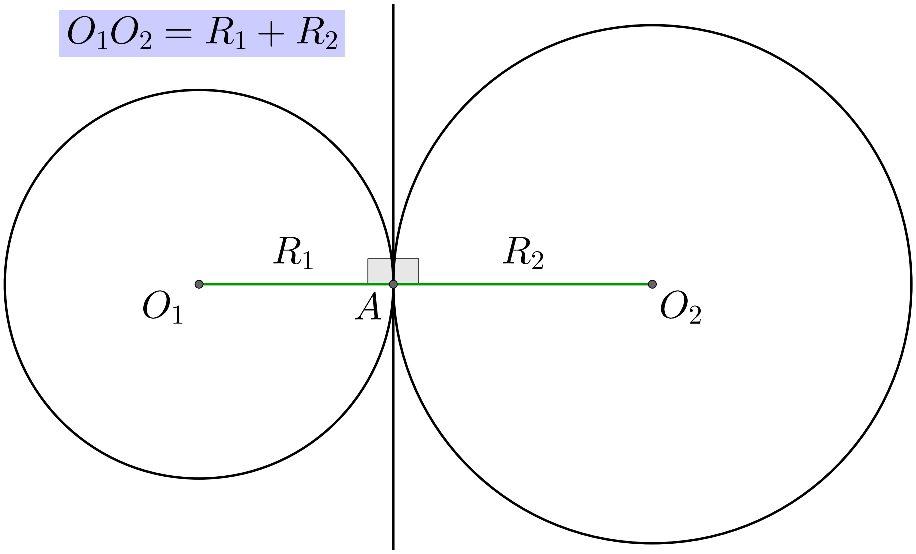


7. H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности, проведены высоты AA_1 и CC_1, тогда $BO \perp A_1C_1$.



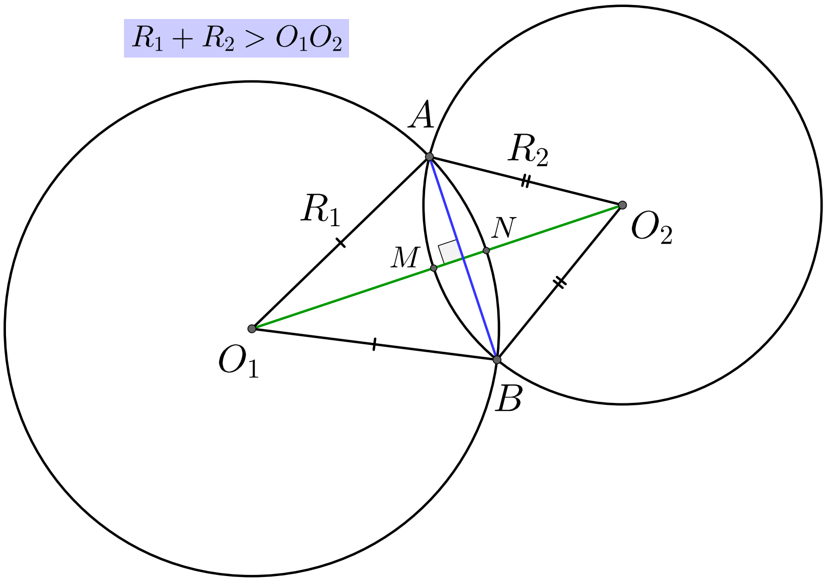
14 Конструкции и теоремы

1. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.



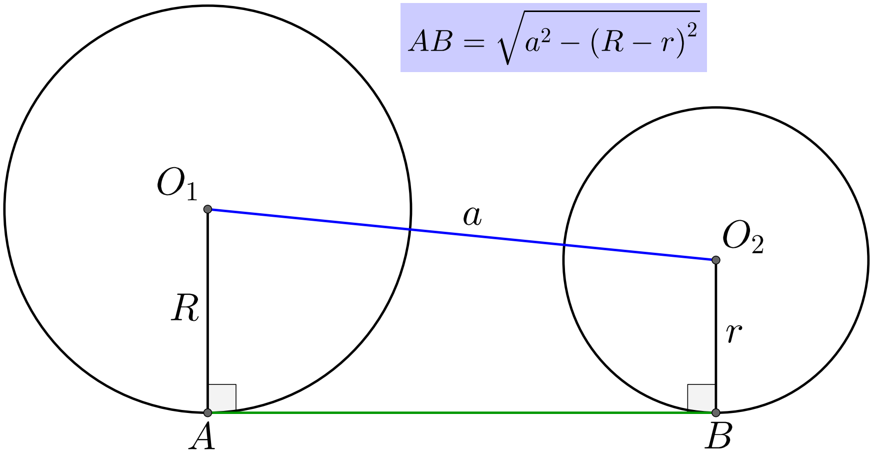
2. Если две окружности пересекаются в двух точках, то расстояние между их центрами меньше суммы их радиусов.

Если O_1, O_2 – центры окружностей, A, B – точки пересечения окружностей, то четырёхугольник AO_1BO_2 – дельтоид ($O_1A = O_1B$, $O_2A = O_2B$, $AB \perp O_1O_2$).

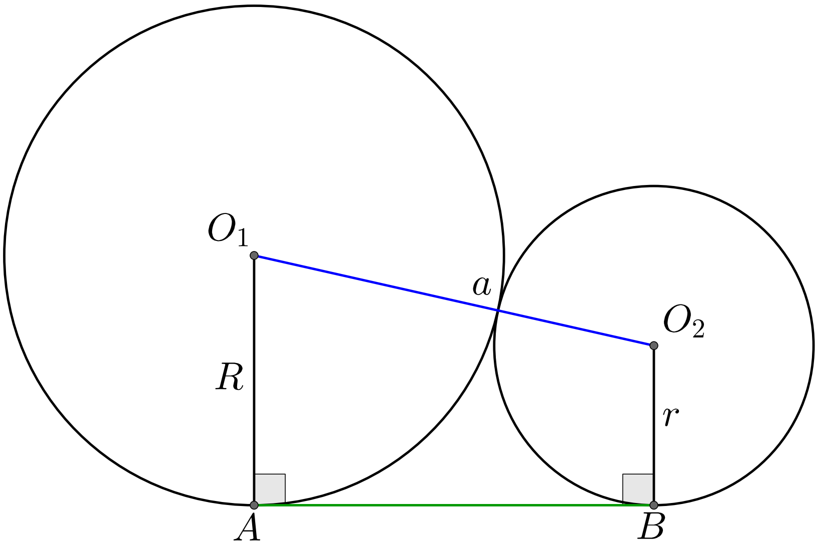


3. Если расстояние между центрами окружностей с радиусами r и R равно a, то отрезок общей внешней касательной, заключённой между точками касания, равен $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$.

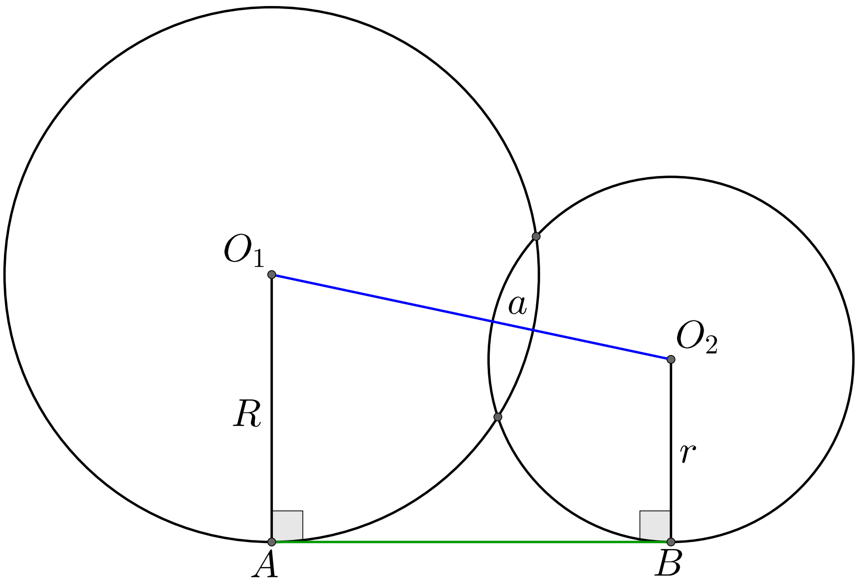
Случай 1:



Случай 2:

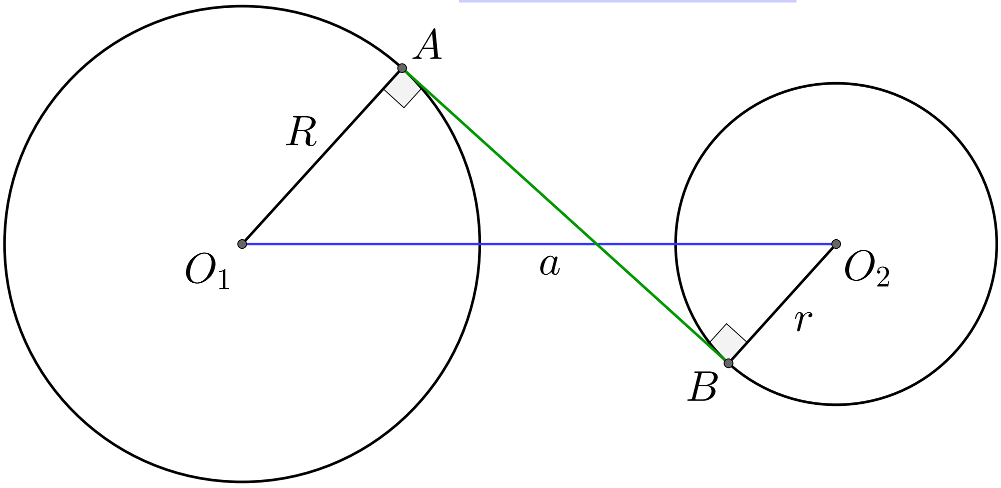


Случай 3:



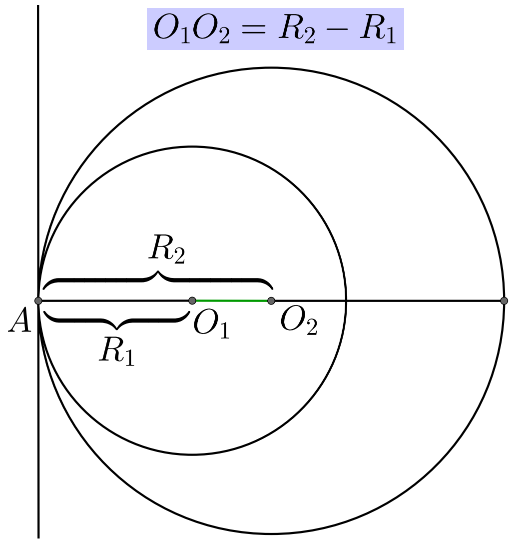
4. Если расстояние между центрами окружностей с радиусами r и R равно a и $a > R + r$ (то есть окружности не пересекаются), то отрезок общей внутренней касательной, заключённой между точками касания, равен:

$$AB = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$$

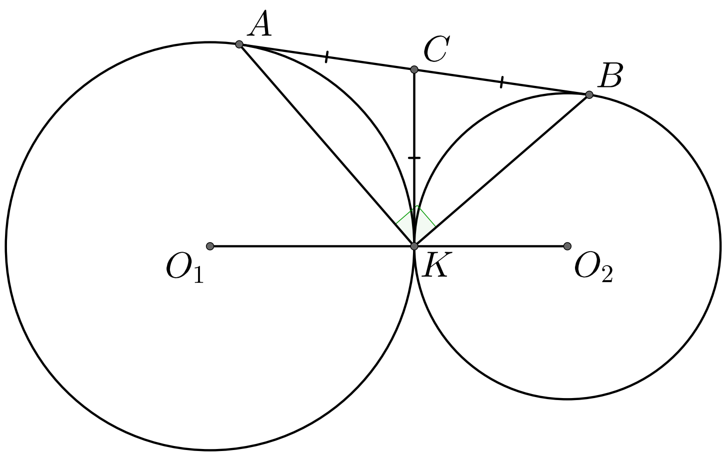


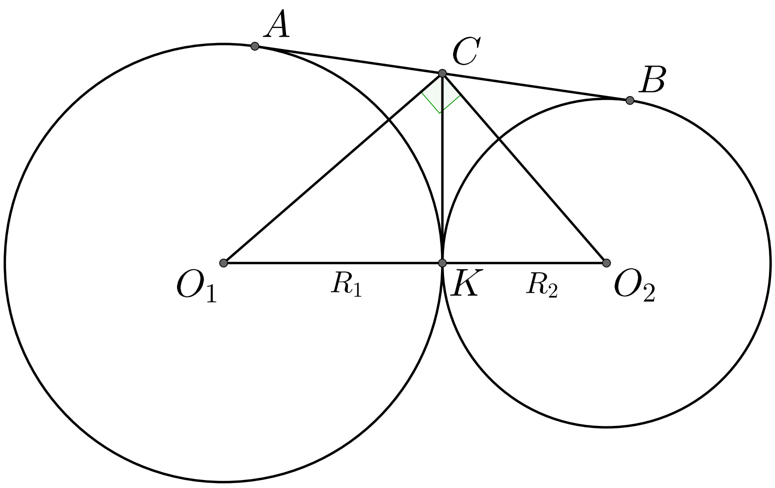
5. Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между их центрами равно разности радиусов этих окружностей.

$$O_1O_2 = R_2 - R_1$$



6. Пусть окружности радиусов R_1 и R_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной (которая проходит через точку K) окружностей, в точке C, то $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

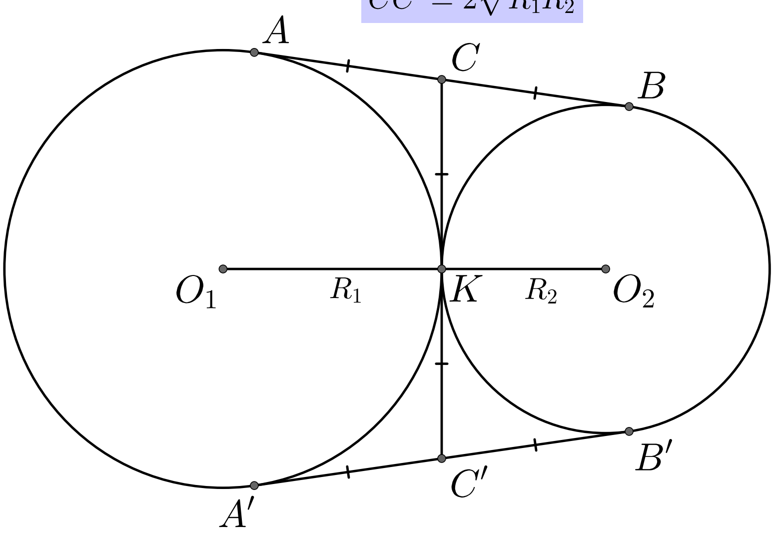




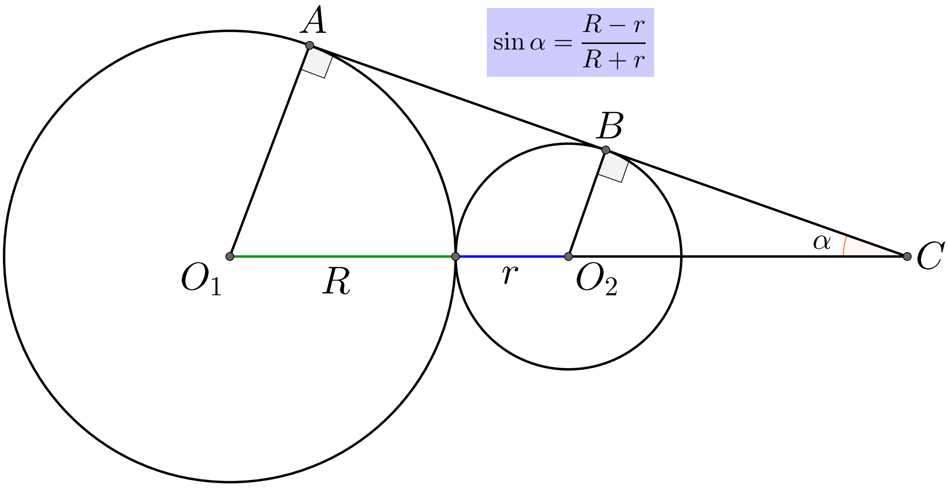
7. Общая внутренняя касательная CK окружностей делит отрезок общей внешней касательной AB пополам;

8. Отрезок AB равен отрезку CC' – общей внутренней касательной, заключённой между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{R_1R_2}$.

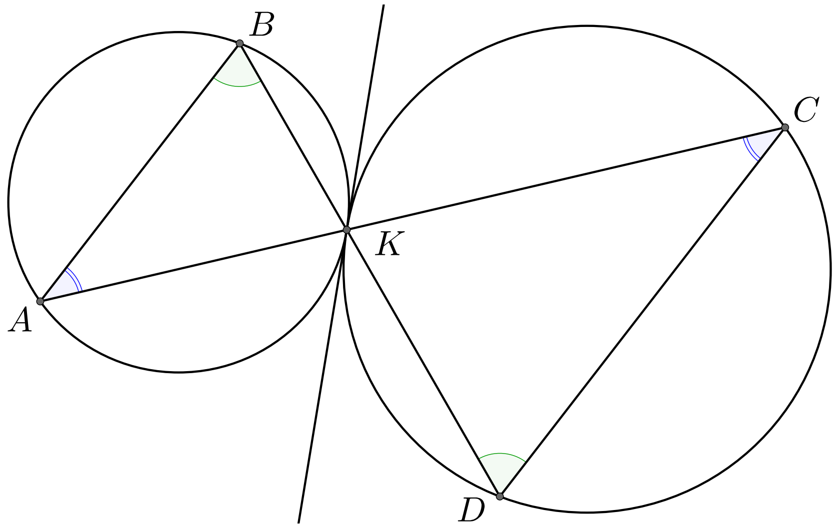
$$CC' = 2\sqrt{R_1R_2}$$



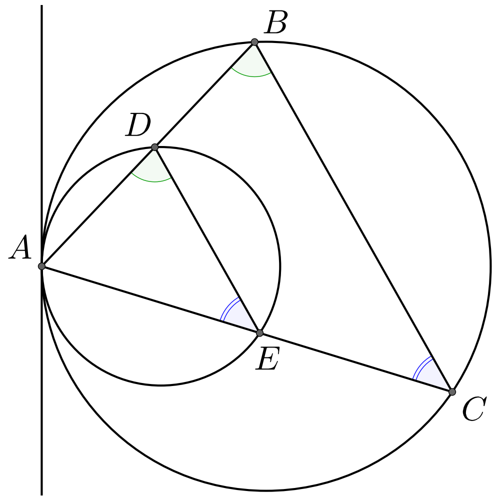
9. Пусть две окружности с радиусами r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом, AB – общая внешняя касательная двух окружностей, C – точка пересечения прямых AB и O_1O_2, $\alpha = \angle O_1CA$, тогда:



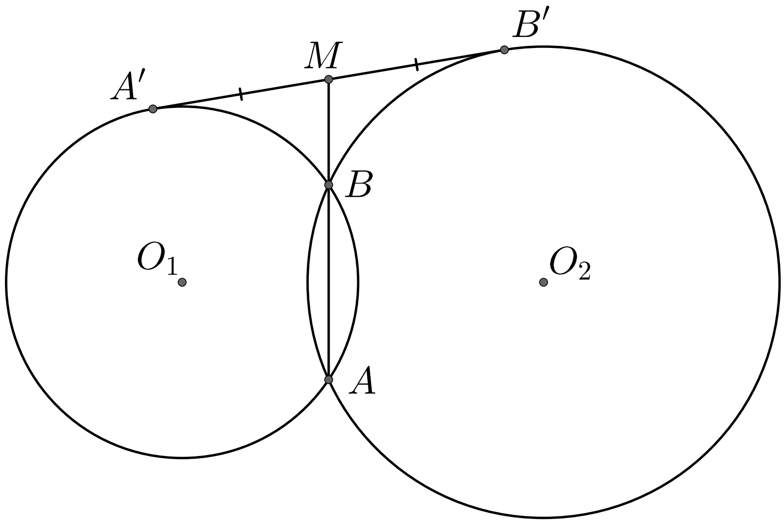
10. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке K, через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках A и C, вторая в точках – B и D. Тогда треугольники AKB и CKD подобны, причём AB и CD параллельны.



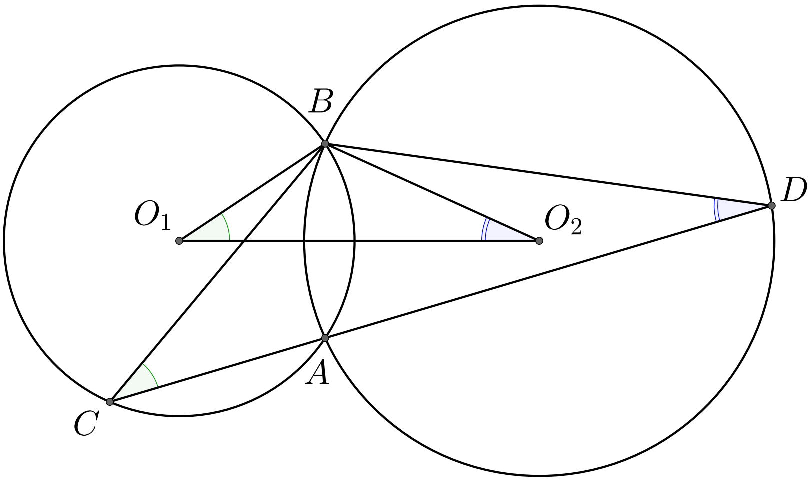
11. Пусть две окружности касаются внутренним образом в точке A, через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках D и B, вторая – в точках E и C, тогда треугольники ABC и ADE подобны.



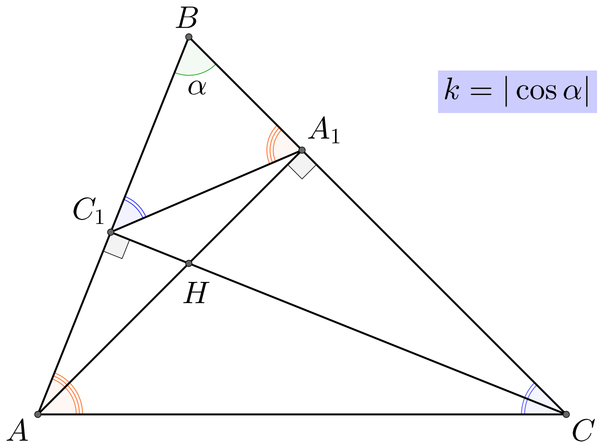
12. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит общую касательную пополам.

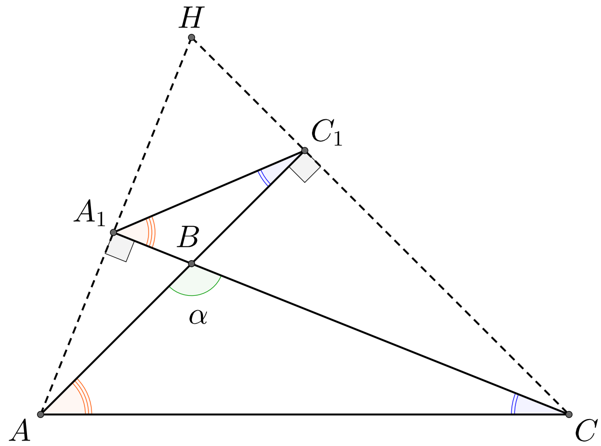

B'
M
A'
B
O_1
O_2
A

13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точка C лежит на первой окружности, прямая AC пересекает вторую окружность в точке D. Тогда треугольники BO_1O_2 и BCD подобны.

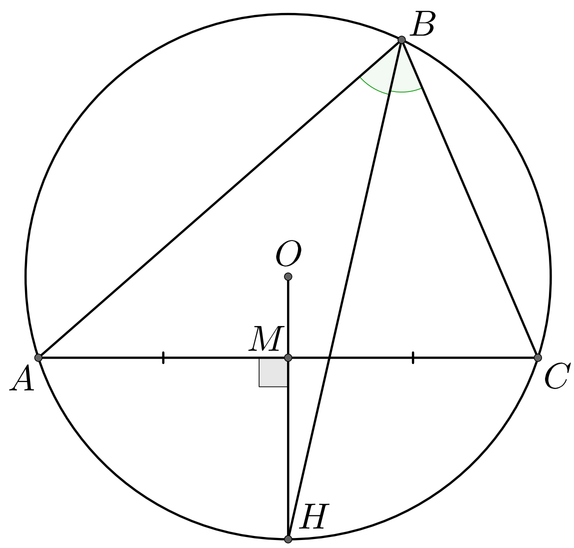


14. Пусть в треугольнике ABC проведены две высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $k = |\cos\alpha|$.

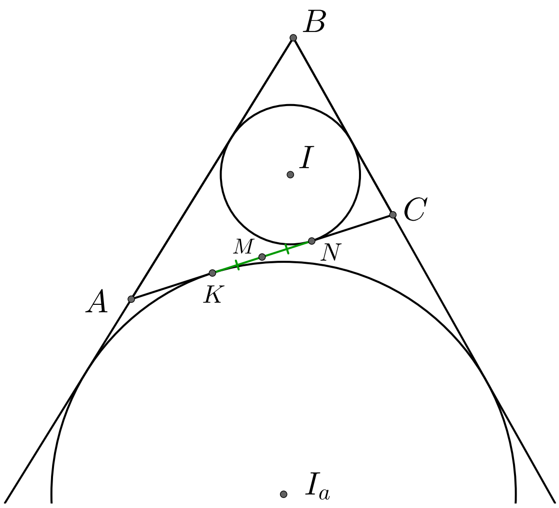




15. Биссектриса угла B треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на описанной вокруг ABC окружности.

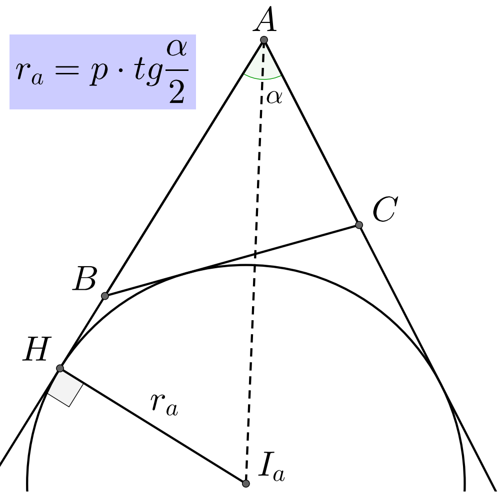


16. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке N, вневписанная окружность касается стороны AC в точке K, тогда середина отрезка AC является серединой отрезка NK.

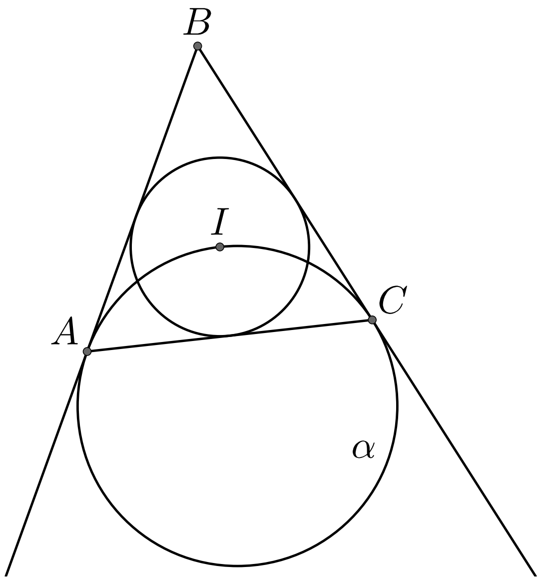


17. Радиус вневписанной окружности можно найти по формуле:

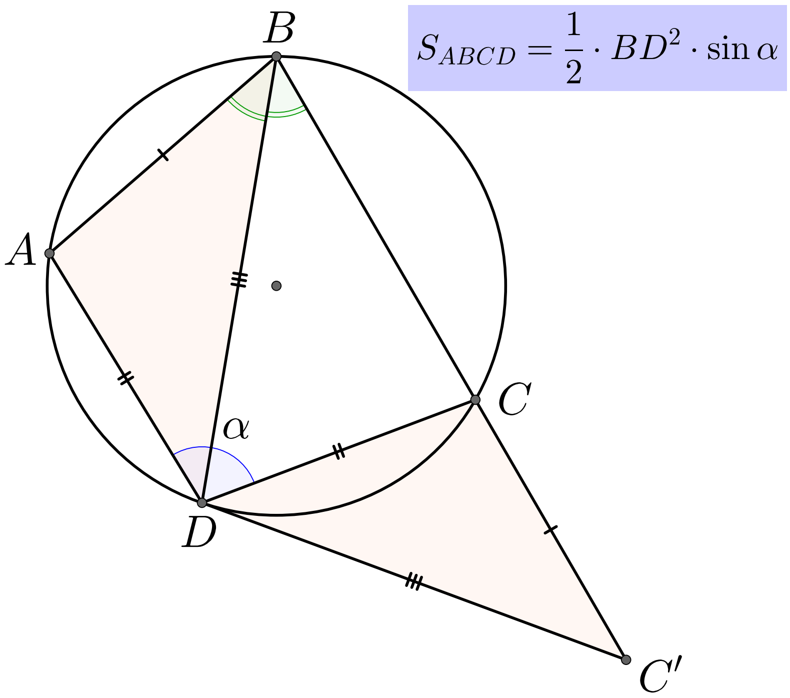
$$r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$



18. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности, касающейся лучей BA и BC в точках A и C.

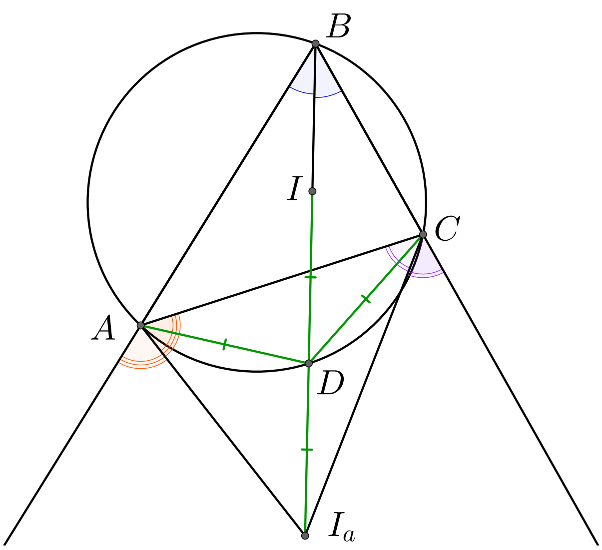


19. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, у которого диагональ является биссектрисой угла ABC, $\alpha = \angle ADC$, тогда площадь данного четырехугольника равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD^2 \sin\alpha$.

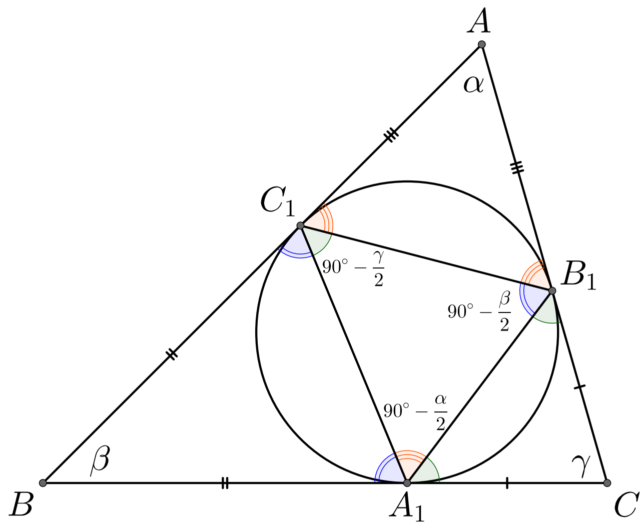


20. **(Лемма о трезубце)**. Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D, I – центр вписанной в ABC окружности, а I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, тогда

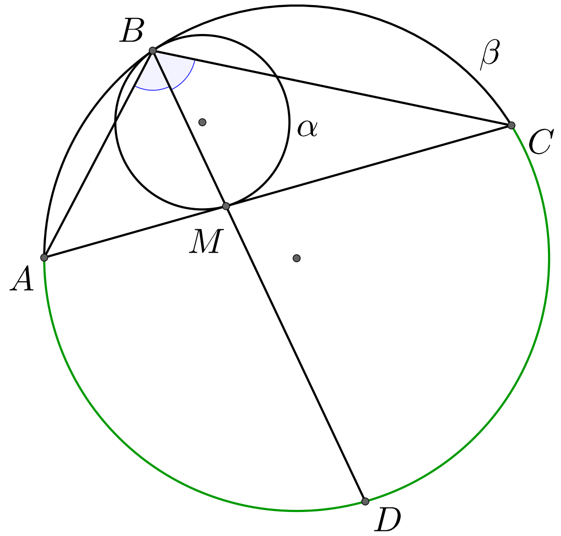
$$AD = DC = ID = I_aD.$$



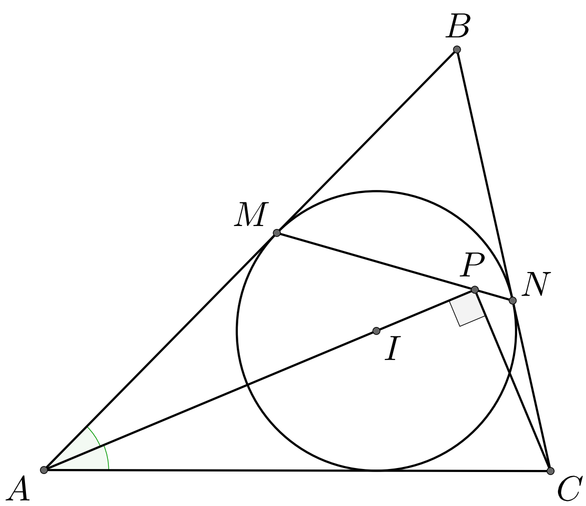
21. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной в треугольник окружности (A_1 лежит напротив A, B_1 лежит напротив B, C_1 лежит напротив C). Тогда в треугольнике $A_1B_1C_1$ имеем, что $\angle A_1 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B_1 = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, $\angle C_1 = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$.



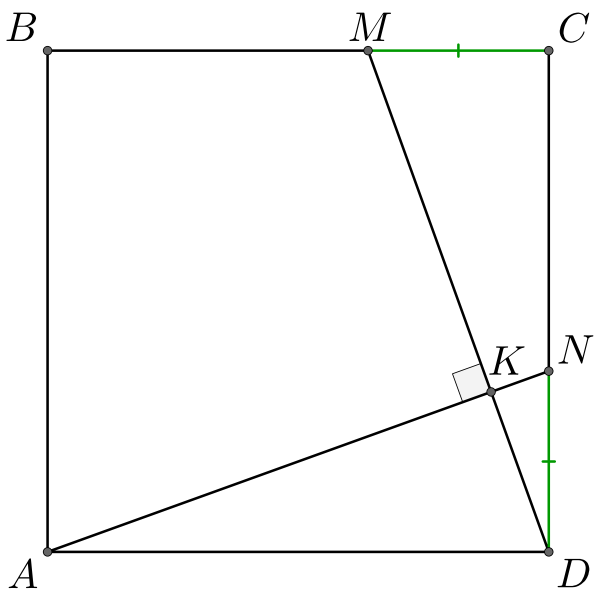
22. **(Лемма Архимеда)** Окружности α и β касаются внутренним образом в точке B, окружность α касается хорды AC окружности β в точке M, BM пересекает окружность β в точке D. Тогда прямая BM является биссектрисой угла ABC, а точка D делит дугу $\overset{\frown}{CA}$ пополам.



23. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок MN в точке P. Тогда $\angle APC = 90^\circ$.



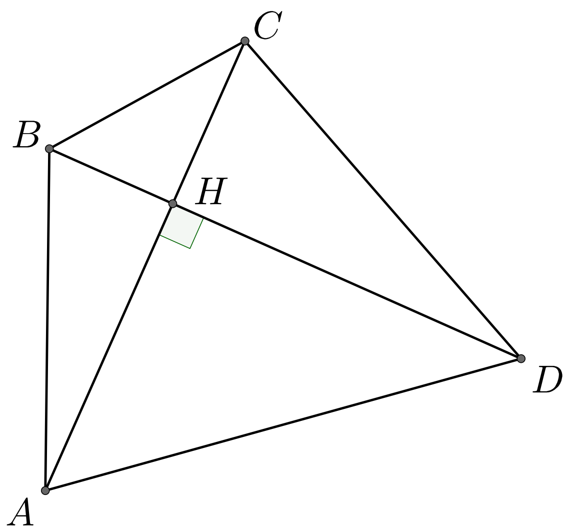
24. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N соответственно, так что $MC = ND$, тогда $AN \perp DM$.



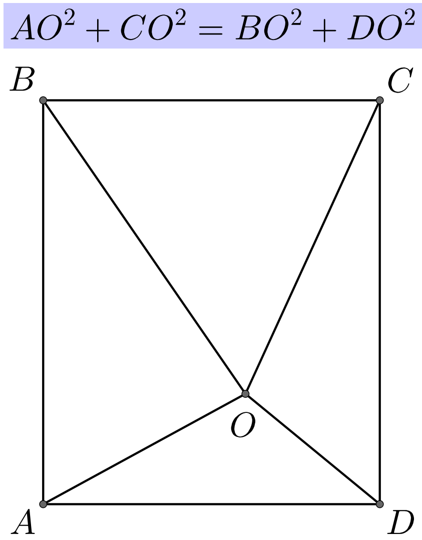
25. $ABCD$ – четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями тогда и только тогда, когда

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

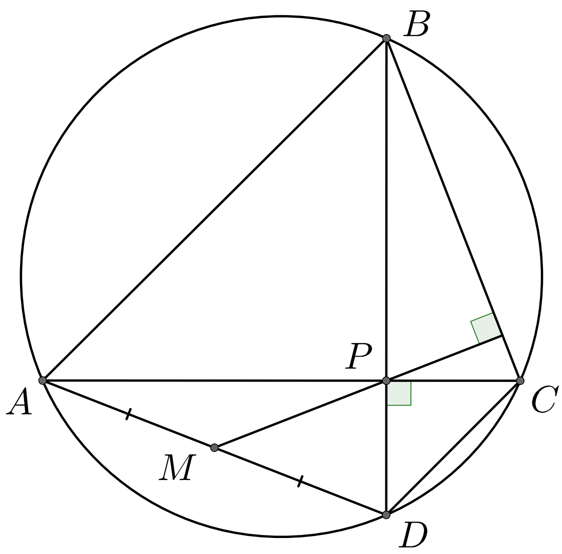
$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$



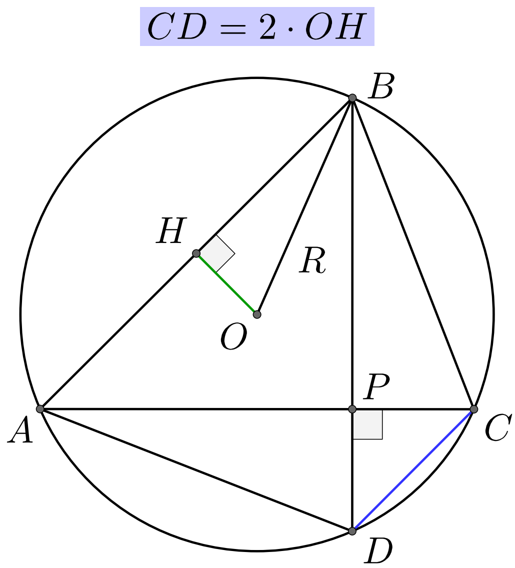
26. $ABCD$ – прямоугольник, точка O лежит внутри данного прямоугольника, тогда
$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2.$$



27. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, тогда прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину одной из сторон четырёхугольника, перпендикулярна противоположной ей стороне.



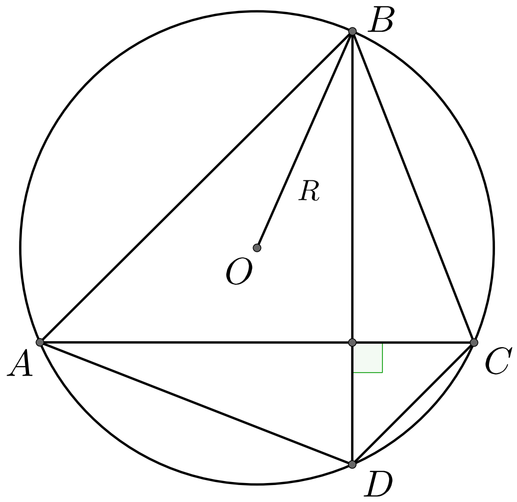
28. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD.



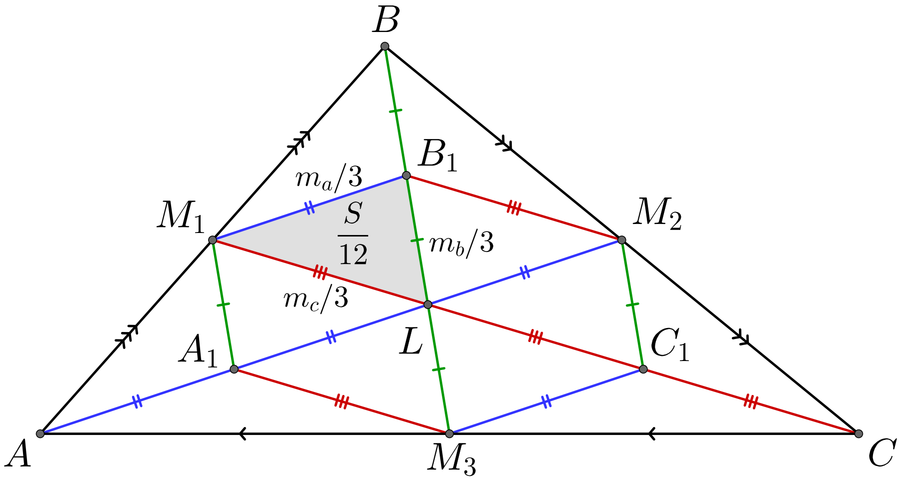
29. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2.$$

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$

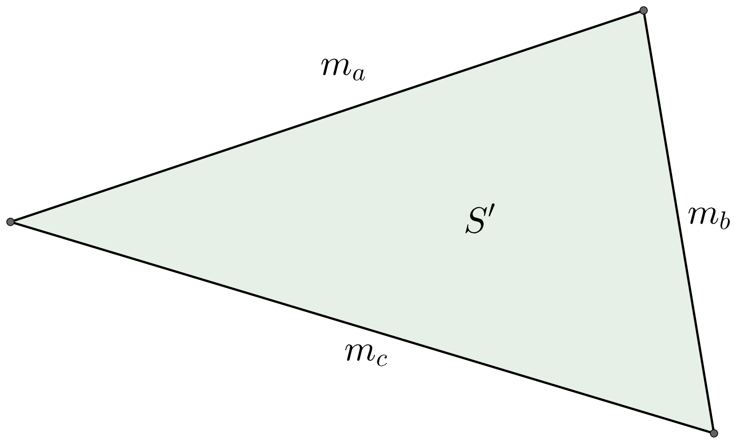


30. Пусть L – точка пересечения медиан CM_1, AM_2 и BM_3 треугольника ABC. A_1, B_1, C_1 – середины отрезков AL, BL, CL соответственно. Тогда треугольник ABC делится на 12 равновеликих треугольников следующим образом:



31. Построим треугольник со сторонами, равными длинам медиан треугольника ABC (m_a, m_b, m_c – длины этих медиан, $m = (m_a + m_b + m_c)/2$). По формуле Герона данный треугольник имеет площадь:

$$S' = \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$



Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

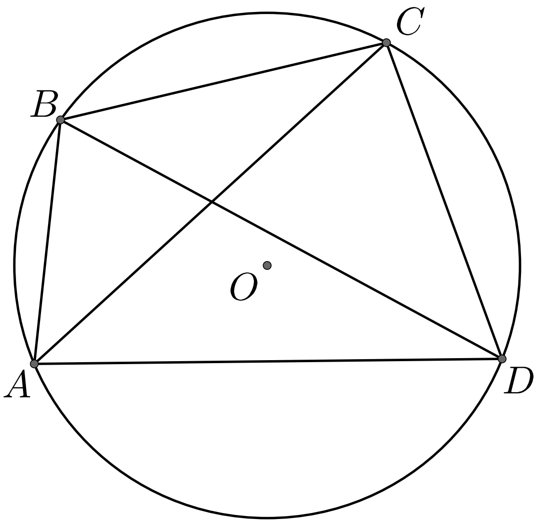
32. **(Теорема Птолемея).** Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

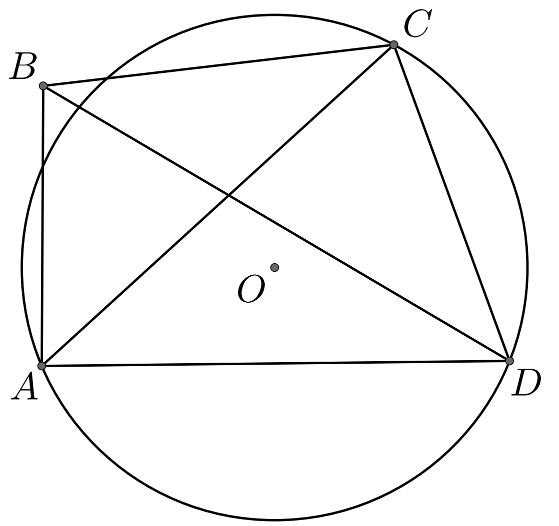
(Неравенство Птолемея). Если же четырёхугольник не является вписанным, то выполнено неравенство

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$$

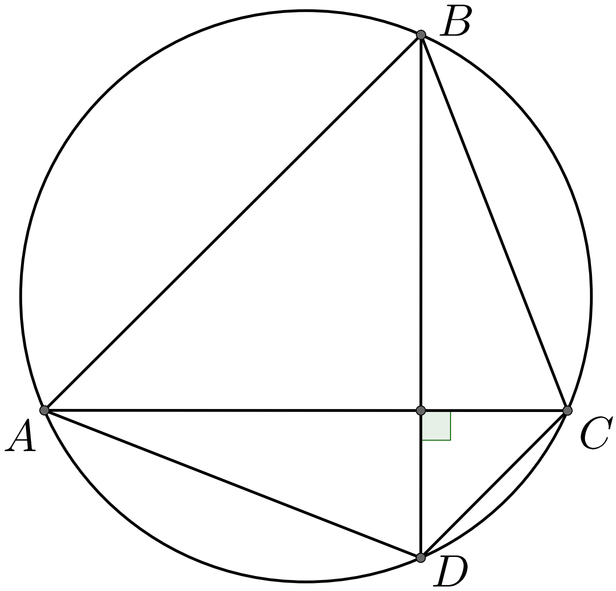


33. **(Следствие из теоремы Птолемея).** Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда

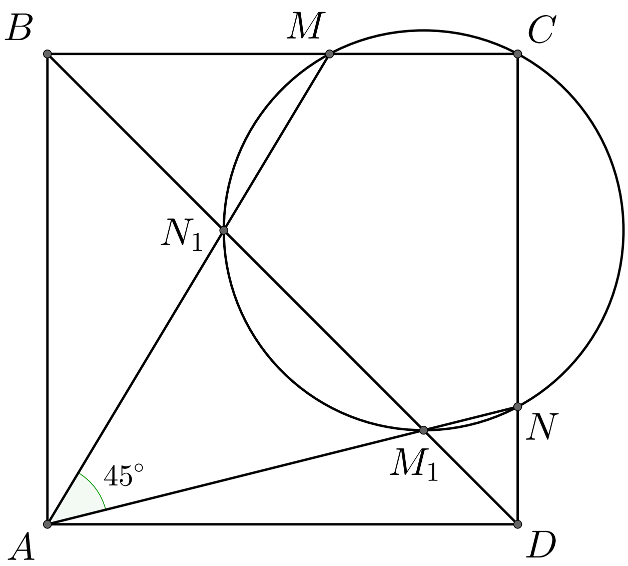
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

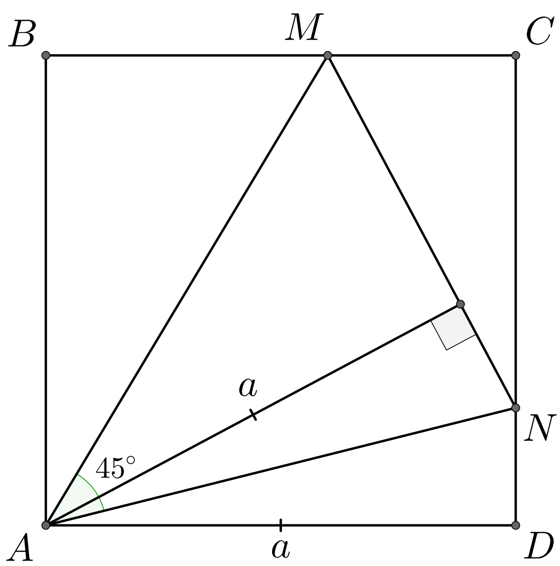
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$$



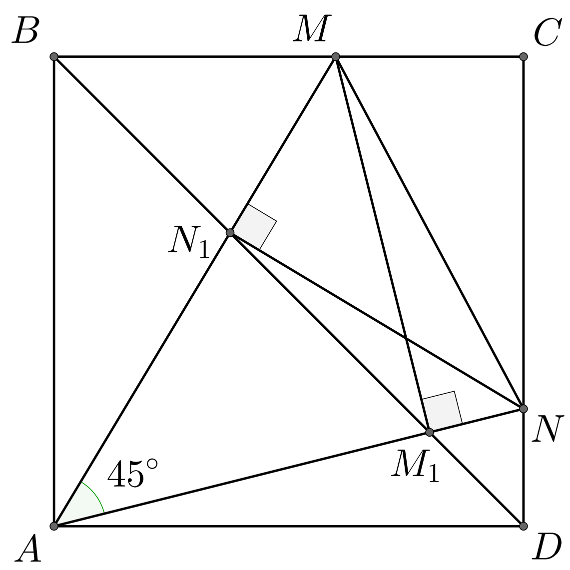
34. $ABCD$ – квадрат, точка M – лежит на стороне BC, N – лежит на стороне CD, $\angle MAN = 45°$, диагональ BD пересекает отрезки AM и AN в точках N_1 и M_1 соответственно. Тогда через точки M, M_1, N, N_1, C можно провести окружность.



35. $ABCD$ – квадрат, точка M – лежит на стороне BC, N – лежит на стороне CD, $\angle MAN = 45°$. Тогда расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.



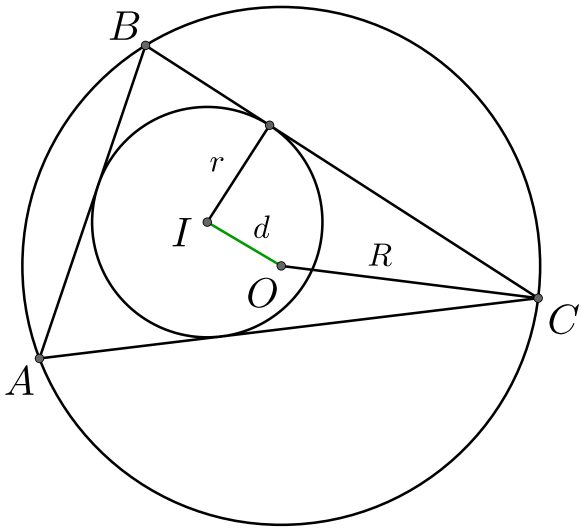
36. $ABCD$ – квадрат, точка M – лежит на стороне BC, N – лежит на стороне CD, $\angle MAN = 45°$, диагональ BD пересекает отрезки AM и AN в точках N_1 и M_1 соответственно. Тогда прямые MM_1 и NN_1 являются высотами треугольника AMN.



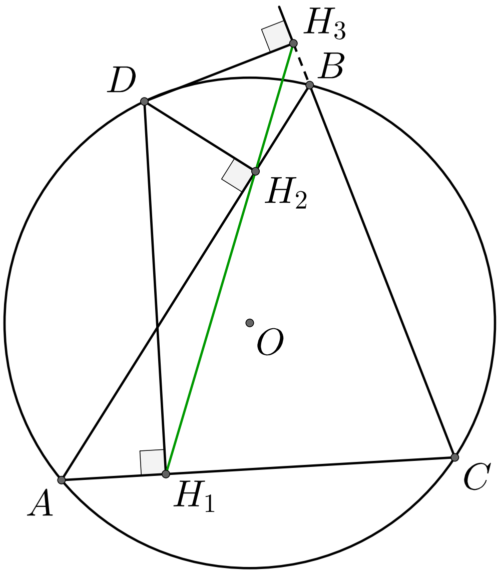
37. Пусть r – радиус вписанной в треугольник окружности, R – радиус описанной вокруг треугольника окружности, d – расстояние между центрами этих окружностей, тогда выполняется равенство:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

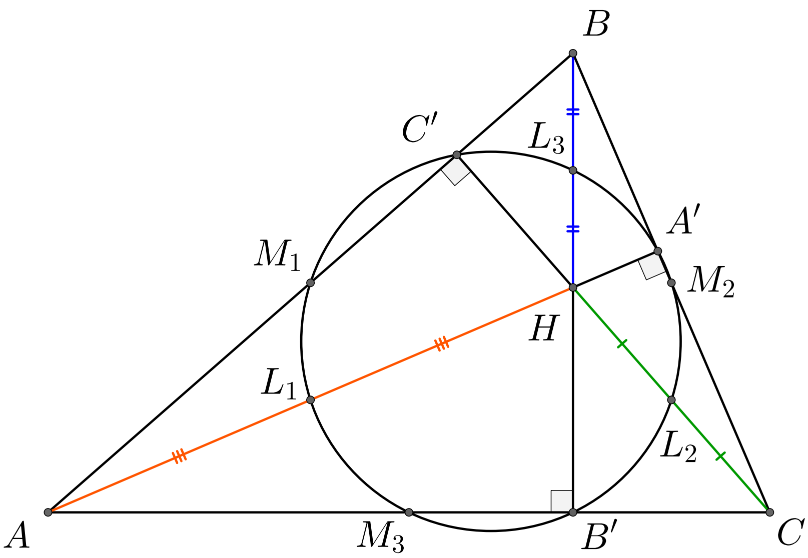
$d^2 = R^2 - 2Rr$



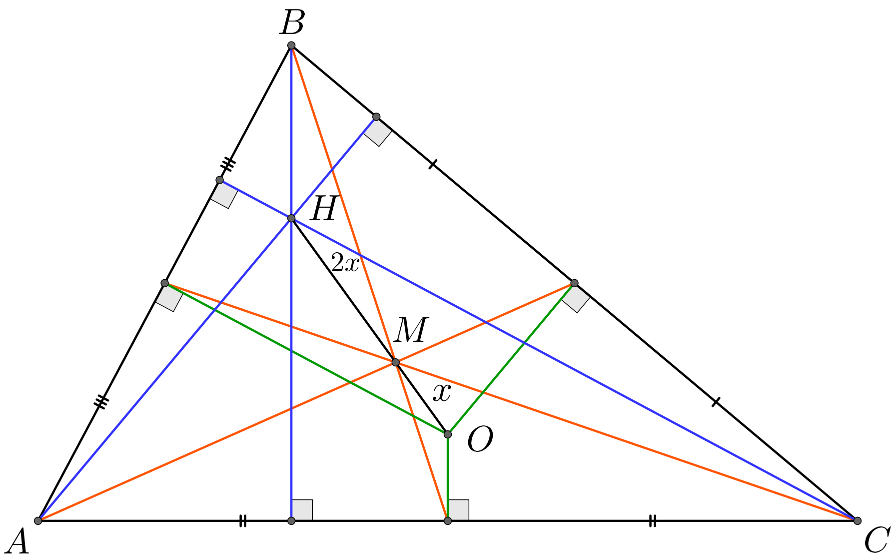
38. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой. Эта прямая называется **прямой Симсона**.



39. **(Окружность девяти точек).** Пусть H – ортоцентр треугольника ABC; A', B', C' – точки пересечения высот со сторонами треугольника; M_1, M_2, M_3 – середины сторон треугольника; L_1, L_2, L_3 – середины отрезков AH, CH, BH соответственно. Тогда через точки A', B', C', M_1, M_2, M_3, L_1, L_2, L_3 можно провести окружность.



40. **(Прямая Эйлера).** Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, M – центроид (точка пересечения медиан) треугольника, H – ортоцентр треугольника, тогда точки O, M, H лежат на одной прямой и $OM : MH = 1 : 2$.



15 Доказательства

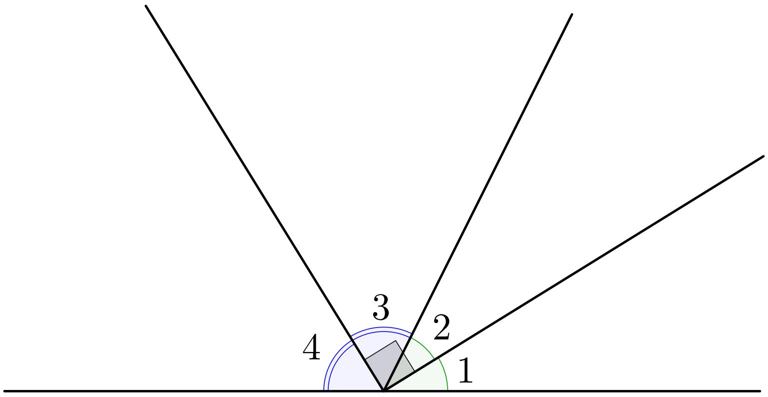
15.1 Углы

2. Нам известно, что

$$\angle 1 = \angle 2;$$
$$\angle 3 = \angle 4;$$

Тогда получаем:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ \implies \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ. \quad \square$$

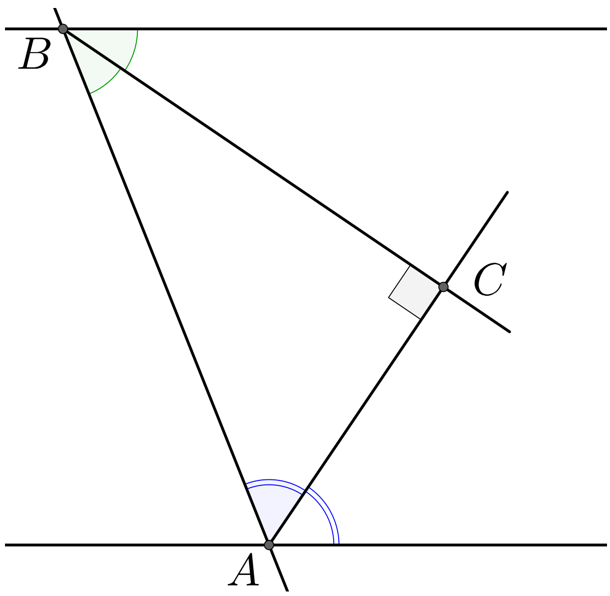


5. *Доказательство 1.* Углы $\angle A$ и $\angle B$ – внутренние односторонние, поэтому

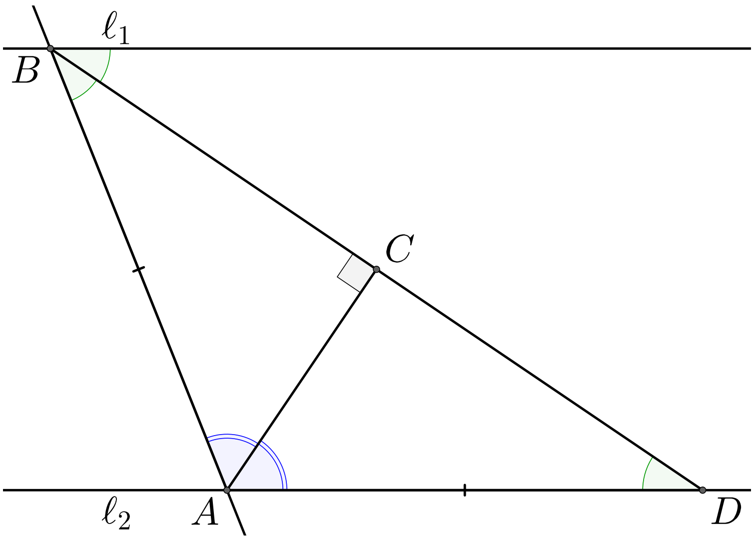
$$\angle A + \angle B = 180^\circ \implies \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ.$$

Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad \square$$

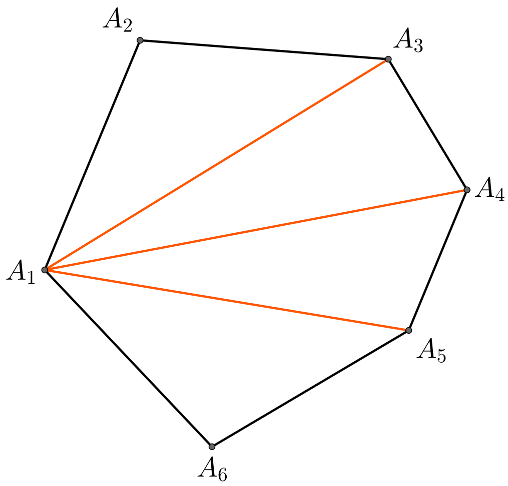


Доказательство 2. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 две параллельные прямые, на которых лежат точки B и A соответственно. Точка D – пересечение биссектрисы угла B с прямой ℓ_2. Угол между прямыми ℓ_2 и BD равен углу между ℓ_1 и BD (так как эти углы являются накрест лежащими), при этом BD – биссектриса угла B, поэтому угол между AB и BD равен углу между ℓ_1 и BD. Отсюда следует, что $\angle ADB = \angle DBA$, значит треугольник ABD – равнобедренный, поэтому биссектриса угла A также является высотой, то есть биссектрисы углов A и B перпендикулярны. $\square$



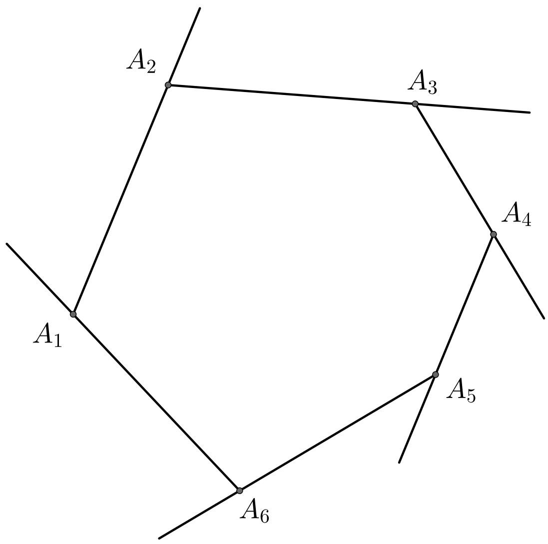
6. Проведём всевозможные диагонали, проходящие через точку A_1. Всего таких диагоналей $n-3$ штуки (так как A_1A_2 и A_1A_n – рёбра многоугольника). Наш многоугольник разбивается на $n-2$ треугольника, значит сумма всех углов многоугольника равна сумме всех углов этих треугольников. Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому

$$\angle A_1 + \ldots + \angle A_n = 180°(n-2). \quad \square$$



7. Углы, смежные углам нашего многоугольника, будут равны

$$180° - \angle A_1, \ldots, 180° - \angle A_n$$



Значит сумма внешних углов n-угольника равна:

$$(180^\circ - \angle A_1) + \ldots + (180^\circ - \angle A_n) = n \cdot 180^\circ - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ. \quad \square$$

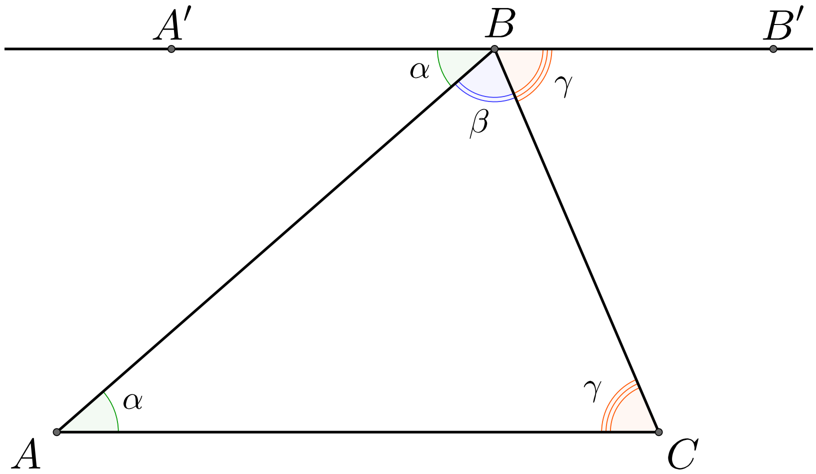
15.2 Треугольники общего вида

1. Проведём через точку B прямую, параллельную, AC. На полученной прямой отметим, по разные стороны от B, точки A' и B'. Тогда получаем, что

$$\angle ABA' = \angle CAB = \alpha \quad \text{и} \quad \angle CBB' = \angle BCA = \gamma,$$

значит,

$$\angle ABA' + \angle ABC + \angle CBB' = \alpha + \beta + \gamma = \angle A'BB' = 180^\circ. \quad \square$$



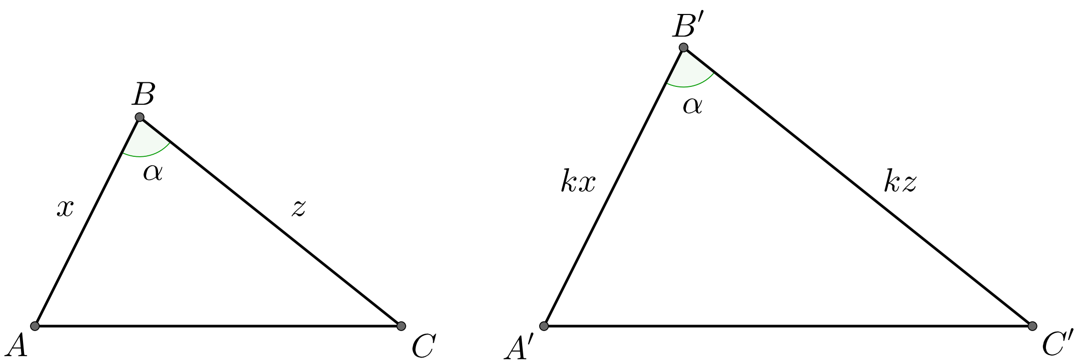
9. Пусть $\angle ABC = \angle A'B'C' = \alpha$ и k – коэффициент подобия треугольников $A'B'C'$ и ABC, значит,

$$S_1 = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} xz \cdot \sin\alpha.$$

$$S_2 = S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'C' \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} k^2 xz \cdot \sin\alpha.$$

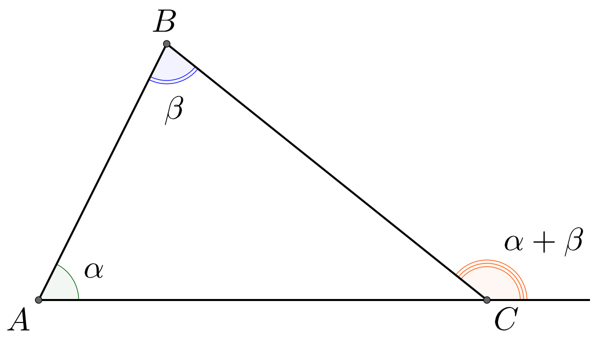
поэтому получаем:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} k^2 xz \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} xz \cdot \sin\alpha} = k^2. \quad \square$$

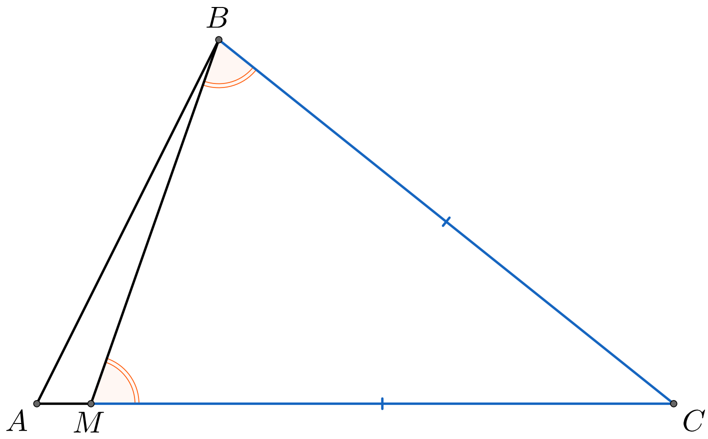


10. Действительно, $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$, так как сумма углов треугольника равна 180°. При этом угол, смежный углу $\angle ACB$, равен

$$180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta. \quad \square$$



11. На стороне AC отметим точку M так, что $CM = CB = a$. Мы можем так сделать, потому что $AC = b > a = CB$.

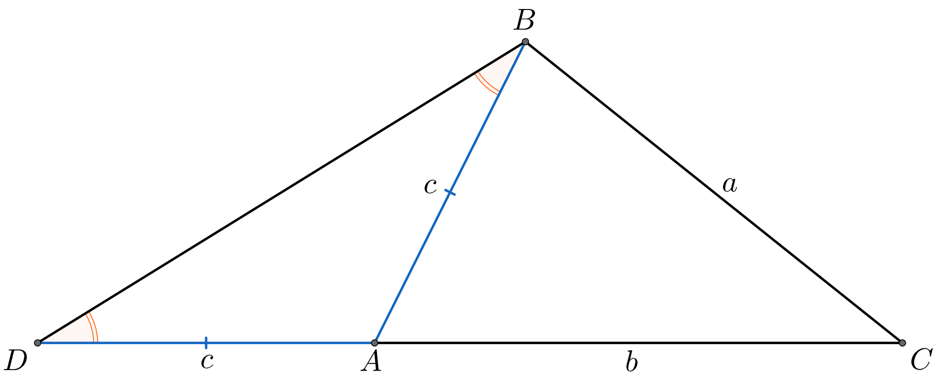


Мы получили равнобедренный треугольник CMB. Заметим, что $\angle ABC > \angle MBC$ и $\angle BMC$ – внешний угол для треугольника ABM, значит $\angle BMC > \angle BAC$. Так как $\angle MBC = \angle BMC$, то $\angle ABC > \angle BAC$. Аналогично мы можем доказать, что $\angle ABC > \angle BCA$. $\square$

Замечание: В частности, мы показали, что напротив большей стороны лежит больший угол.

Замечание: Также верно и обратное: напротив большего угла лежит большая сторона.

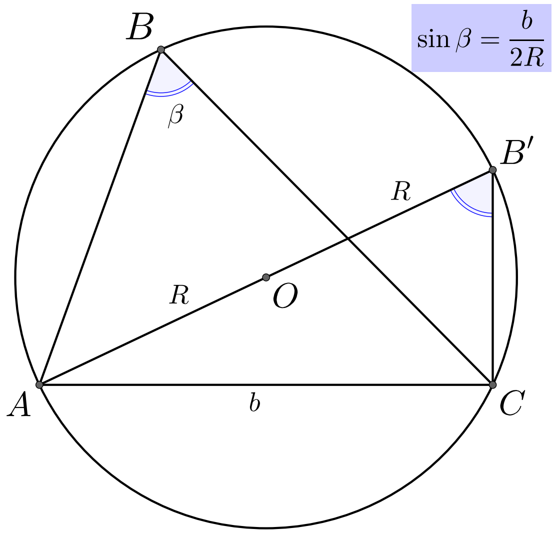
12. Докажем, что $b + c > a$. Остальные неравенства будут доказываться аналогично.
На луче CA отметим, точку D (за точкой A) так, что $AD = AB = c$. Мы получили равнобедренный треугольник ABD, значит $\angle BDC = \angle DBA$. При этом $\angle CBD > \angle DBA$. Так как напротив большего угла треугольника лежит большая сторона, то $b + c = CD > BC = a$. $\square$

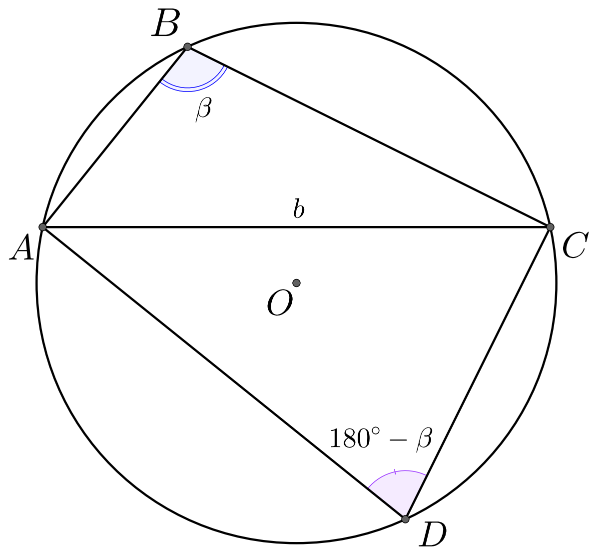


13. Докажем, что $2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Оставшиеся соотношения доказываются аналогично.

Случай 1: $\beta \leqslant 90^\circ$. Рассмотрим треугольник $AB'C$, вписанный в окружность, причём AB' – диаметр окружности. Угол $\angle ACB'$ опирается на диаметр окружности, поэтому он равен 90°. Углы $\angle ABC$ и $\angle AB'C$ опираются на дугу $\smile{AC}$, значит $\angle AB'C = \beta$. Отсюда получаем, что $\sin\beta = \dfrac{b}{2R} \implies 2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Случай 2: $\beta > 90^\circ$. Рассмотрим треугольник ADC, вписанный в окружность, угол $\angle ADC$ опирается на дугу $\overset{\smile}{CA}$, значит, $\angle ADC = 180^\circ - \beta < 90^\circ$, поэтому верно соотношение $\sin(180^\circ - \beta) = \dfrac{b}{2R}$. Так как $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$, имеем $2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$. $\square$





14. Докажем первую из формул. Остальные доказываются аналогично.

Случай 1: Пусть углы при основании AC являются острыми. В этом случае высота BD упадёт на отрезок AC. Получаем:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{c} \implies AD = c\cdot\cos\alpha,$$

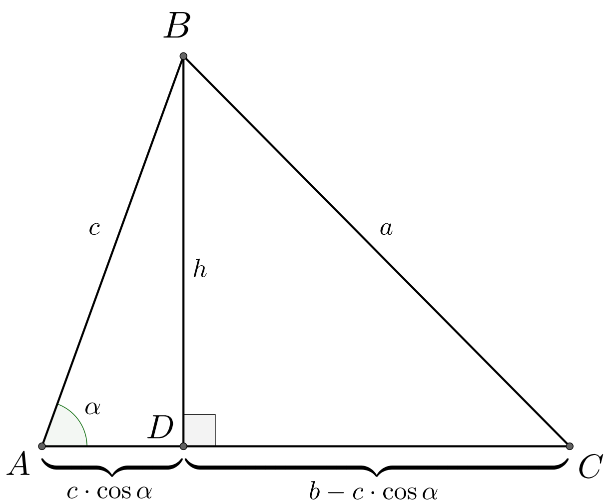
значит,

$$DC = b - c\cdot\cos\alpha.$$

Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC:

$$h^2 = c^2 - (c\cdot\cos\alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2.$$



Приравниваем правые части полученных равенств:

$$c^2 - (c\cdot\cos\alpha)^2 = a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2.$$

Откуда получаем, что $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.

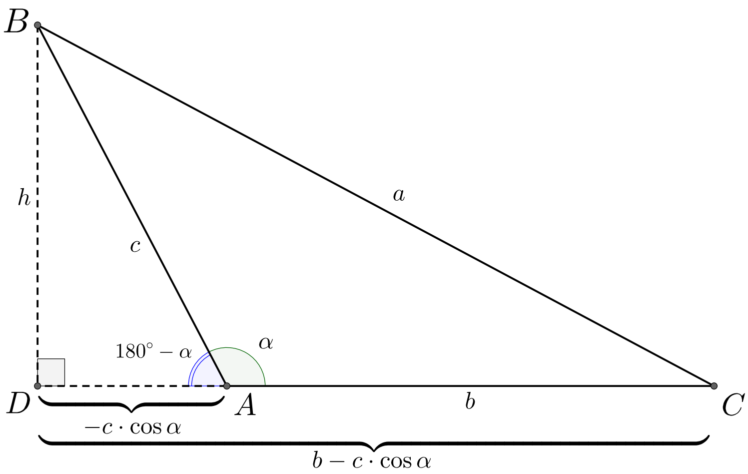
Случай 2: Пусть угол $\angle BAC = \alpha$ – тупой. В этом случае высота BD упадёт на продолжение стороны AC. Угол $\angle BAD$ равен $180^\circ - \alpha$. При этом мы знаем, что $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, поэтому

$$AD = -c\cdot\cos\alpha, \quad DC = b - c\cdot\cos\alpha.$$

Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC:

$$h^2 = c^2 - (-c\cdot\cos\alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2.$$



Приравниваем правые части полученных равенств: $c^2 - (c \cdot \cos\alpha)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos\alpha)^2$. Откуда получаем, что $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.

Случай 3: Пусть угол $\angle BCA = \gamma$ – тупой. В этом случае высота BD упадёт на продолжение стороны AC. Имеем:

$$AD = c \cdot \cos\alpha, \quad CD = c \cdot \cos\alpha - b.$$

Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC:

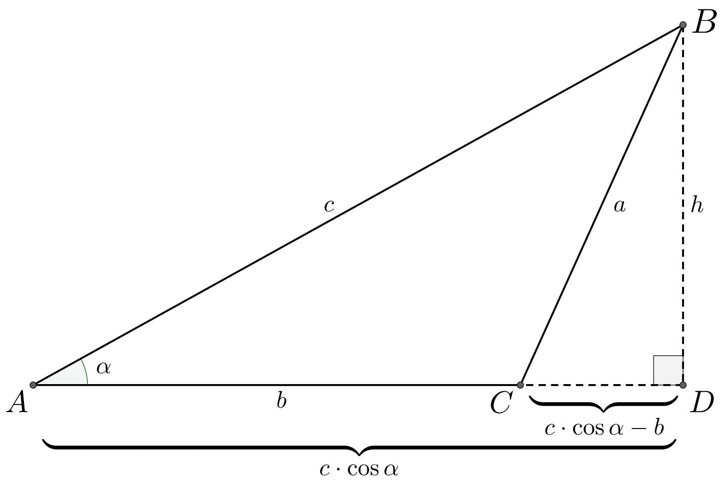
$$h^2 = c^2 - (c \cdot \cos\alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (c \cdot \cos\alpha - b)^2.$$

Приравниваем правые части полученных равенств:

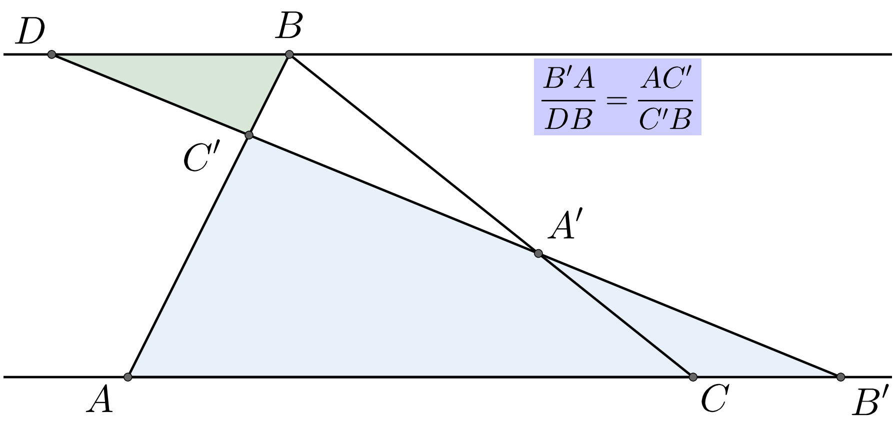
$$c^2 - (c \cdot \cos\alpha)^2 = a^2 - (c \cdot \cos\alpha - b)^2.$$

Таким образом $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$. $\square$



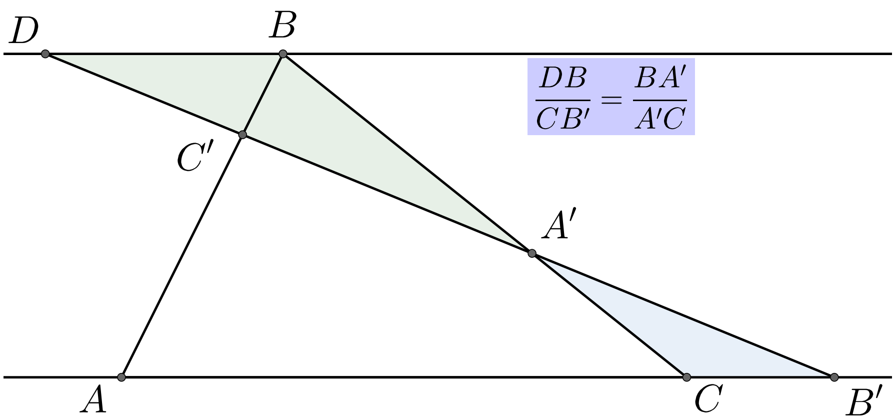
16. Докажем основное утверждение: через вершину B проведём прямую, параллельную стороне AC, D – точка пересечения прямой $A'C'$ с данной прямой. Углы $\angle AC'B'$ и $\angle DC'B$ являются вертикальными, поэтому они равны, углы $\angle BAB'$ и $\angle ABD$ равны, так как являются накрест лежащими, значит треугольники $DC'B$ и $B'C'A$ подобны по двум равным углам, то есть верно соотношение:

$$\frac{B'A}{DB} = \frac{AC'}{C'B}.$$



Аналогично легко показать, что треугольники $DA'B$ и $B'A'C$ подобны, а значит выполнено соотношение

$$\frac{DB}{CB'} = \frac{BA'}{A'C}.$$



Перемножим полученные равенства:

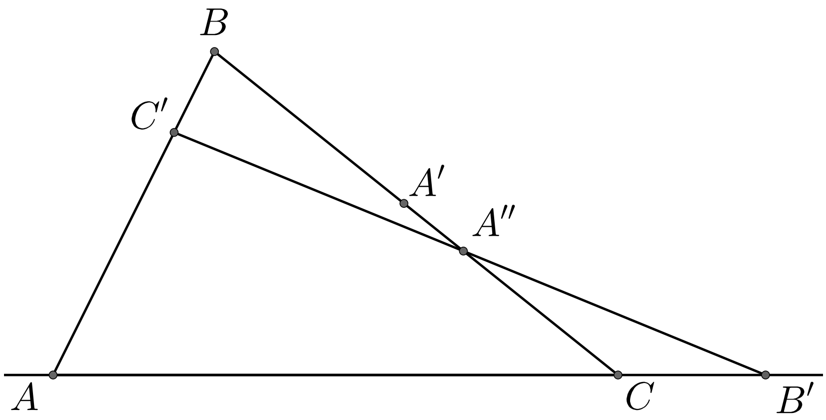
$$\frac{B'A}{DB} \cdot \frac{DB}{CB'} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \implies \frac{B'A}{CB'} = \frac{AC' \cdot BA'}{C'B \cdot A'C} \implies \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \quad \square$$

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{*}$$

но точки A', B', C' не лежат на одной прямой. Через точки C' и B' проведём прямую, она пересечёт сторону BC в точке A''. Для треугольника ABC и точек A'', B', C' запишем теорему Менелая:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{**}$$



Поделим соотношение (*) на соотношение (**):

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA'}{A'C} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BA''}{BC - BA''} = \frac{BA'}{BC - BA'} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow BA'' \cdot BC - BA'' \cdot BA' = BA' \cdot BC - BA'' \cdot BA' \quad \Longrightarrow \quad BA'' \cdot BC = BA' \cdot BC.$$

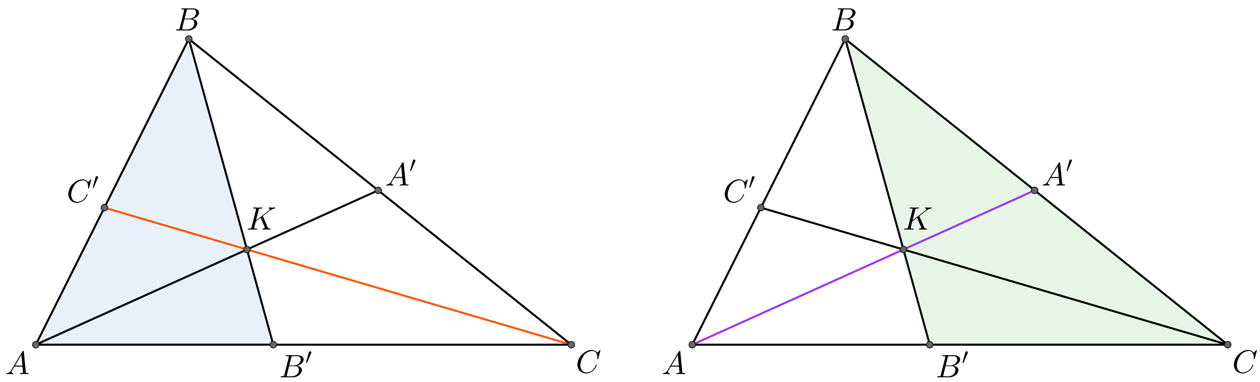
Отсюда получаем, что $BA'' = BA'$, значит точки A' и A'' совпадают, поэтому точки A', B', C' лежат на одной прямой. □

17. Докажем прямую теорему Чевы. Применим теорему Менелая для треугольника ABB' и прямой CC':

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BK}{KB'} \cdot \frac{B'C}{CA} = 1.$$

Применим теорему Менелая для треугольника $B'BC$ и прямой AA':

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA}{AB'} \cdot \frac{B'K}{KB} = 1.$$



Перемножим полученные равенства:

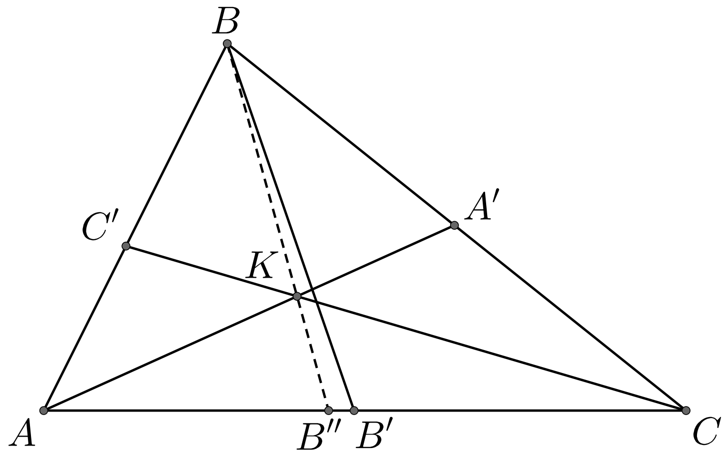
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BK}{KB'} \cdot \frac{CA}{AB'} \cdot \frac{B'C}{CA} \cdot \frac{B'K}{KB} = 1.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \quad \square$$

Докажем обратное утверждение. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K. Пусть прямая BK пересекает AC в точке B''. Тогда по теореме Чевы получаем:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1.$$



При этом верно равенство

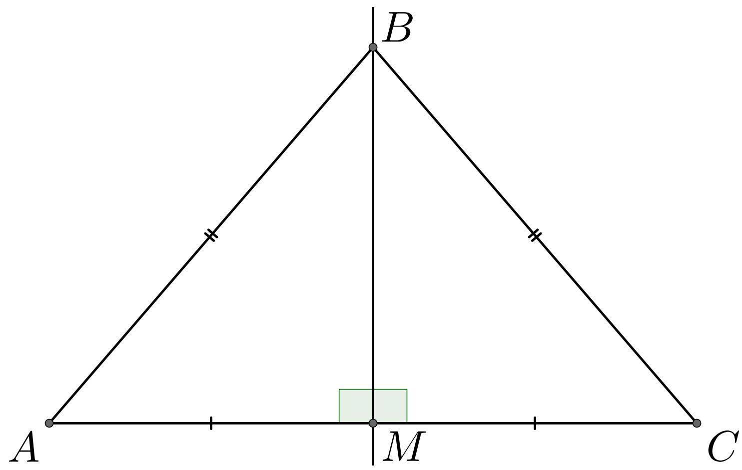
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

А, значит,

$$\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A},$$

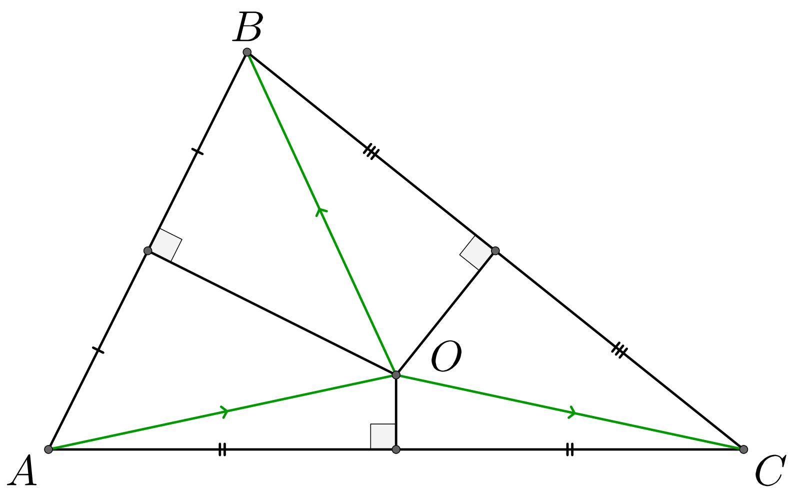
то есть точки B' и B'' совпадают. □

18. Пусть точка B равноудалена от точек A и C, то есть $AB = BC$. Пусть M – середина отрезка AC, то есть $AM = MC$. Сторона BM общая для треугольников ABM и CBM, значит эти треугольники равны по трём сторонам. То есть $\angle AMB = \angle CMB$, при этом данные углы являются смежными, а, значит, в сумме дают $180°$, поэтому они оба равны $90°$. □



Докажем обратное утверждение. Пусть точка B лежит на серединном перпендикуляре. Значит $AM = MC$ и сторона BM общая для треугольников ABM и CBM, поэтому прямоугольные треугольники AMB и CMB равны, следовательно равны их гипотенузы: $AB = BC$. □

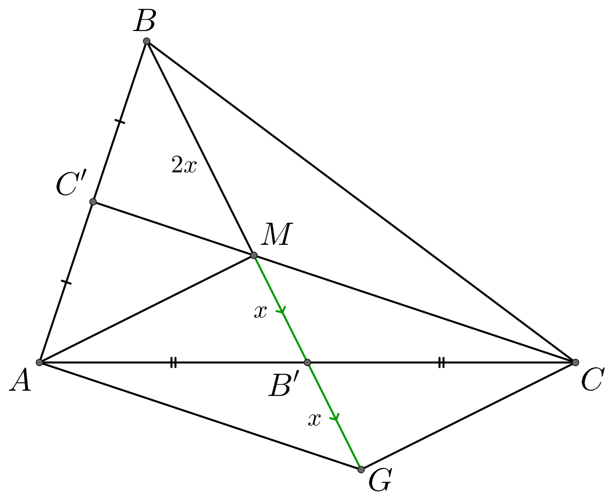
19. Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекаются в точке O. Тогда по свойству серединного перпендикуляра получаем: $AO = OC$ и $CO = OB$, то есть $AO = OB$, следовательно, точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB, значит O – точка пересечения серединных перпендикуляров. $AO = OB = OC$, поэтому центр описанной окружности лежит в точке O. □



20. Докажем, что

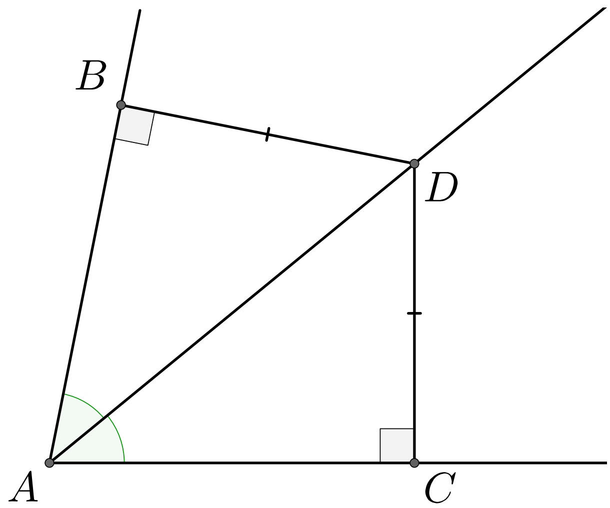
$$BM : MB' = 2 : 1.$$

Продлим отрезок MB' (за точку B') на его длину и построим точку G то есть $MB' = B'G$. Тогда в четырёхугольнике $MAGC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, значит, $MAGC$ – параллелограмм, из чего следует, что отрезки CM и AG параллельны. При этом C' – середина стороны AB, значит $C'M$ – средняя линия треугольника ABG. То есть $BM = MG = 2x$ и $BM : MB' = 2x : x = 2 : 1$. $\square$

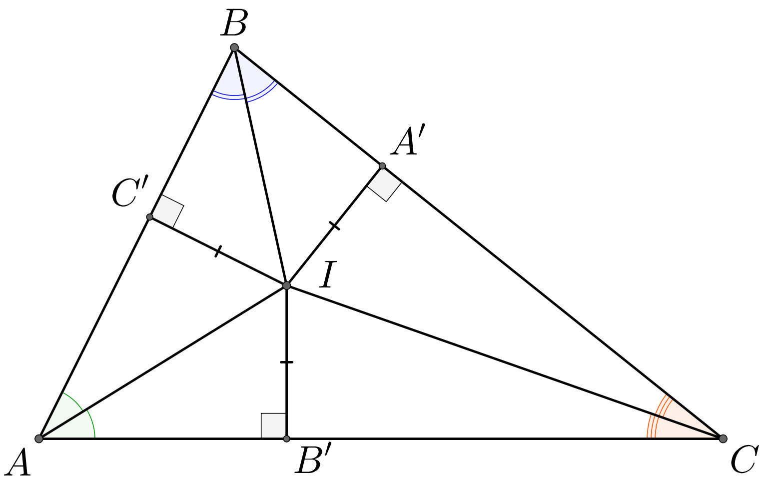


21. Пусть D – точка, лежащая на биссектрисе. Опустим из неё перпендикуляры на стороны угла. Получим два прямоугольных треугольника: ABD и ACD. AD – их общая сторона, $\angle BAD = \angle DAC$, значит треугольники ABD и ACD равны и $BD = DC$. $\square$

Докажем обратное утверждение. Пусть D равноудалена от сторон угла A, тогда у прямоугольных треугольников ABD и ACD есть общая сторона AD и равные стороны BD и DC, значит треугольники равны, поэтому $\angle BAD = \angle DAC$, то есть AD – биссектриса. $\square$



22. Пусть I – точка пересечения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$, а IA', IB', IC' – перпендикуляры к сторонам треугольника. Точка I лежит на биссектрисе угла A, значит, $IB' = IC'$, аналогично получаем, что $IA' = IC'$, значит, $IB' = IA'$, то есть точка I равноудалена от сторон угла C, значит, она лежит на биссектрисе угла C. $IA' = IB' = IC'$, поэтому I – центр вписанной окружности. $\square$



B
A'
C'
I
A
B'
C

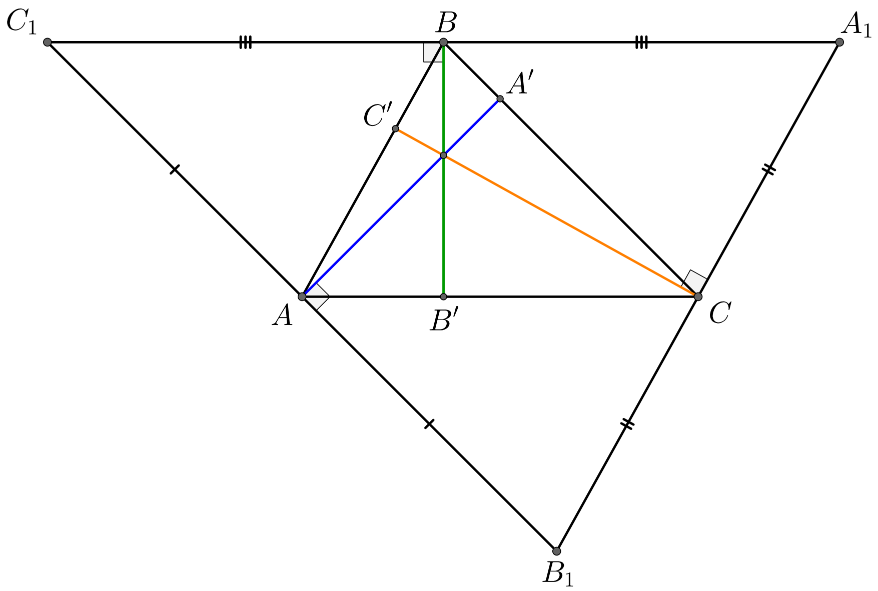
23. Через вершины A, B и C проведём прямые, параллельные сторонам, лежащим напротив данных вершин. Пусть эти прямые пересекаются в точках A_1, B_1, C_1. Получаем треугольник $A_1B_1C_1$, причём высоты AA', BB', CC' треугольника ABC перпендикулярны сторонам C_1B_1, A_1C_1 и B_1A_1 соответственно. Рассмотрим четырёхугольник AC_1BC. По построению получаем, что $AC_1||CB$ и $AC||C_1B$, значит AC_1BC – параллелограмм, то есть $BC_1 = AC$ и $AC_1 = BC$. Аналогично получаем, что четырёхугольники ABA_1C и $ABCB_1$ также являются параллелограммами и

$$A_1B = AC, \quad A_1C = AB, \quad B_1C = AB, \quad AB_1 = BC,$$

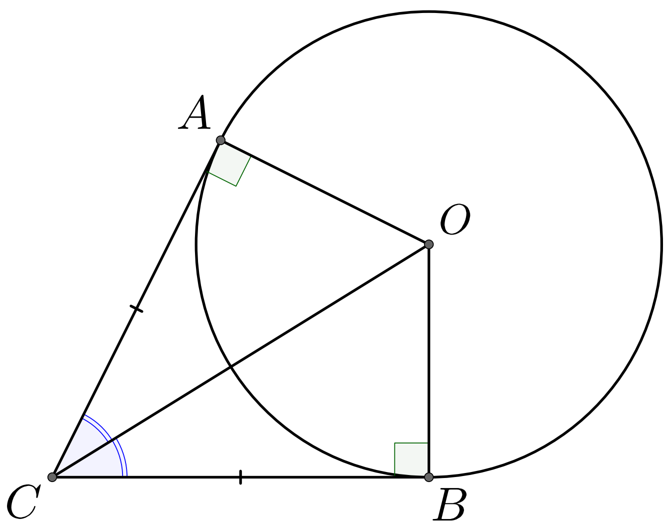
следовательно,

$$C_1A = AB_1, \quad C_1B = BA_1, \quad A_1C = CB_1.$$

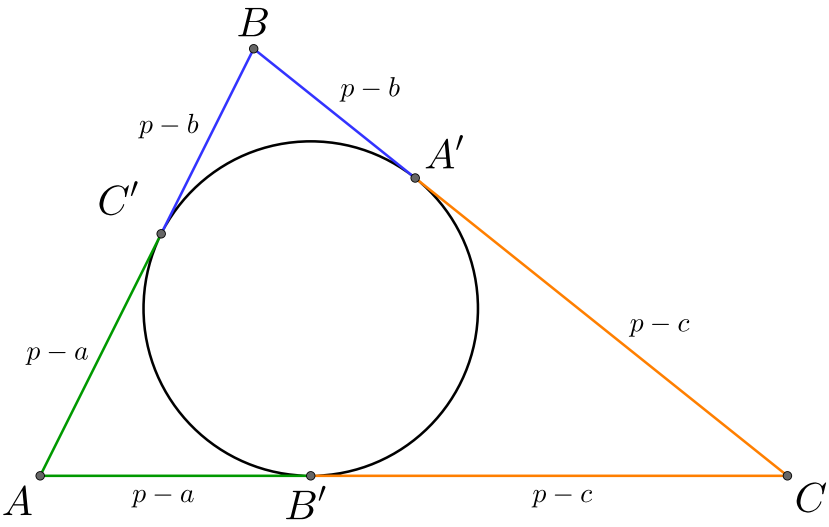
Значит отрезки AA', BB', CC' лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, значит высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке. $\square$



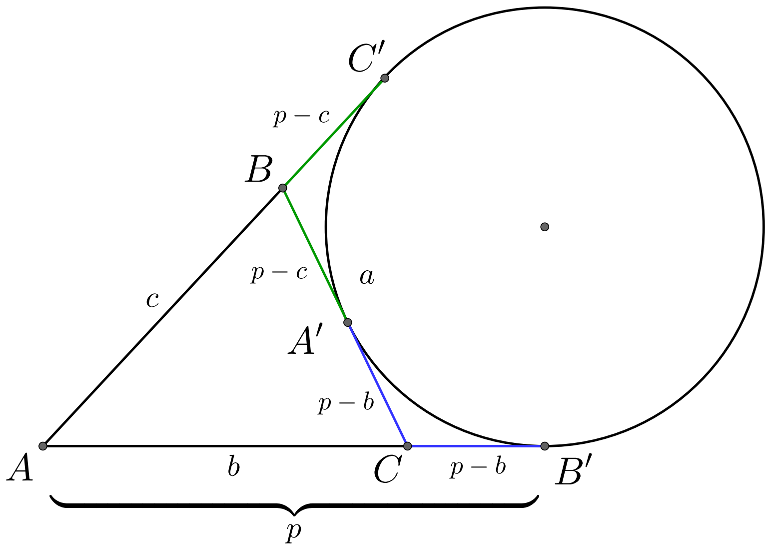
24. Пусть A и B – точки касания угла и вписанной в него окружности, они равноудалены от центра O, значит, O лежит на биссектрисе нашего угла, отсюда следует, что прямоугольные треугольники ACO и BCO равны, а значит $AC = CB$. $\square$



25. Пусть k_A – калитка угла A, k_B – калитка угла B, k_C – калитка угла C. Тогда $k_A + k_B + k_C = p$. $AB' + B'C = k_A + k_C = b$, значит $k_B = p - b$. Аналогично, $k_B + k_C = a$, значит $k_A = p - a$; $k_A + k_B = c$, значит $k_C = p - c$. $\square$

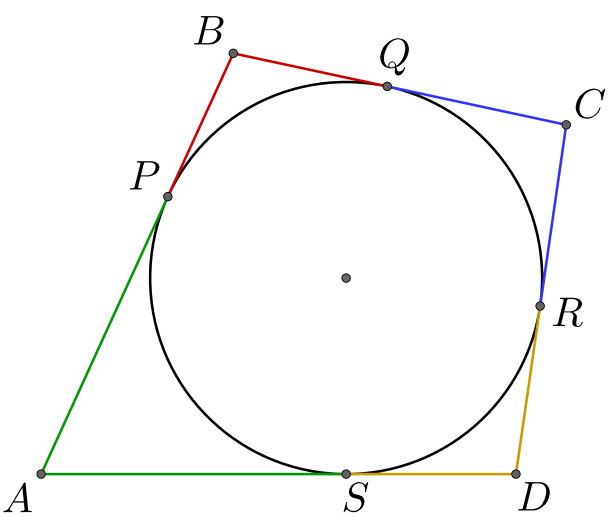


26. $AB+BC+CA=a+b+c=2p$, $BA'=BC'$, $A'C=CB'$, значит $AC'+AB'=AB+BC'+AC+CB'=AB+AC+BA'+A'C=a+b+c$, причём $AB'=AC'$, значит $AB'=AC'=p$. $CB'=AB'-AC=p-b$, аналогично $BC'=AC'-BC'=p-c$. $\square$



27. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то

$$AP=AS;\quad BP=BQ;\quad CR=CQ;\quad DR=DS.$$



Тогда получаем:

$$(AP + BP) + (CR + DR) = AB + CD; \quad (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC.$$

И, значит, $AB + CD = AD + BC$.

Докажем обратное утверждение.
Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ верно, что $AB + CD = AD + BC$. Биссектрисы углов CBA и DAB пересекаются в точке I. Эта точка равноудалена от сторон AB, AD и BC, значит I – центр окружности, касающейся сторон AB, AD и BC нашего четырёхугольника. Пусть CD не касается данной окружности Далее рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Сторона CD не пересекается с окружностью. На отрезках BC и AD отметим соответственно точки C' и D' так, что $C'D'$ – касательная к нашей окружности и $C'D'$ не пересекает CD. В четырёхугольник $ABC'D'$ можно вписать окружность. По доказанному ранее получаем, что

$$AB + C'D' = AD' + BC'.$$

При этом

$$BC' = BC - CC'; \quad AD' = AD - DD'.$$

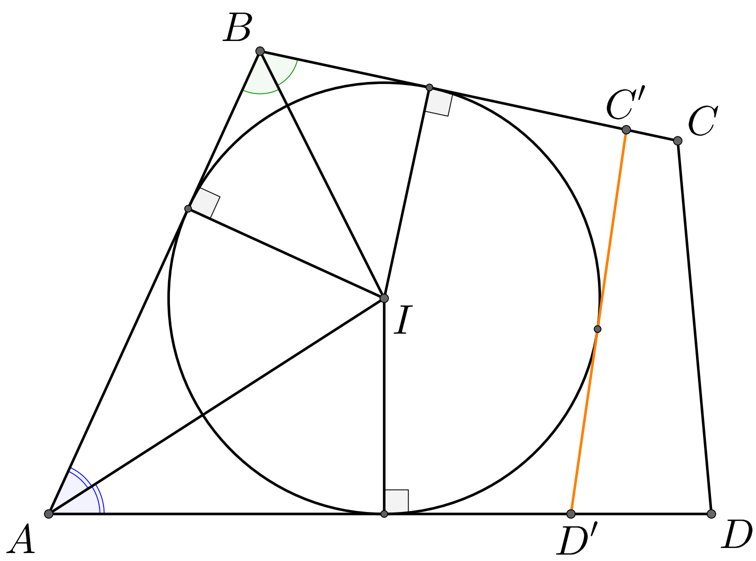
Значит,

$$AB + C'D' = BC - CC' + AD - DD' \iff C'D' + CC' + DD' = AD + BC - AB.$$

При этом мы знаем, что $CD = AD + BC - AB$, то есть

$$CD = C'D' + CC' + DD'.$$

Тогда мы получаем, что в четырёхугольнике $CDD'C'$ одна сторона равна сумме трёх других, что невозможно. Получаем противоречие.



Случай 2. Сторона CD пересекает окружность в двух точках. Проведём касательную $C'D'$ параллельно отрезку CD. В четырёхугольник $ABC'D'$ можно вписать окружность. По доказанному ранее получаем, что

$$AB + C'D' = AD' + BC'.$$

При этом

$$BC' = BC + CC'; \quad AD' = AD + DD'.$$

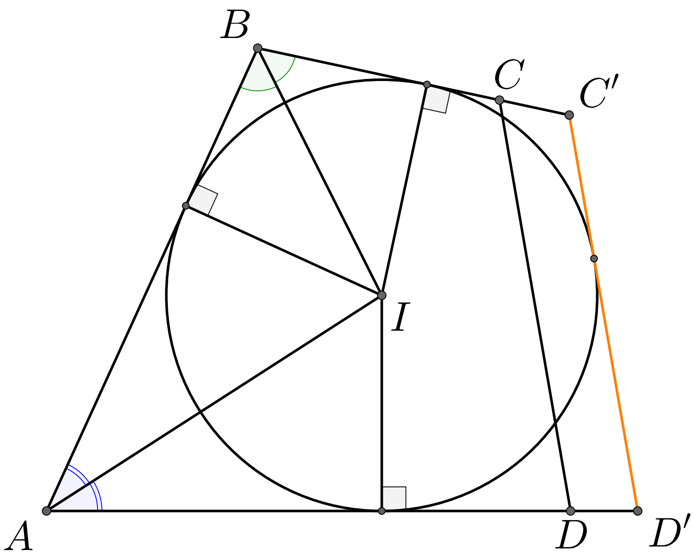
Значит,

$$AB + C'D' = BC + CC' + AD + DD' \iff C'D' - CC' - DD' = AD + BC - AB$$

При этом мы знаем, что $CD = AD + BC - AB$, то есть

$$CD = C'D' - CC' - DD' \iff C'D' = CD + CC' + DD'.$$

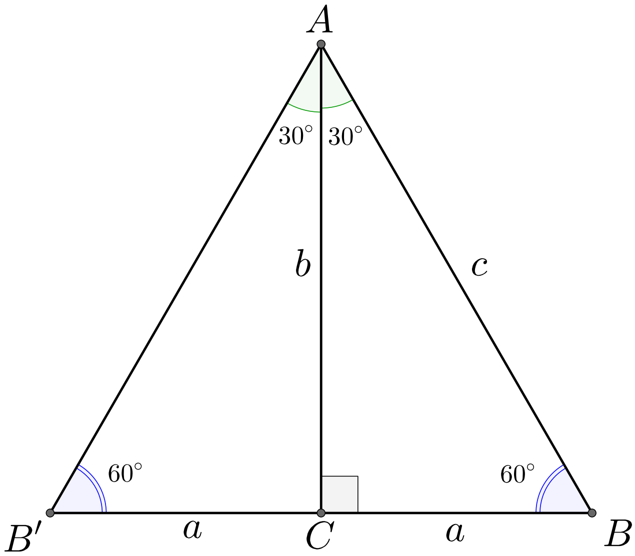
Тогда мы получаем, что в четырёхугольнике $CDD'C'$ одна сторона равна сумме трёх других, что невозможно. Получаем противоречие.



28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.

15.3 Прямоугольный треугольник

1. Отложим от точки C отрезок $B'C$, такой что $B'C = BC = a$, и точки B, C, B' – лежат на одной прямой. Тогда в треугольнике ABB' AC – высота и медиана, значит, ABB' – равнобедренный треугольник ($\angle B' = \angle B$). AC – биссектриса угла $\angle B'AB$, поэтому $\angle B'AB = 60^\circ$, отсюда следует, что оставшиеся углы треугольника также равны 60°, то есть ABB' – равносторонний треугольник, в частности $2a = BB' = AB = c$. □



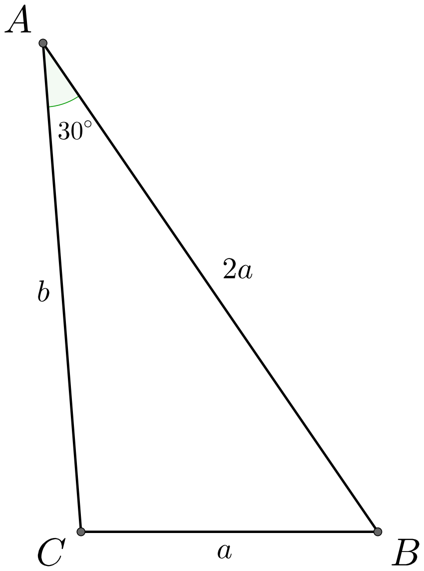
Замечание: Пусть в треугольнике ABC $\angle CAB = 30^\circ$, $BC = a$, $AB = 2a$, $AC = b$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$a^2 = (2a)^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ \iff b^2 - 2\sqrt{3}ab + 3a^2 = 0 \iff (b - a\sqrt{3})^2 = 0 \iff b = a\sqrt{3}.$$

Заметим, что для треугольника со сторонами a, $\sqrt{3}a$, $2a$ верна теорема Пифагора:

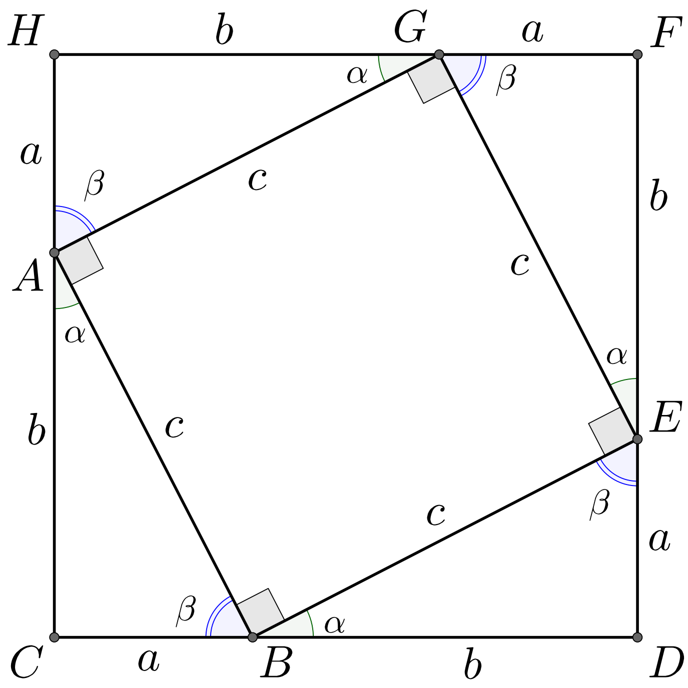
$$a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2 = (2a)^2.$$

Значит ABC – прямоугольный треугольник.



2. Достроим треугольник ABC до квадрата $CHFD$ со стороной $(a + b)$ как показано на рисунке. Треугольники ABC, GAH, EGF, BED равны по двум сторонам (катетам) и углу между ними. $\alpha + \beta = 90^\circ$, поэтому $AGEB$ – квадрат. Таким образом, площадь квадрата $CHFD$ равна, с одной стороны $(a + b)^2$, с другой стороны $4 \cdot \dfrac{ab}{2} + c^2$, то есть

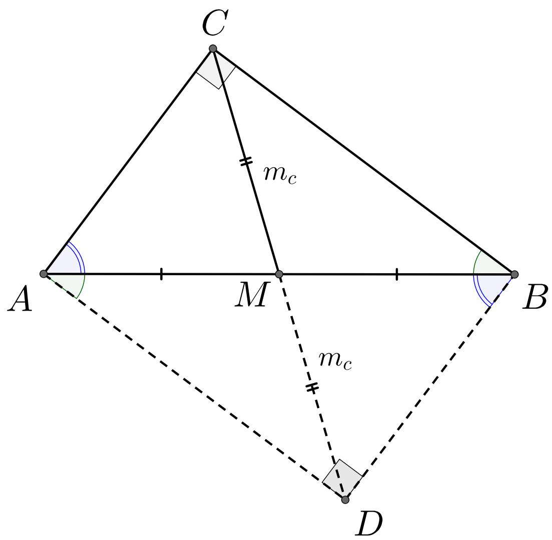
$$(a + b)^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2.$$



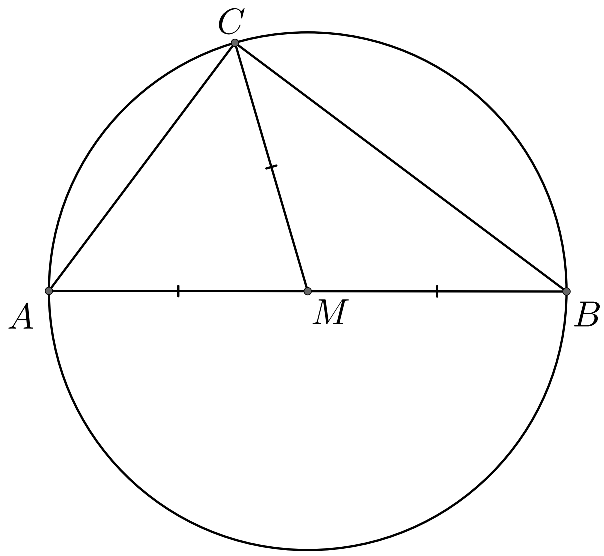
Докажем обратное утверждение. Пусть в треугольнике ABC со сторонами $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$ выполнено равенство верно $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, так что $C_1B_1 = a$, $A_1C_1 = b$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = a^2 + b^2 = AB^2 = c^2$, то есть $A_1B_1 = AB = c$, значит треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, значит ABC – прямоугольный. □

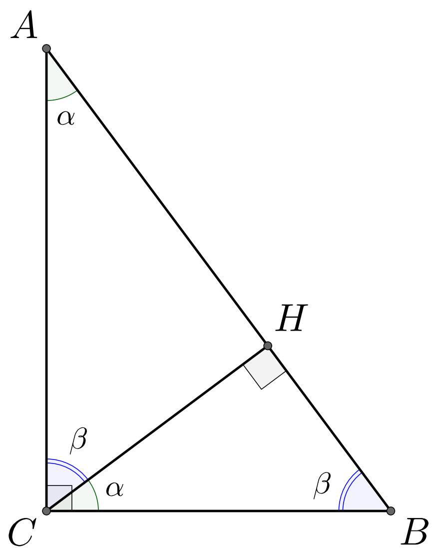
3. Продлим медиану CM на её длину до точки D, то есть $CM = MD$. Треугольники CMB и MDA равны по двум сторонам и углу между ними ($CM = MD$, $BM = MA$, $\angle CMB = \angle AMD$, так как они являются вертикальными), значит, $\angle CBM = \angle MAD$. Аналогично, подобны треугольники CAM и DBM, а, значит, $\angle CAM = \angle MBD$. Таким образом, треугольники ABC и BAD равны, значит $CADB$ – прямоугольник, в котором AB и CD – диагонали, они равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому

$$CM = AM = MD = \frac{1}{2}AB.$$



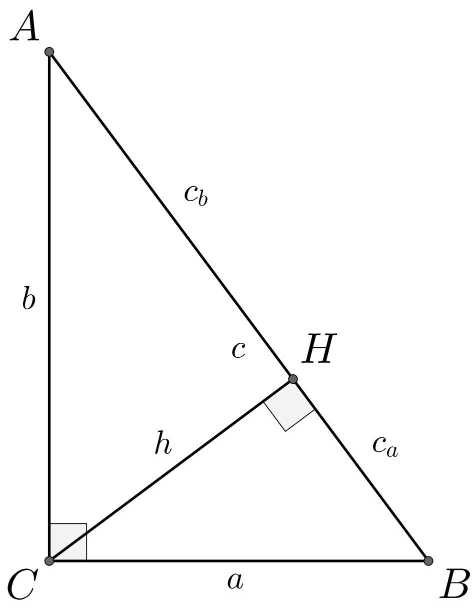
Докажем обратное утверждение: опишем вокруг треугольника ABC окружность. Нам известно, что $CM = AM = MB$, поэтому радиус описанной окружности равен AM и M – центр окружности, AB – диаметр окружности, угол $\angle ACB$ равен $90°$, так как он опирается на диаметр окружности, значит, наш треугольник является прямоугольным. □





5. $\angle HCB = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta = \alpha$, значит треугольники ABC и CBH подобны по трём углам. Аналогично, $\angle ACH = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha = \beta$, то есть треугольники ABC и ACH подобны.

Из подобия этих двух пар треугольников следует, что треугольники AHC и CHB подобны. $\square$



6. Так как треугольники ABC и ACH подобны, то мы можем записать соотношение:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c} \quad \Longrightarrow h = \frac{ab}{c}.$$

А также:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \quad \Longrightarrow c_b c = b^2.$$

Из подобия треугольников ACH и CBH получаем:

$$\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} \quad \text{или} \quad \frac{h}{c_b} = \frac{c_a}{h} \quad \Longrightarrow h^2 = c_a c_b.$$

Из подобия ABC и CBH следует:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{HB}{CB} \quad \text{или} \quad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \Longrightarrow c_a c = a^2. \quad \square$$

7. В подобных треугольниках линейные элементы относятся также как стороны этих треугольников. Поэтому для треугольников ABC и CBH получаем:

$$\frac{a}{c} = \frac{x_a}{x_c}.$$

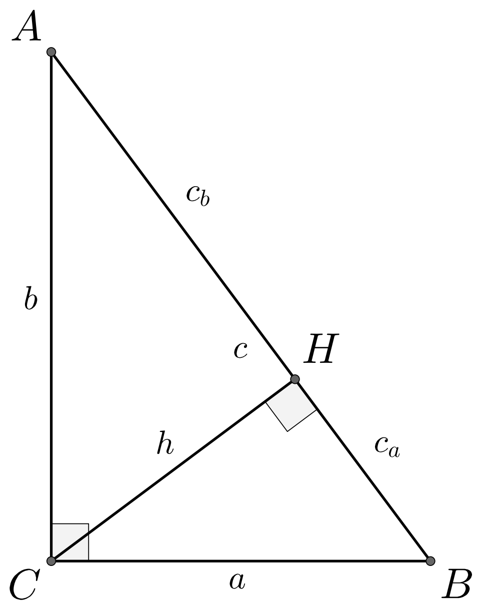
Для треугольников ABC и ACH:

$$\frac{b}{c} = \frac{x_b}{x_c}.$$

Возведём в квадрат оба равенства и сложим:

$$\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{x_a^2+x_b^2}{x_c^2}.$$

$\dfrac{a^2+b^2}{c^2} = 1$, поэтому $x_a^2 + x_b^2 = x_c^2$. $\square$



8. Докажем данное утверждение при $\beta > \alpha$.

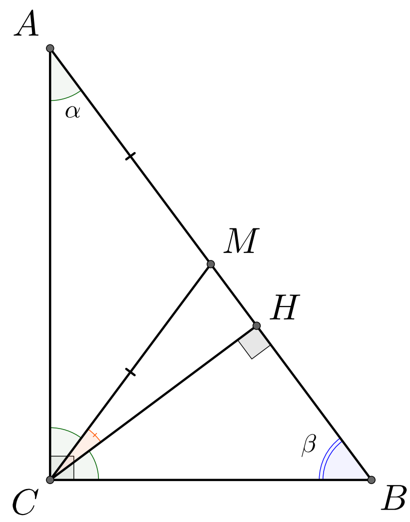
CM – медиана исходящая из прямого угла, поэтому $CM = MA$, значит $\angle ACM = \angle MAC = \alpha$. Мы знаем, что

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Треугольник HCB прямоугольный, поэтому $\angle HCB + \angle HBC = 90^\circ$, то есть $\angle HCB = 90^\circ - \beta = \alpha$. С одной стороны, $\angle MCH + 2\alpha = 90^\circ$, с другой $\alpha + \beta = 90^\circ$, значит,

$$\angle MCH + 2\alpha = \alpha + \beta$$

То есть $\angle MCH = \beta - \alpha$. $\square$

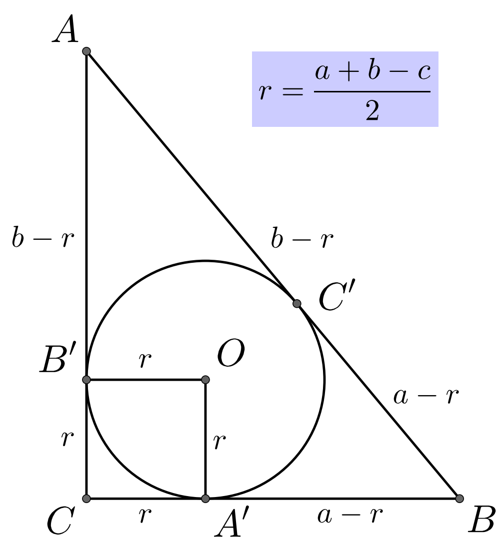


9. $B'C = CA' = r$, $A'B = BC' = a - r$, $B'A = AC' = b - r$, значит,

$$c = (a - r) + (b - r)$$

Следовательно,

$$2r = a + b - c \text{ или } r = \frac{a+b-c}{2}. \quad \square$$



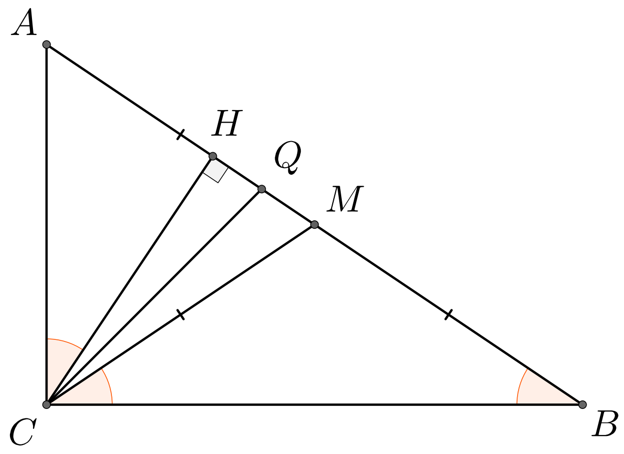
10. CM – медиана исходящая из прямого угла, поэтому $CM = MB$, значит, $\angle MBC = \angle MCB$. ABC – прямоугольный, поэтому $\angle CAB + \angle MBC = 90°$, ACH также является прямоугольным, поэтому

$$\angle CAB + \angle ACH = 90°.$$

Таким образом, мы получаем, что

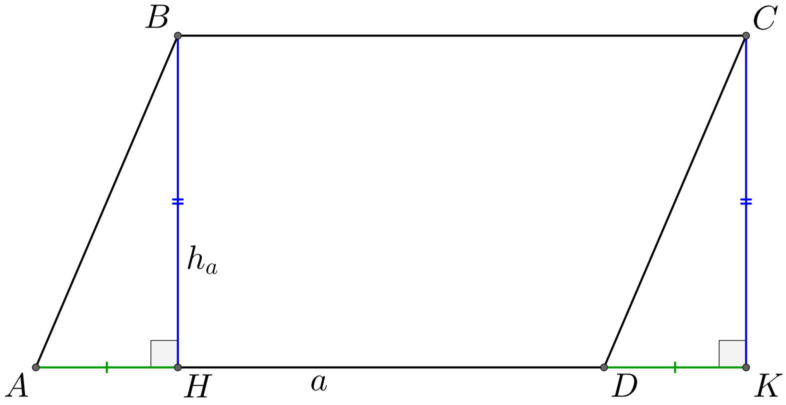
$$\angle MBC = \angle MCB = \angle ACH,$$

но биссектриса делит $\angle ACB$ пополам, значит, и угол $\angle HCM$ она делит пополам. $\square$



15.4 Площади

3. Докажем, что $S = ah_a$.
Будем считать, что угол BAD является острым. Через точки B и C проведём высоты BH и CK. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и DCK. $BH = CK = h_a$, также $AB = DC$, так как $ABCD$ – параллелограмм, значит, треугольники ABH и DCK равны (для равенства двух прямоугольных треугольников достаточно равенства двух сторон), из чего следует, что $AH = DK$, поэтому $HK = a$.



Рассмотрим прямоугольник $BHKC$: его стороны равны a и h_a. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{BHDC};$$

$$S_{BHKC} = S_{DCK} + S_{BHDC} = ah_a.$$

$S_{ABH} = S_{DCK}$, значит, $S_{ABCD} = S_{BHKC} = ah_a$. $\square$

4. Рассмотрим два случая.
Случай 1. Сначала будем считать, что угол BAD является острым. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH (BH – высота параллелограмма), тогда получаем:

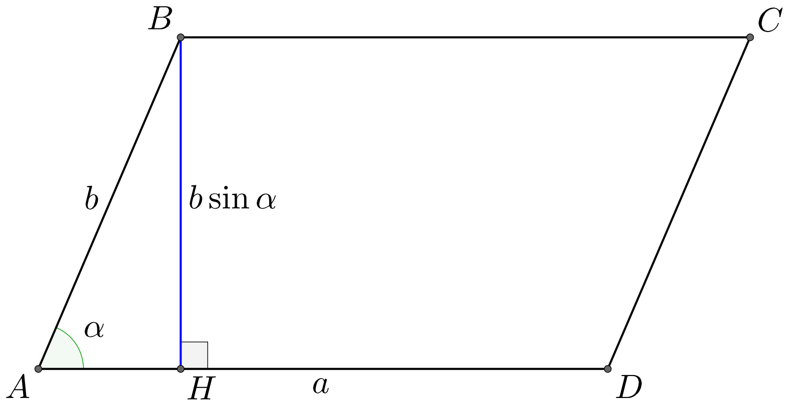
$$\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{h_a}{b},$$

значит

$$h_a = b\sin\alpha.$$

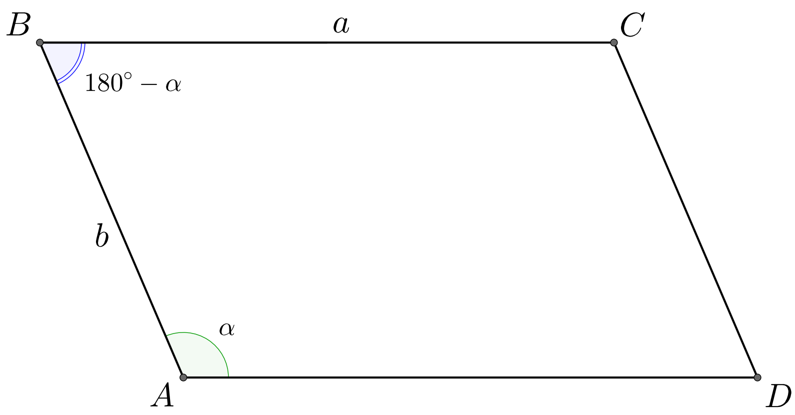
Следовательно,

$$S = ah_a = ab\sin\alpha. \quad \square$$



Случай 2. Если $\angle BAD$ – тупой угол, то $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ – острый. Отсюда получаем:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = ab\sin(180^\circ - \alpha) = ab\sin\alpha.$$

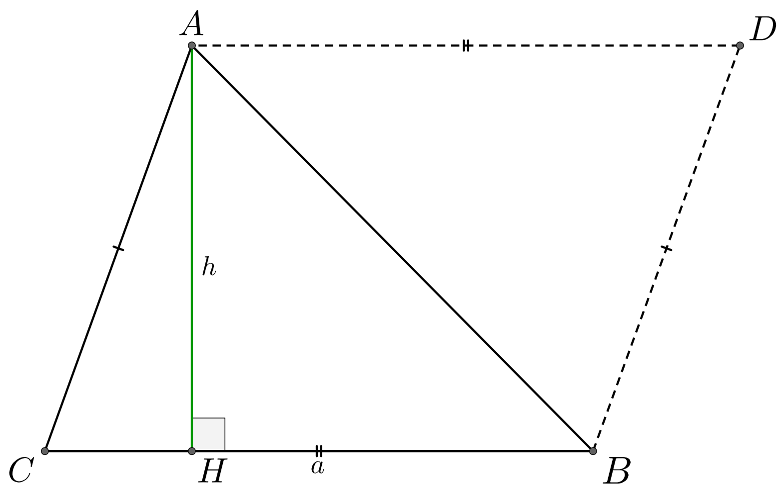


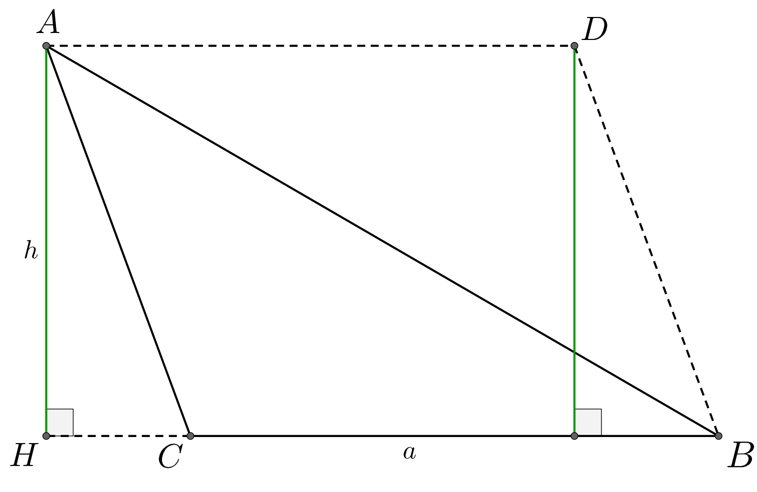
5. Проведём через точку B прямую параллельно AC, аналогично проведём через A прямую параллельно BC. Пусть данные прямые пересекаются в точке D.
$ACBD$ – параллелограмм, так как $CA||BD$ и $CB||AD$. Треугольники ACB и BDA равны по трём сторонам, значит $S_{ACB} = S_{BDA}$, при этом

$$S_{ACBD} = S_{ACB} + S_{BDA} = 2S_{ACB},$$

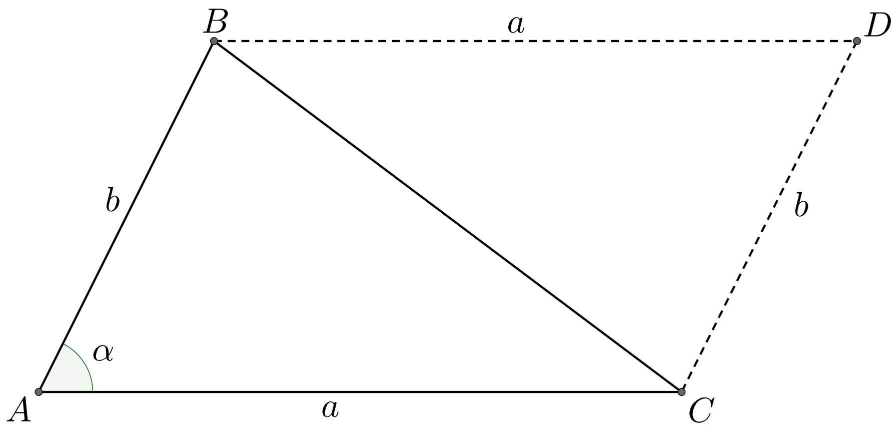
значит

$$S_{ACB} = \frac{S_{ACBD}}{2} = \frac{ah}{2}. \quad \square$$



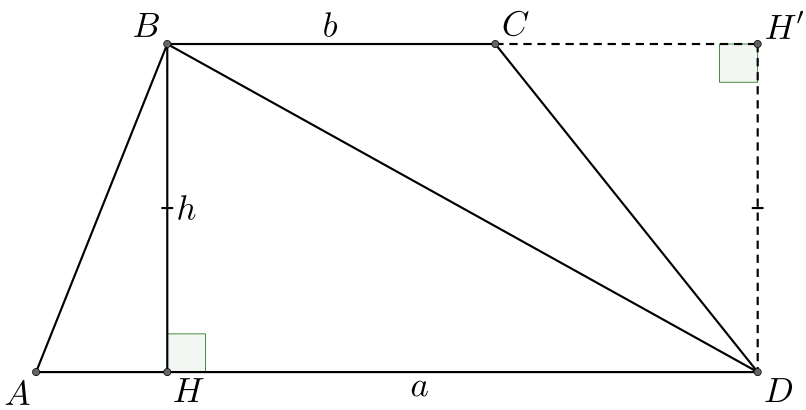


6. Как и в предыдущем доказательстве, построим параллелограмм $ABDC$, его площадь равна $S = ab\sin\alpha$, значит $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. $\square$



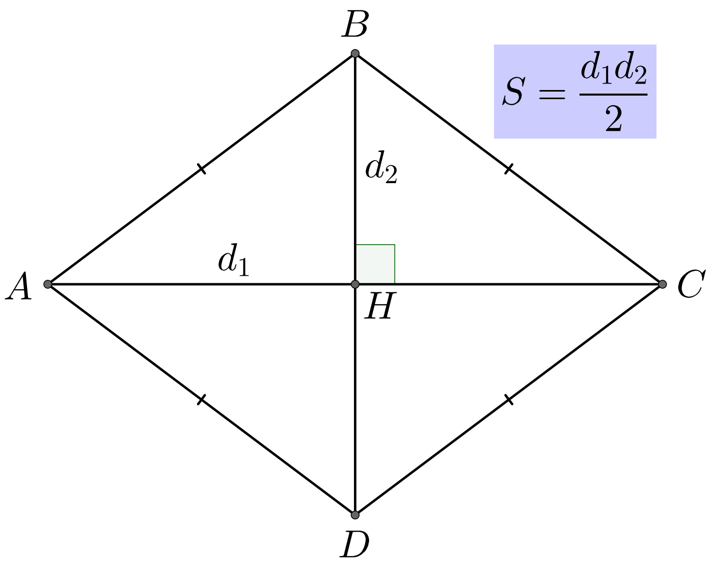
7. Рассмотрим треугольники ABD и BDC. Высота трапеции равна высоте треугольника ABD к стороне AD и равна высоте треугольника BDC к стороне BC. Получаем:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h. \quad \square$$



8. Пусть диагонали ромба пересекаются в точке H. Ромб является параллелограммом, поэтому диагонали точкой пересечения делятся пополам, то есть

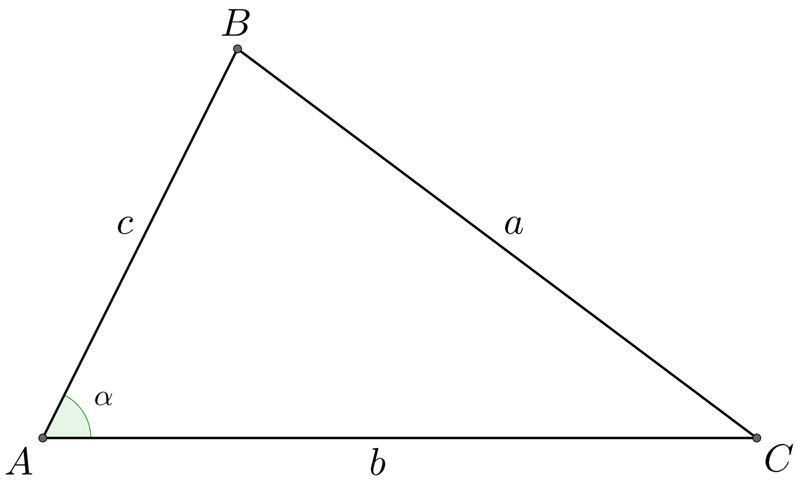
$$AH = HC = \frac{d_1}{2}; BH = HD = \frac{d_2}{2}.$$



Диагонали ромба перпендикулярны, поэтому треугольники ABH, ADH, BCH, CDH – прямоугольные с катетами $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$, их площади равны: $\frac{\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}}{2}=\frac{d_1\cdot d_2}{8}$. Получаем: $S_{ABCD}=S_{ABH}+S_{ADH}+S_{BCH}+S_{CDH}=4\cdot\frac{d_1\cdot d_2}{8}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$. $\square$

9. Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда по теореме косинусов получаем:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$



Откуда получаем:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\implies\cos^2\alpha=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\iff 1-\sin^2\alpha=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\iff$$

$$\sin^2\alpha=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4(bc)^2}=\frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2}=$$

$$=\frac{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2c^2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}.$$

Мы знаем, что $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, получаем:

$$S^2=\frac{b^2c^2}{4}\cdot\sin^2\alpha=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{16}=$$

$$=\frac{((a+b+c)-2a)((a+b+c)-2b)((a+b+c)-2c)(a+b+c)}{16}=$$

$$=\frac{(a+b+c)}{2}\cdot\left(\frac{(a+b+c)}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{(a+b+c)}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{(a+b+c)}{2}-c\right)=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

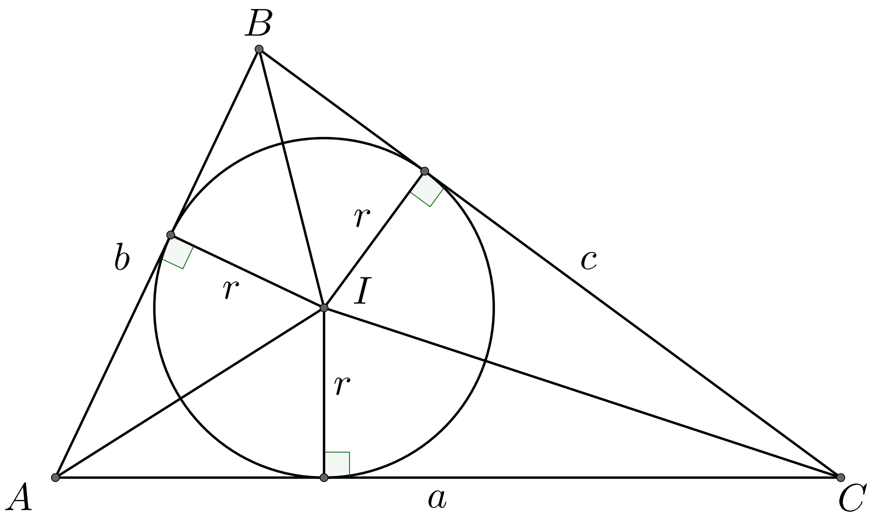
Значит, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $\square$

10. Пусть I – центр вписанной окружности. Рассмотрим треугольники AIB, AIC, BIC. Имеем:

$$S_{AIB}=\frac{1}{2}b\cdot r;\quad S_{AIC}=\frac{1}{2}a\cdot r;\quad S_{BIC}=\frac{1}{2}c\cdot r.$$

Получаем:

$$S_{ABC}=S_{AIC}+S_{AIB}+S_{BIC}=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=pr.\quad\square$$

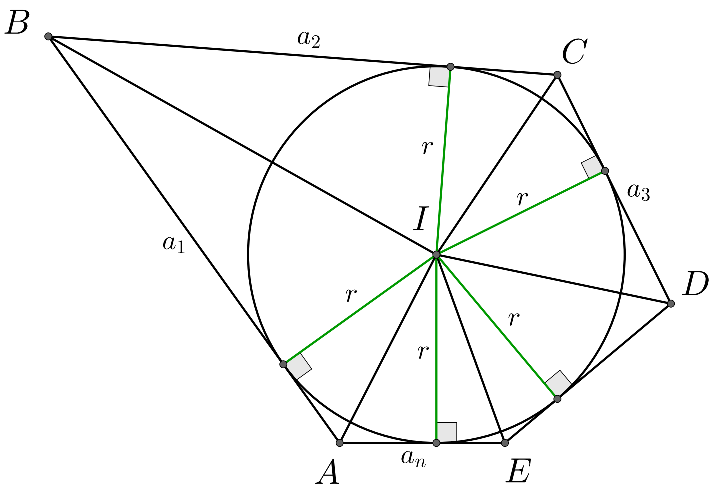


11. Разобьём $n-$угольник на n треугольников так, что одна из сторон каждого треугольника является стороной многоугольника, а одной из вершин является центр описанной окружности. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – длины сторон многоугольника, тогда площади полученных треугольников равны соответственно

$$\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r, \ldots, \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot r.$$

В сумме они дают площадь всего многоугольника, а значит получаем:

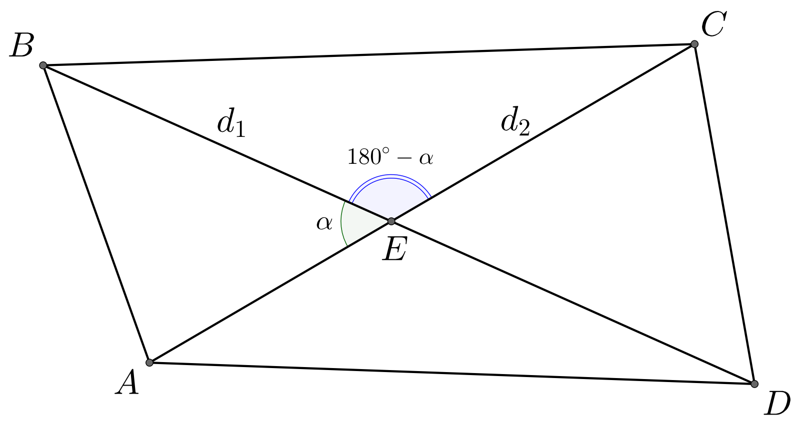
$$S = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r + \ldots + \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot r = \frac{(a_1 + \ldots + a_n)}{2} \cdot r = pr. \quad \square$$



12. Для начала отметим, что $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Найдём площади треугольников AEB, BEC, CED, DEA:

$$S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha; \; S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin \alpha; \; S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{DEA} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EA \cdot \sin \alpha.$$



Отсюда получаем:

$$S_{ABCD} = S_{AEB} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{DEA} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot EB \cdot (AE + EC) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot ED \cdot (AE + EC) = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot EB \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot ED \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot (BE + ED) \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot BD \cdot AC = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}. \quad \square$$

13. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда из теоремы синусов следует, что

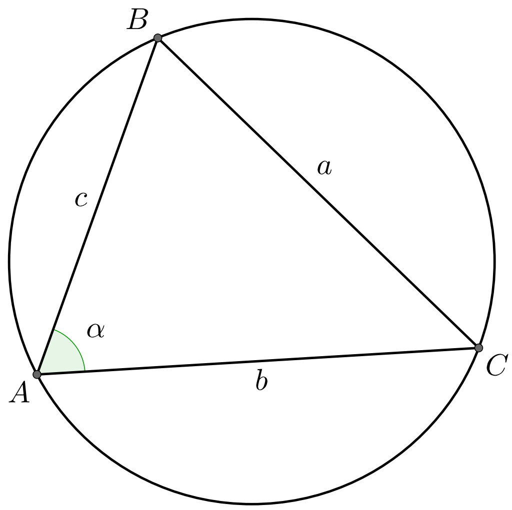
$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R}.$$

Площадь ABC можно найти по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Получаем:

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}. \quad \square$$

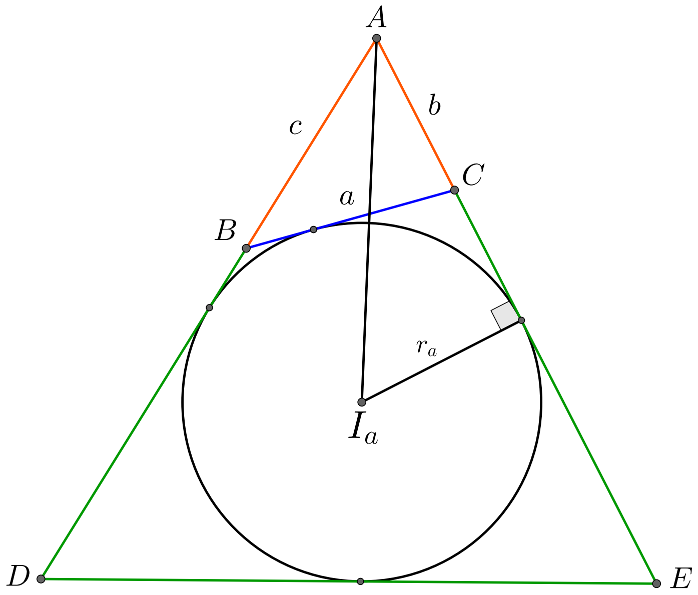


14. Докажем для r_a. На прямой AB отметим точку D, проведем через неё касательную к нашей окружности, пусть эта касательная пересекает прямую BC в точке E. Площадь треугольника ADE равна:

$$S_{ADE} = \frac{(b + c + BD + DE + EC)}{2} \cdot r_a.$$

Площадь четырёхугольника S_{BDEC} равна:

$$S_{BDEC} = \frac{a + BD + DE + EC}{2} \cdot r_a.$$



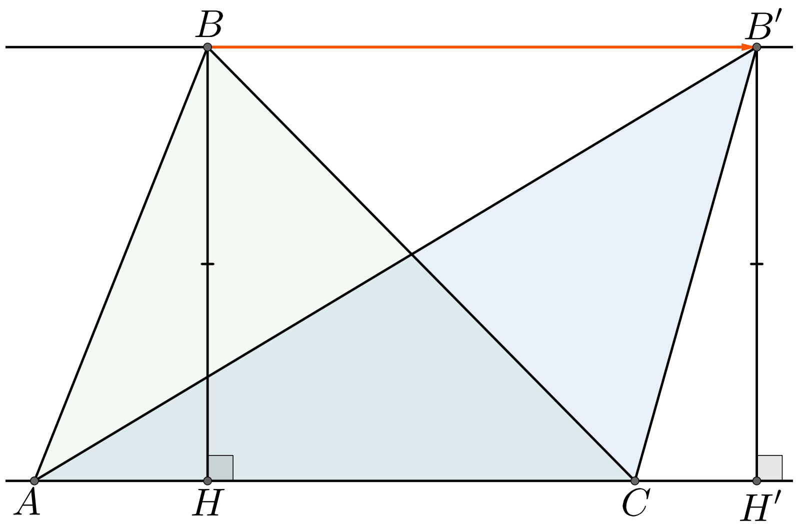
Тогда

$$S_{ABC} = S_{ADE} - S_{BDEC} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot r_a = (p-a) \cdot r_a. \quad \square$$

15.5 Свойства отношений и площадей

1. Треугольники ABC и $AB'C$ имеют общую сторону AC. Так как BB' и AC параллельны, то высоты BH и $B'H'$ равны. По формуле площади треугольника получаем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot B'H' = S_{AB'C}. \quad \square$$

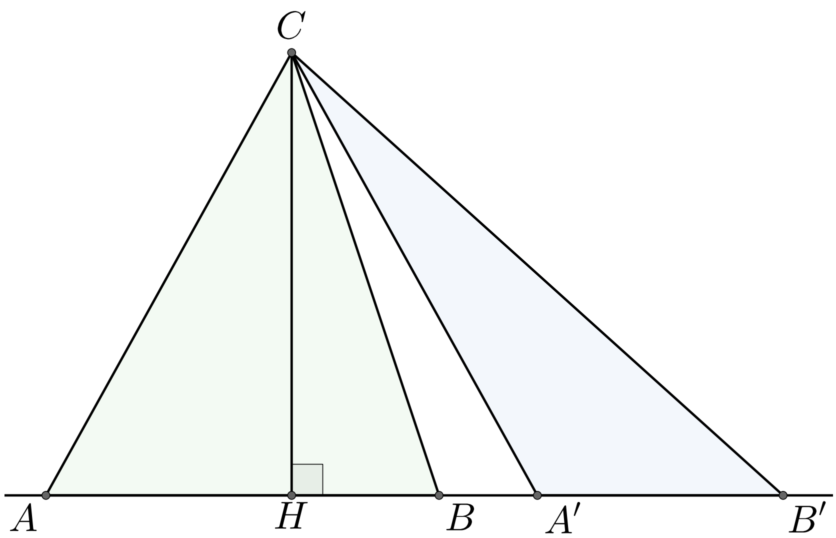


2. По формуле площади треугольника получаем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH; \quad S_{A'B'C} = \frac{1}{2}A'B' \cdot CH,$$

тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C}} = \frac{AB}{A'B'}. \quad \square$$

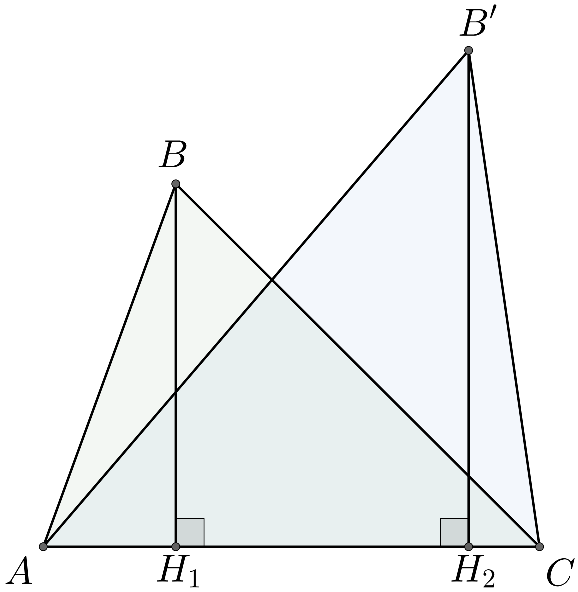


3. По формуле площади треугольника получаем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH_1 \cdot AC; \quad S_{AB'C} = \frac{1}{2}B'H_2 \cdot AC,$$

тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C}} = \frac{BH_1}{B'H_2}. \quad \square$$



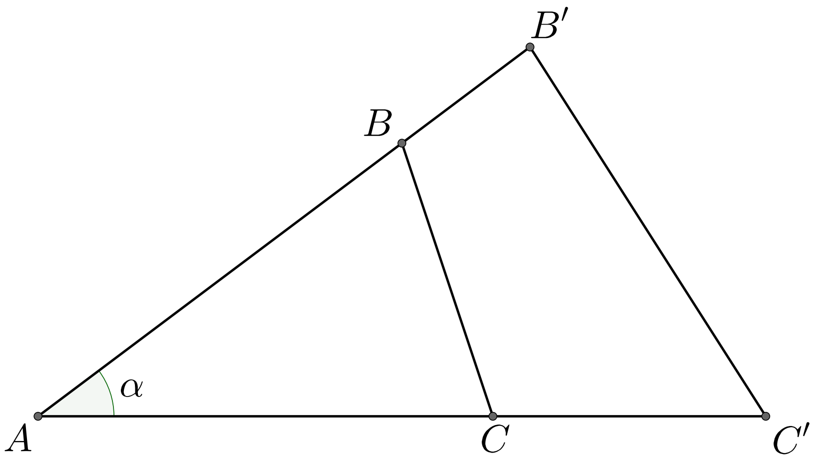
4. Найдем площади треугольников ABC и $AB'C'$ через синус угла:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AB' \cdot AC' \cdot \sin\alpha.$$

Тогда:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}. \quad \square$$



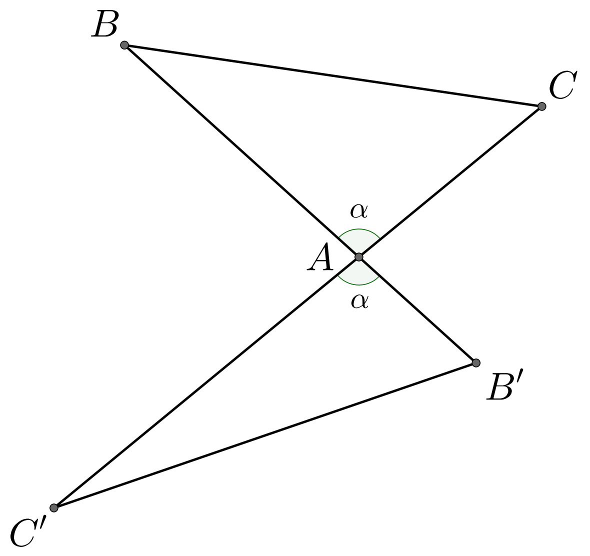
5. Найдем площади треугольников ABC и $AB'C'$ через синус угла:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha;$$

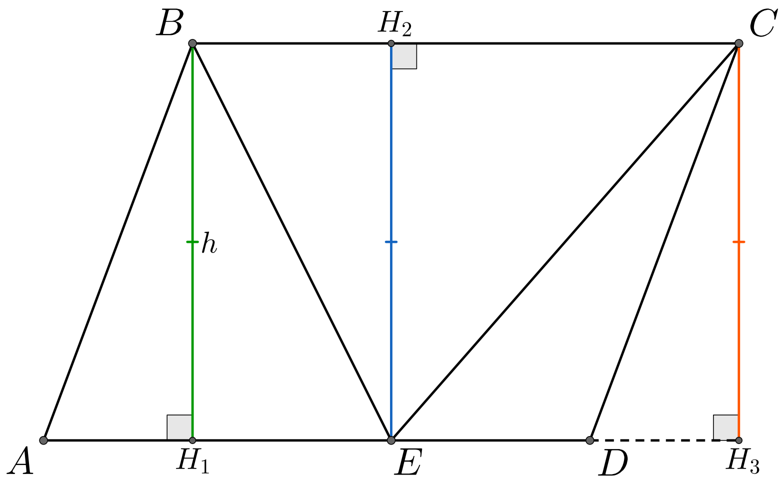
$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \cdot \sin\alpha.$$

Тогда:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}. \quad \square$$



6. Пусть h – длина высоты BH_1 к стороне AD параллелограмма $ABCD$. BH_1 является высотой треугольника ABE; высоты EH_2, CH_3 треугольников BEC и CED также равны h.



Получаем по формуле площади треугольника:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h; \quad S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h; \quad S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot h.$$

Тогда:

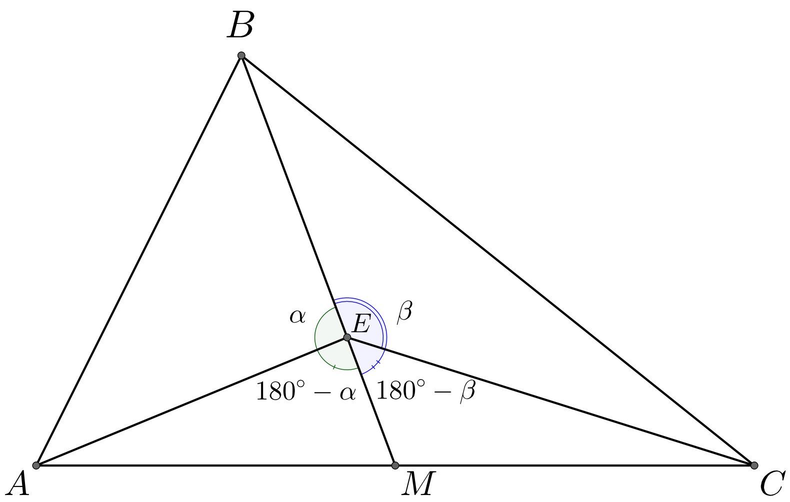
$$S_{ABE} + S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h + \frac{1}{2} \cdot ED \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (AE + ED) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = S_{BEC}. \quad \square$$

7. Пусть $S_{ABE} = S_{CBE}$, тогда по формуле площади треугольника через синус угла получаем:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha; \quad S_{CBE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EB \cdot \sin\beta$$

$$S_{AEM} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EM \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EM \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{CEM} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EM \cdot \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EM \cdot \sin\beta;$$



Получаем:

$$\frac{S_{AEM}}{S_{CEM}} = \frac{AE \cdot \sin\alpha}{CE \cdot \sin\beta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot CE \cdot EB \cdot \sin\beta} = \frac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = 1.$$

То есть $S_{AEM} = S_{CEM}$, при этом треугольники AEM и CEM имеют общую высоту к сторонам AM и MC, значит $AM = MC$. $\square$

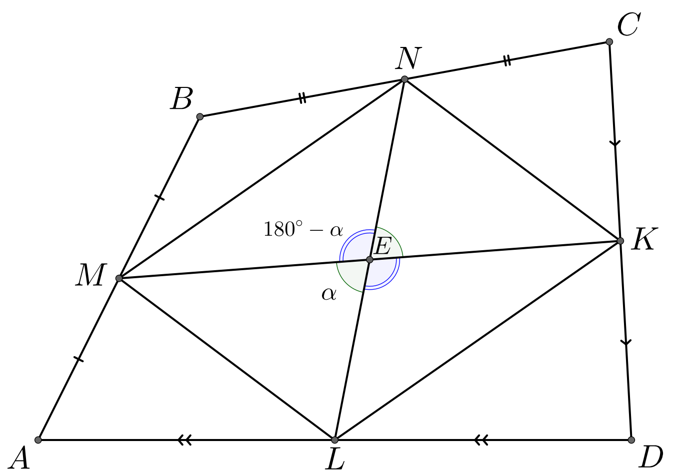
Докажем обратное утверждение.
Пусть BM – медиана треугольника ABC, тогда EM – медиана треугольника AEC. Получаем, что $S_{ABM} = S_{CBM}$ и $S_{AEM} = S_{CEM}$. Тогда

$$S_{ABE} = S_{ABM} - S_{AEM} = S_{CBM} - S_{CEM} = S_{CBE}. \quad \square$$

8. Найдём площади треугольников LME, MNE, NKE и KLE:

$$S_{LME} = \frac{1}{2} \cdot LE \cdot EM \cdot \sin\alpha; \quad S_{MNE} = \frac{1}{2} \cdot ME \cdot EN \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$S_{NKE} = \frac{1}{2} \cdot NE \cdot EK \cdot \sin\alpha; \quad S_{KLE} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot EL \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$



Так как четырёхугольник $MNKL$ построен на серединах сторон четырёхугольника $ABCD$, то $MNKL$ – параллелограмм, а значит диагонали $MNKL$ делятся точкой пересечения пополам, то есть $ME = EK$, $NE = EL$. Также $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, поэтому получаем, что

$$S_{LME} + S_{NKE} = \frac{1}{2}\sin\alpha(LE \cdot EM + NE \cdot EK) = \frac{1}{2}\sin\alpha(NE \cdot EM + KE \cdot EL) = S_{MNE} + S_{KLE}.$$

Далее заметим, что треугольники S_{MBN} и S_{ABC} подобны с коэффициентом подобия 2, значит $S_{MBN} =$

$\dfrac{1}{4} \cdot S_{ABC}$. Аналогично получаем, что

$$S_{AML} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABD}; \quad S_{CNK} = \frac{1}{4} \cdot S_{CBD}; \quad S_{DKL} = \frac{1}{4} \cdot S_{DAC}.$$

При этом

$$S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABCD}; \quad S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABCD},$$

значит

$$S_{AML} + S_{CNK} = S_{MBN} + S_{DKL} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

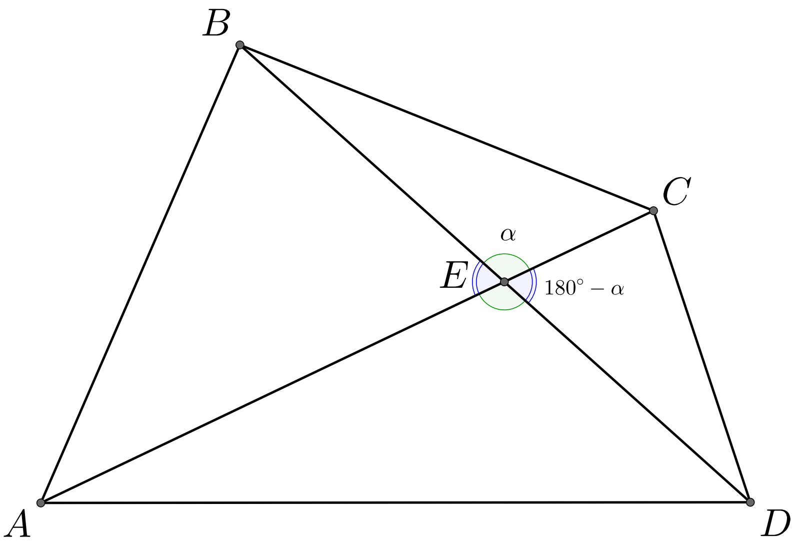
Окончательно получаем:

$$S_1 + S_3 = S_{MBN} + S_{MNE} + S_{DKL} + S_{KLE} = (S_{MNE} + S_{KLE}) + (S_{MBN} + S_{DKL}) =$$
$$= S_{LME} + S_{NKE} + S_{AML} + S_{CNK} = S_2 + S_4. \quad \square$$

9. Пусть $\alpha = \angle BEC$, тогда $\alpha = \angle AED$ ($\angle BEC$ и $\angle AED$ равны как вертикальные углы) и $\angle AEB = \angle DEC = 180^\circ - \alpha$ (так как углы $\angle BEC$ и $\angle DEC$ являются смежными). Также мы знаем, что $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. Найдём площади треугольников:

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin\alpha; \quad S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha; \quad S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC \cdot \sin\alpha.$$

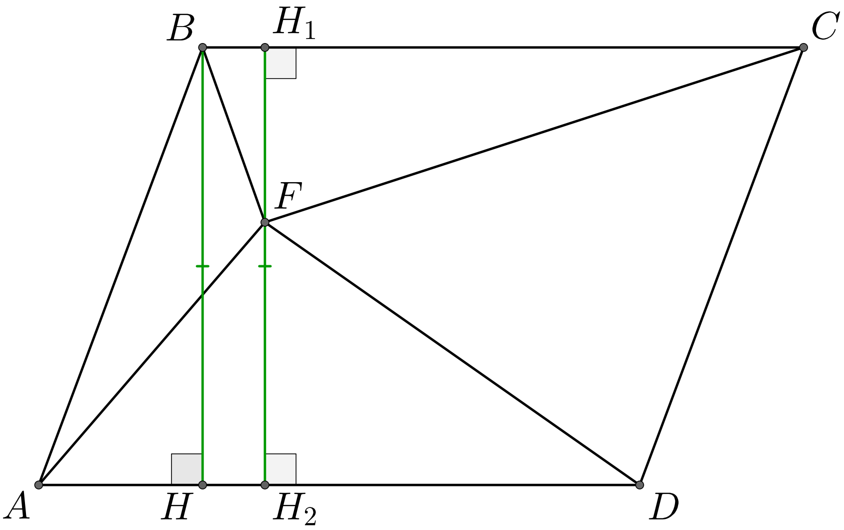


Получаем:

$$S_{BEC} \cdot S_{AED} = \left(\frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin\alpha\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin\alpha\right) = S_{AEB} \cdot S_{DEC}. \quad \square$$

10. Через точку F проведём отрезок H_1H_2 параллельно высоте BH параллелограмма. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AD = BC$. Тогда получаем:

$$S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FH_1; \quad S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH_2.$$



Получаем:

$$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FH_1 + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH_2 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (FH_1 + FH_2) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \quad \square$$

11. Рассмотрим случай, когда AD и BC параллельны. Пусть

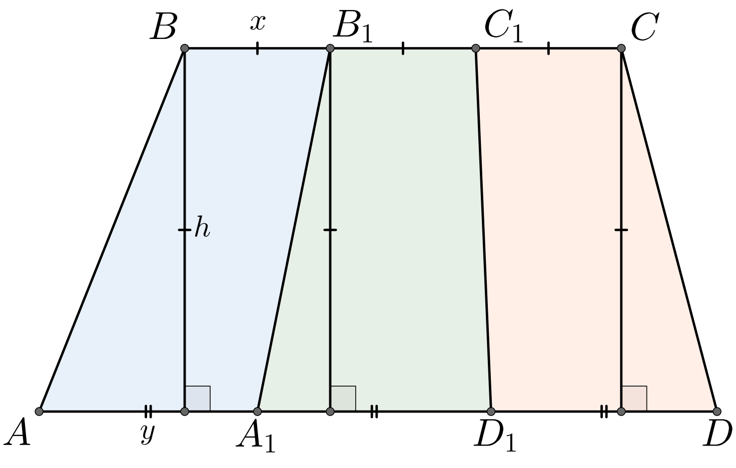
$$x = \frac{1}{3} \cdot BC; \quad y = \frac{1}{3} \cdot AD,$$

h – высота четырехугольника к стороне AD. Тогда

$$S_{ABB_1A_1} = S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{D_1C_1CD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} = \frac{(x+y) \cdot h}{2},$$

значит,

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \left(S_{ABB_1A_1} + S_{D_1C_1CD} \right).$$



Теперь пусть AD и BC пересекаются в точке M. Пусть $\alpha = \angle AMB$. Тогда:

$$S_{D_1C_1CD} = S_{MC_1D_1} - S_{MCD} = \frac{1}{2}(a+y) \cdot (b+x) \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(ax + by + xy) \cdot \sin\alpha;$$

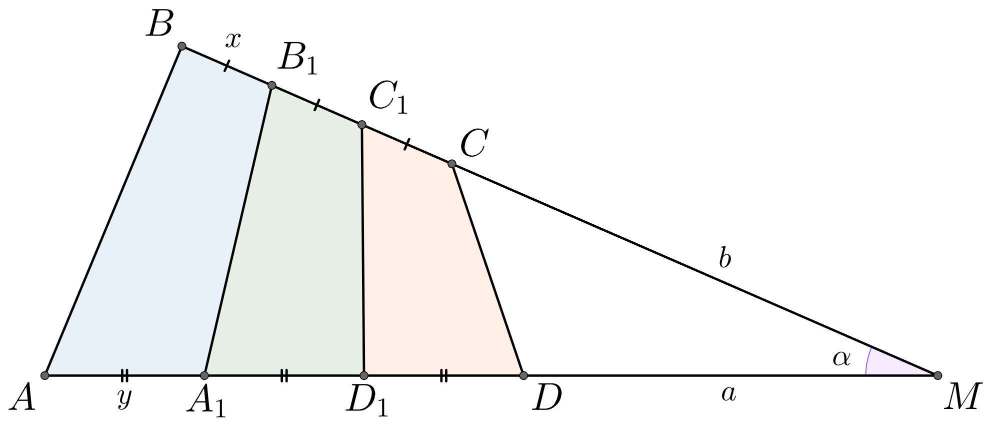
$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{MB_1A_1} - S_{MC_1D_1} = \frac{1}{2}(a+2y) \cdot (b+2x) \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}(a+y) \cdot (b+x) \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(ax + by + 3xy) \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{MBA} - S_{MB_1A_1} = \frac{1}{2}(a+3y)\cdot(b+3x)\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}(a+2y)\cdot(b+2x)\cdot\sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}(ax+by+5xy)\sin\alpha;$$

Отсюда получаем:

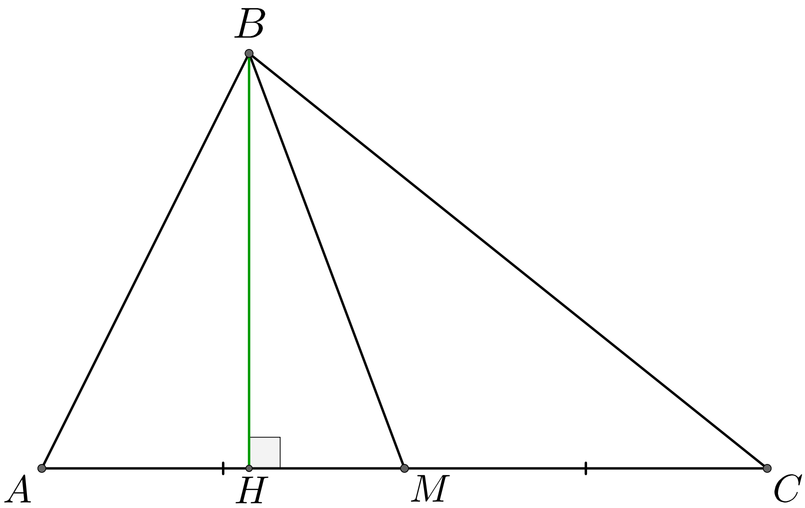
$$\frac{1}{2}\cdot(S_{ABB_1A_1}+S_{D_1C_1CD}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}(ax+by+5xy)\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}(ax+by+xy)\cdot\sin\alpha\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(ax+by+3xy)\cdot\sin\alpha = S_{A_1B_1C_1D_1}. \quad \square$$



15.6 Медиана

1. Треугольники ABM и BMC имеют общую высоту BH, равную h. Пусть $AC = a$, тогда:

$$S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h = \frac{S}{2}. \quad \square$$



2. Мы знаем, что:

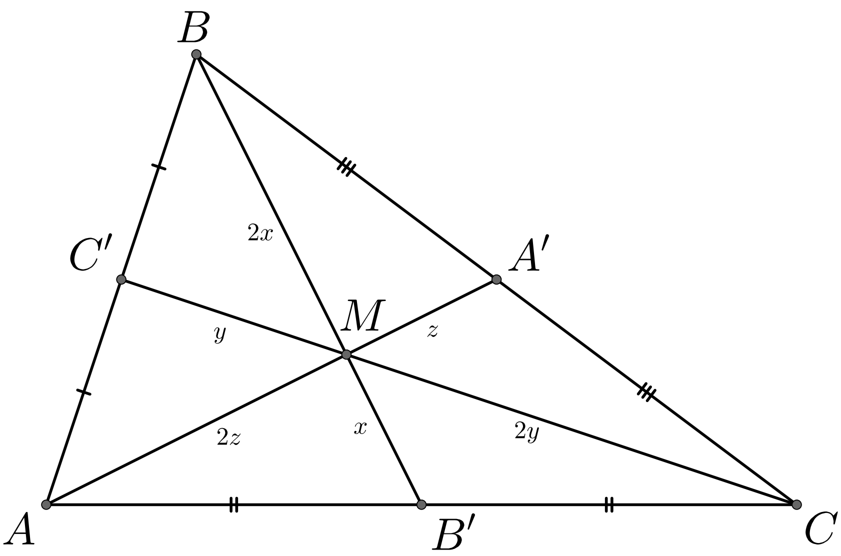
$$S_{AMB'} = S_{B'MC}; \quad S_{AMC'} = S_{C'MB}; \quad S_{CMA'} = S_{A'MB}.$$

Известно, что площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как основания. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, поэтому

$$S_{BAM} = 2S_{AMB'} \quad \text{и} \quad S_{BCM} = 2S_{B'MC},$$

а значит

$$S_{AMB'} = S_{AMC'} = S_{C'MB} = S_{B'MC} = S_{CMA'} = S_{A'MB} = \frac{S}{6}. \quad \square$$

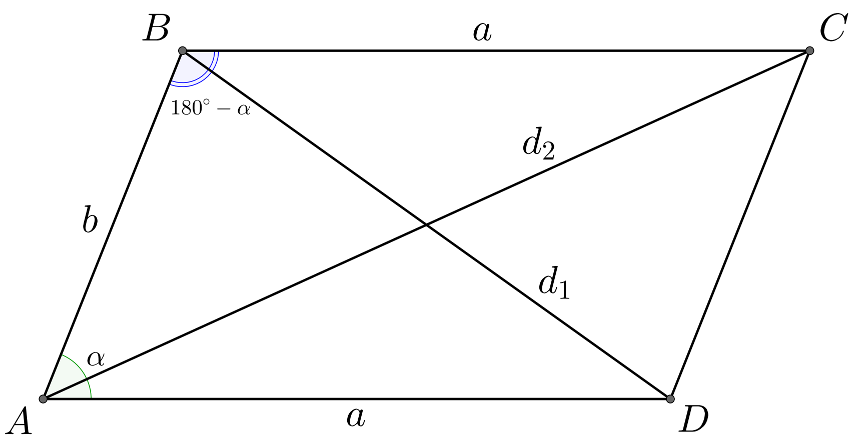


3. Пусть $\angle BAD = \alpha$. По теореме косинусов получаем, что

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

$\angle ABC = 180° - \alpha$, так как $ABCD$ – параллелограмм. Также мы знаем, что

$$\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha.$$



По теореме косинусов получаем второе соотношение:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Сложим полученные равенства:

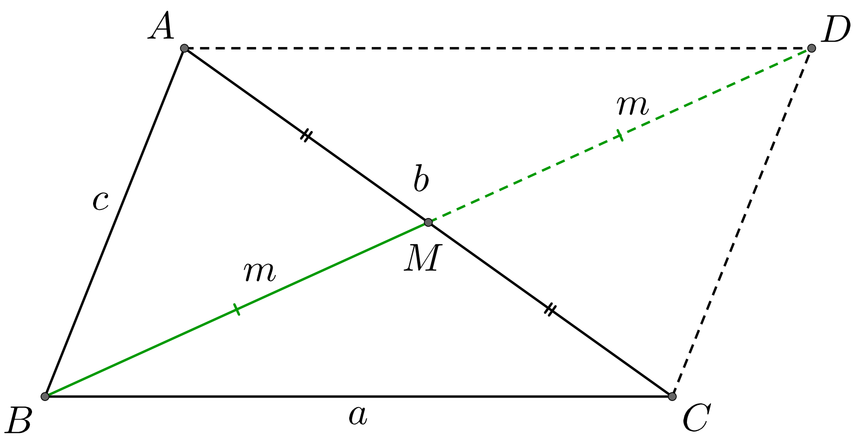
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2). \quad \square$$

4. Продлим медиану BM за точку M на её длину, получим точку D такую, что $BM = MD$. Получим параллелограмм $ABCD$. Для него тождество параллелограмма запишется следующим образом:

$$b^2 + (2m)^2 = 2(a^2 + c^2).$$

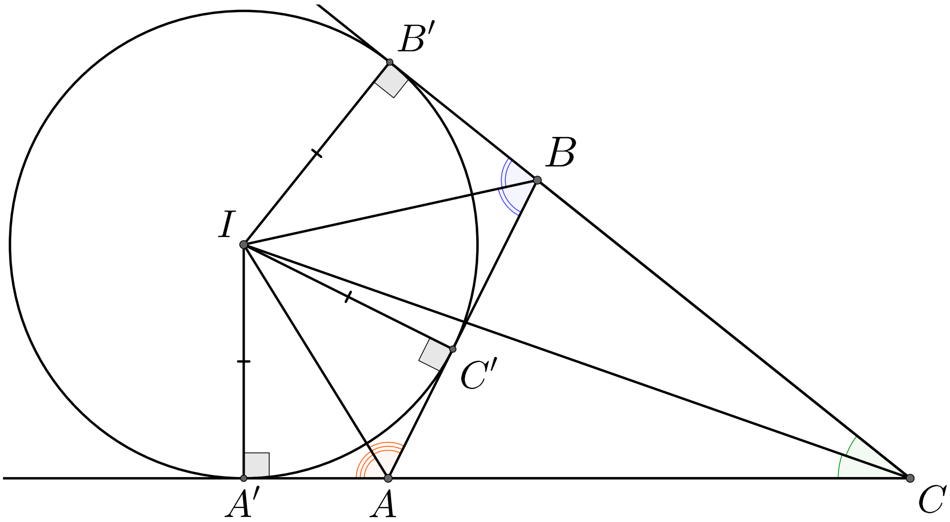
Выразив m^2, получаем:

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}. \quad \square$$



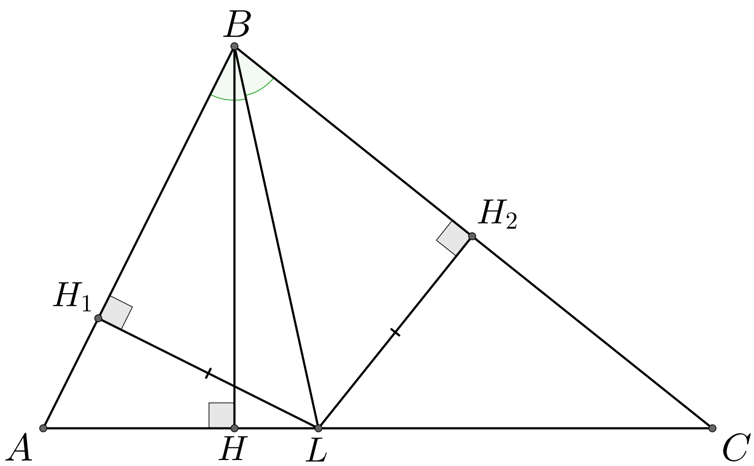
15.7 Биссектриса

1. Пусть I – точка пересечения биссектрис внешних углов $\angle A$ и $\angle B$, IA', IB' – перпендикуляры к продолжениям сторон AC и BC, IC' – перпендикуляры к стороне AB. I лежит на биссектрисе внешнего угла A, значит $IA' = IC'$, аналогично получаем, что $IB' = IC'$, значит $IB' = IA'$, то есть точка I равноудалена от сторон угла C, то есть она лежит на биссектрисе угла C. $IA' = IB' = IC'$, поэтому I – центр вневписанной окружности. $\square$



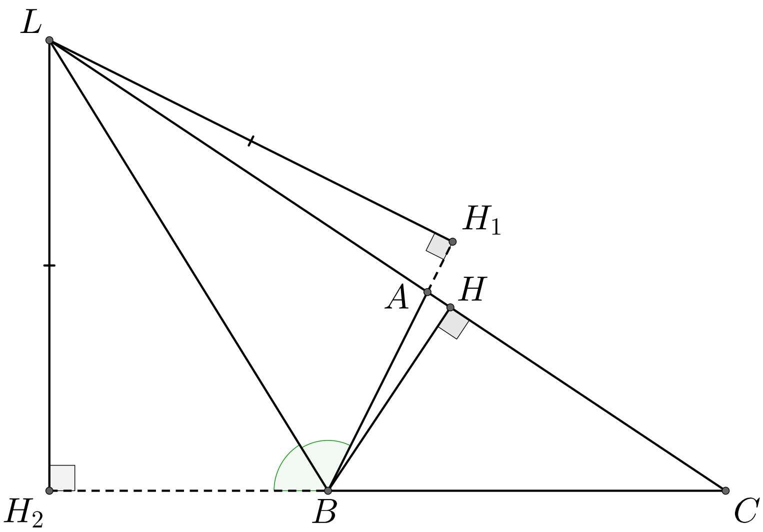
2. Пусть BH – высота треугольника ABC, LH_1 – высота треугольника ABL, LH_2 – высота треугольника BCL. Так как каждая точка на биссектрисе равноудалена от сторон угла, то $LH_1 = LH_2 = h$. Получаем:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AL \cdot BH}{\frac{1}{2} \cdot LC \cdot BH} = \frac{S_{ABL}}{S_{BCL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h} = \frac{AB}{BC}. \quad \square$$



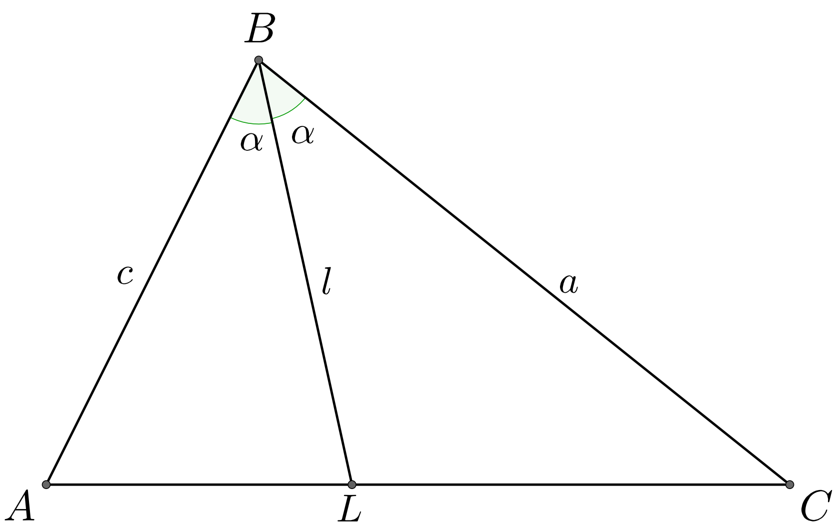
3. Доказательство ничем не будет отлчиаться от доказательства аналогично факта для биссектрисы внутреннего угла. Пусть BH – высота треугольника ABC, LH_1 – высота треугольника ABL, LH_2 – высота треугольника BCL. Так как каждая точка на биссектрисе равноудалена от сторон угла, то $LH_1 = LH_2 = h$. Получаем:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AL \cdot BH}{\frac{1}{2} \cdot LC \cdot BH} = \frac{S_{ABL}}{S_{BCL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h} = \frac{AB}{BC}. \quad \square$$



4. Докажем первую формулу. Вычислим площади треугольников ABL, CBL, ABC:

$$S_{ABL} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot l \cdot \sin\alpha; \; S_{CBL} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l \cdot \sin\alpha; \; S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin 2\alpha.$$



При этом имеем: $S_{ABC} = S_{ABL} + S_{CBL}$. Значит,

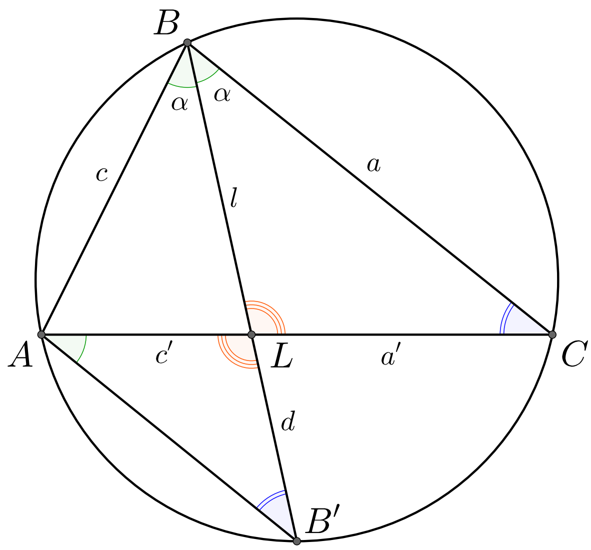
$$c \cdot l \cdot \sin\alpha + a \cdot l \cdot \sin\alpha = a \cdot c \cdot \sin 2\alpha \implies (a + c) \cdot \sin\alpha \cdot l = a \cdot c \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом:

$$l = \frac{2ac\cos\alpha}{a + c}. \quad \square$$

Докажем вторую формулу. Продлим биссектрису BL до пересечения с описанной вокруг ABC окружностью (обозначим эту точку B'). Пусть $LB' = d$, $\angle LBC = \angle CAB'$, так как эти углы опираются на одну и ту же дугу. По тем же причинам $\angle BCA = \angle AB'B$, значит треугольники ALB' и BLC подобны, то есть

$$\frac{l}{c'} = \frac{a'}{d} \implies ld = a'c';$$



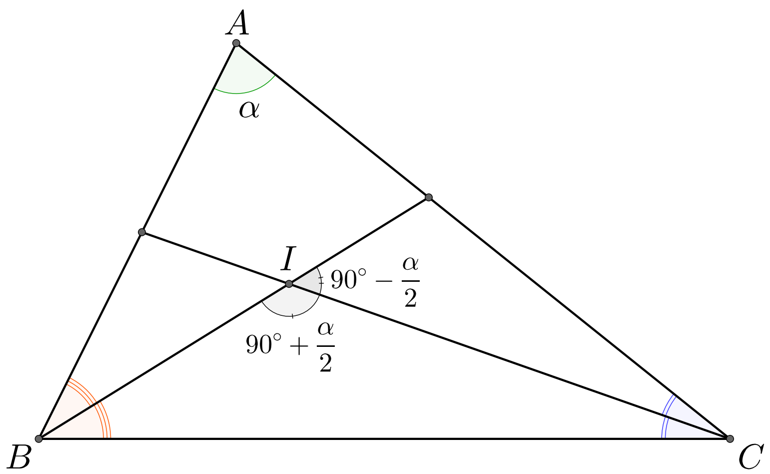
Легко видеть, что треугольники ABB' и LBC подобны, значит

$$\frac{l+d}{a} = \frac{c}{l} \implies l^2 + ld = ac \implies l^2 = ac - a'c'. \quad \square$$

5. Пусть I точка пересечения биссектрис углов $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. Сумма углов треугольника равна $180°$, то есть $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, значит,

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90° + \frac{\alpha}{2},$$

смежный ему равен $90° - \dfrac{\alpha}{2}$. $\square$



6. Мы знаем, что

$$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA)$$

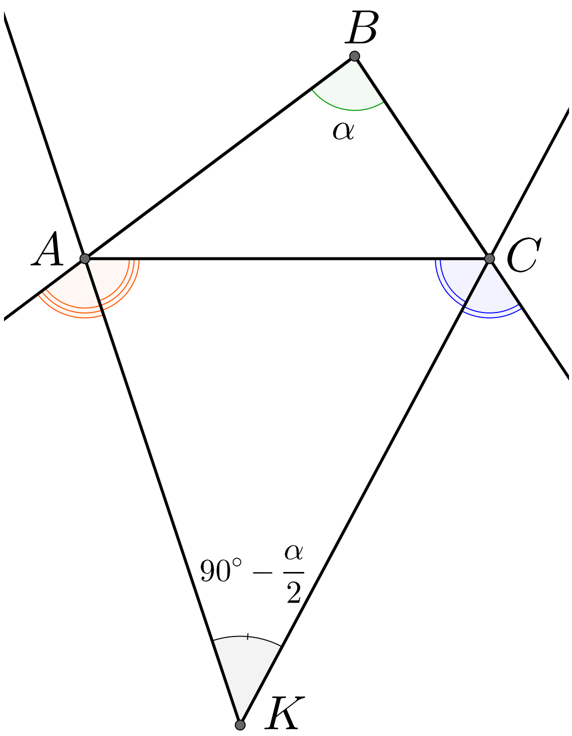
и

$$\angle CAK = 90° - \frac{\angle BAC}{2}, \quad \angle ACK = 90° - \frac{\angle BCA}{2},$$

при этом

$$\angle AKC = 180° - (\angle CAK + \angle ACK) = 180° - \left(90° - \frac{\angle BAC}{2} + 90° - \frac{\angle BCA}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \frac{1}{2}\left(180° - (\angle ABC)\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}. \quad \square$$



7. Докажем отношение

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{a+b}{c}.$$

AO является биссектрисой треугольника $AC'C$, поэтому выполнено соотношение:

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{b}{c - C'B} = \frac{CO}{OC'};$$

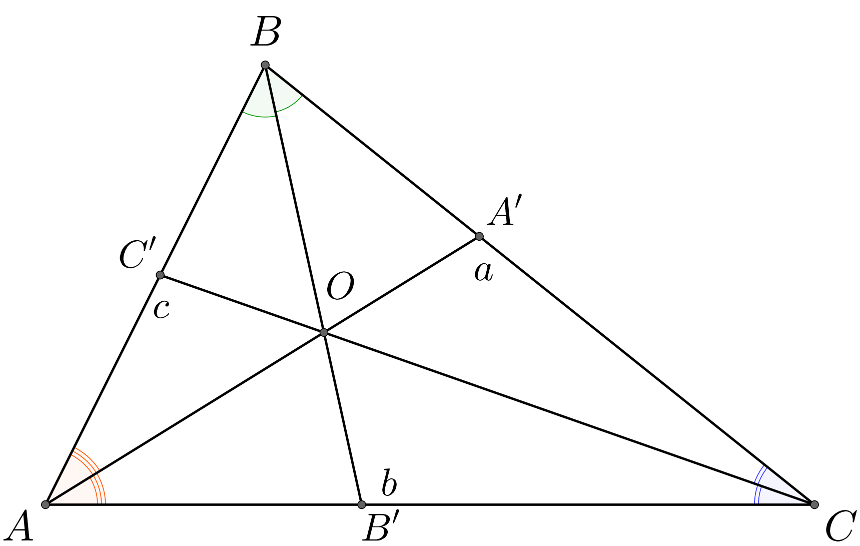
CC' – биссектриса треугольника ABC, поэтому

$$\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{AC'}{C'B} \implies C'B = \frac{AC' \cdot a}{b} \implies C'B = \frac{(c - C'B) \cdot a}{b} = \frac{ac}{b} - C'B \cdot \frac{a}{b} \implies$$

$$\implies C'B\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{ac}{b} \implies C'B = \frac{ac}{a+b}.$$

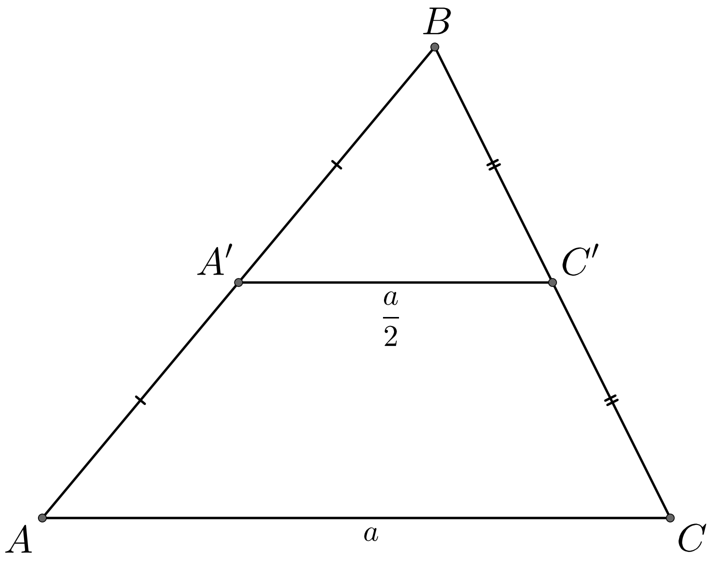
Получаем:

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{b}{c - \dfrac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}. \quad \square$$



15.8 Средняя линия

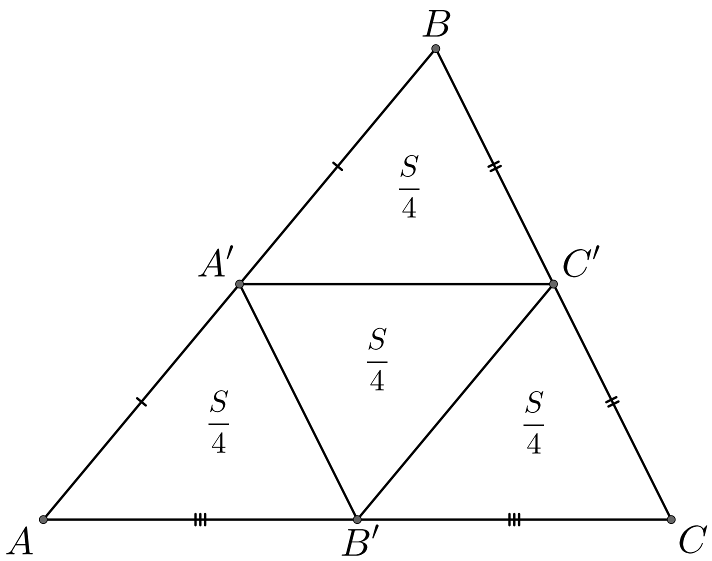
2. Из обратной теоремы Фалеса следует, что отрезки AC и $A'C'$ параллельны. Угол $\angle ABC$ является общим для треугольников ABC и $A'BC'$, при этом $AB = 2A'B$, $BC = 2C'B$, значит ABC и $A'BC'$ подобны по второму признаку подобия с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому $AC = 2A'C'$. То есть средняя линия равна половине основания. $\square$



3. Мы установили, что каждая средняя линия треугольника отсекает треугольник, подобный исходному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, значит, площадь треугольника, отсекаемого средней линией, равна $\frac{S}{4}$ (так как отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия). Таким образом, получаем:

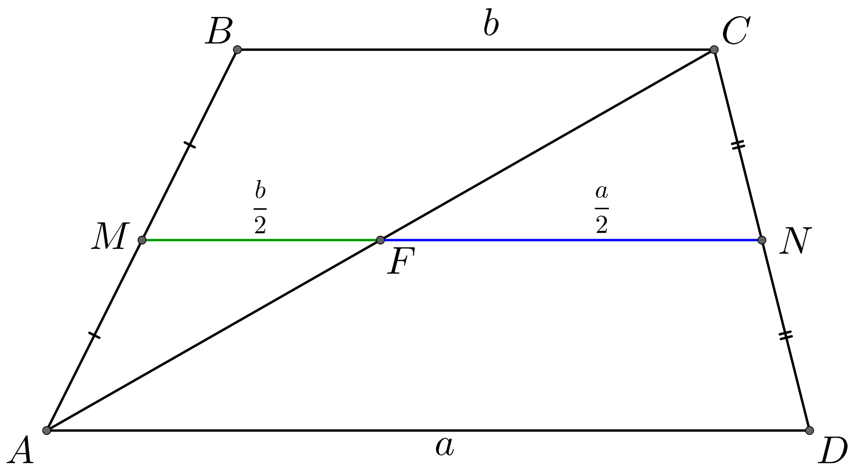
$$S_{AA'B'} + S_{BA'C'} + S_{CB'C'} = \frac{S}{4} + \frac{S}{4} + \frac{S}{4} = \frac{3S}{4}.$$

Поэтому площадь оставшегося треугольника $A'B'C'$ равна также $S - \frac{3S}{4} = \frac{S}{4}$. $\square$



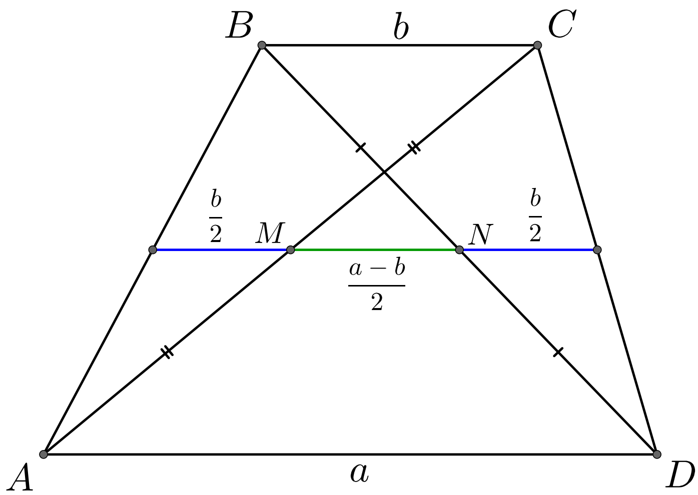
4. Пусть диагональ AC пересекает среднюю линию в точке F. Тогда MF – средняя линия треугольника ABC, значит, $MF = \frac{b}{2}$. FN – средняя линия треугольника ACD, значит, $FN = \frac{a}{2}$. Таким образом, получаем, что

$$MN = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}. \quad \square$$



5. Пусть M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Отрезок, соединяющий M с серединой боковой стороны AB, равен $\frac{b}{2}$. Отрезок, соединяющий N с серединой боковой стороны CD, равен $\frac{b}{2}$. Значит,

$$MN = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}. \quad \square$$



6. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда M_1M_2 – средняя линия треугольника ABC, а значит, отрезок M_1M_2 параллелен отрезку AC и $AC = 2M_1M_2$. M_3M_4 – средняя линия треугольника ACD, значит, отрезок M_3M_4 параллелен отрезку AC и $AC = 2M_3M_4$, то есть отрезки M_1M_2 и M_3M_4 параллельны и равны. Аналогично мы можем доказать, что отрезки M_1M_4 и M_2M_3 параллельны и равны. Значит, четырёхугольник $M_1M_2M_3M_4$ – параллелограмм.
Докажем, что площадь $M_1M_2M_3M_4$ в два раза меньше площади $ABCD$. Имеем:

$$S_{BM_1M_2} = \frac{1}{4}S_{ABC}, \;\; S_{DM_3M_4} = \frac{1}{4}S_{ACD}, \;\; S_{AM_1M_4} = \frac{1}{4}S_{ABD}, \;\; S_{CM_2M_3} = \frac{1}{4}S_{BCD}.$$

При этом

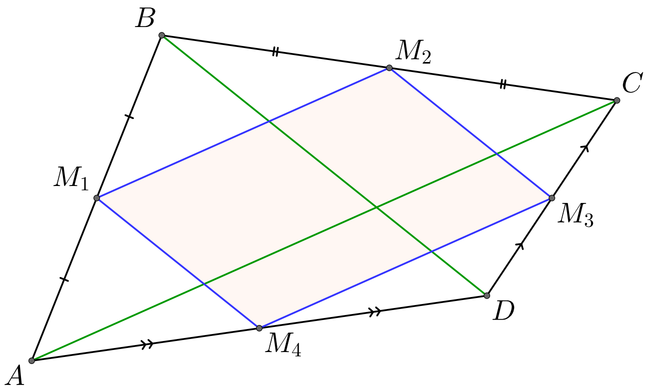
$$S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABCD} = S,$$

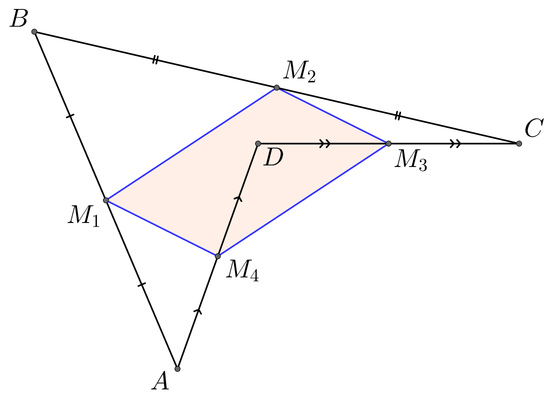
значит,

$$S_{BM_1M_2} + S_{DM_3M_4} + S_{AM_1M_4} + S_{CM_2M_3} = \frac{1}{4} \cdot (S+S) = \frac{S}{2}.$$

Таким образом,

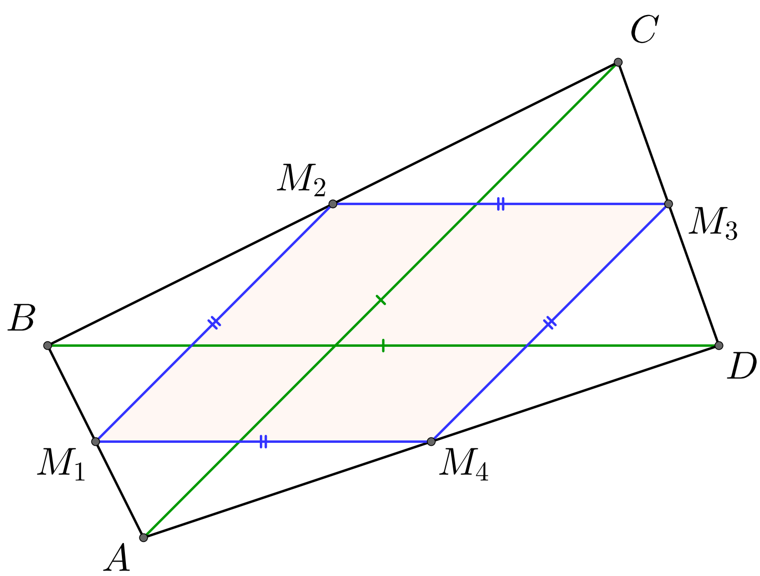
$$S_{M_1M_2M_3M_4} = S - (S_{BM_1M_2} + S_{DM_3M_4} + S_{AM_1M_4} + S_{CM_2M_3}) = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}. \quad \square$$



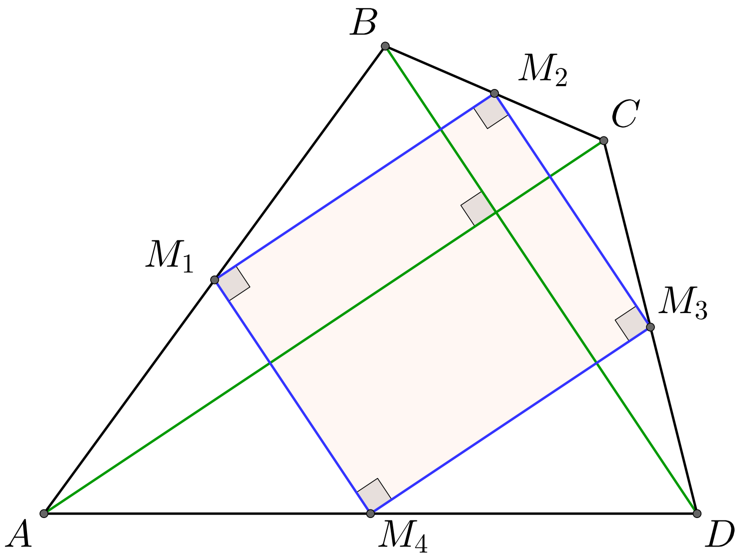


7. В предыдущем пункте мы доказали, что $M_1M_2 = M_3M_4 = \dfrac{AC}{2}$, аналогично мы можем доказать, что $M_1M_4 = M_2M_3 = \dfrac{BD}{2}$. $\square$

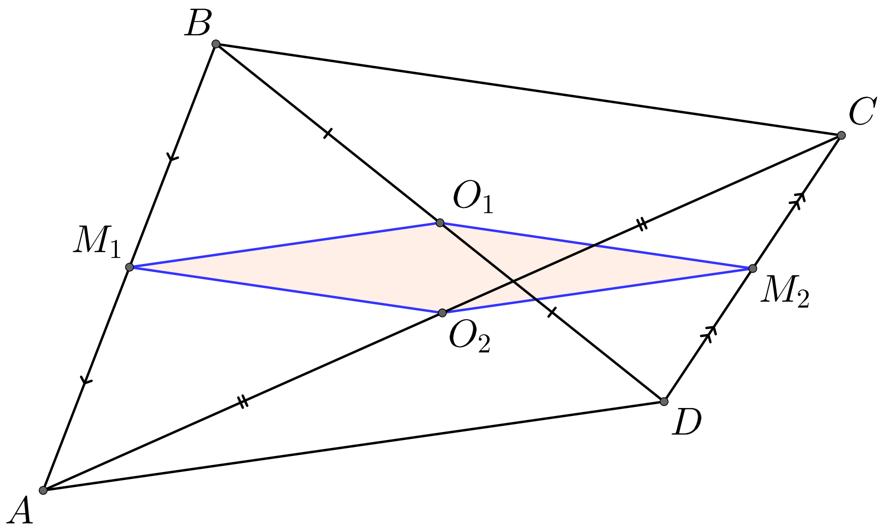
8. Если $AC = BD$, значит $M_1M_2 = M_3M_4 = \dfrac{AC}{2} = M_1M_4 = M_2M_3$, поэтому $M_1M_2M_3M_4$ – ромб.



9. Отрезки M_1M_2 и M_3M_4 параллельны диагонали AC, отрезки M_1M_4 и M_2M_3 параллельны BD, значит углы между соседними сторонами параллелограмма $M_1M_2M_3M_4$ равны углу между диагоналями, то есть углы четырёхугольника $M_1M_2M_3M_4$ равны $90°$, значит, M_1, M_2, M_3, M_4 – прямоугольник. $\square$



10. Пусть $ABCD$ – четырёхугольник. M_1, M_2 – середины сторон AB и CD, O_1 – середина диагонали BD, O_2 – середина диагонали AC. Тогда M_1O_1 – средняя линия треугольника ABD, значит, отрезок M_1O_1 параллелен отрезку AD и $M_1O_1 = \dfrac{AD}{2}$.



M_2O_2 – средняя линия треугольника ACD, значит отрезок M_2O_2 параллелен отрезку AD и $M_2O_2 = \dfrac{AD}{2}$, то есть отрезки M_1O_1 и M_2O_2 параллельны и $M_1O_1 = M_2O_2$. Значит, $M_1O_1M_2O_2$ –параллелограмм. $\square$

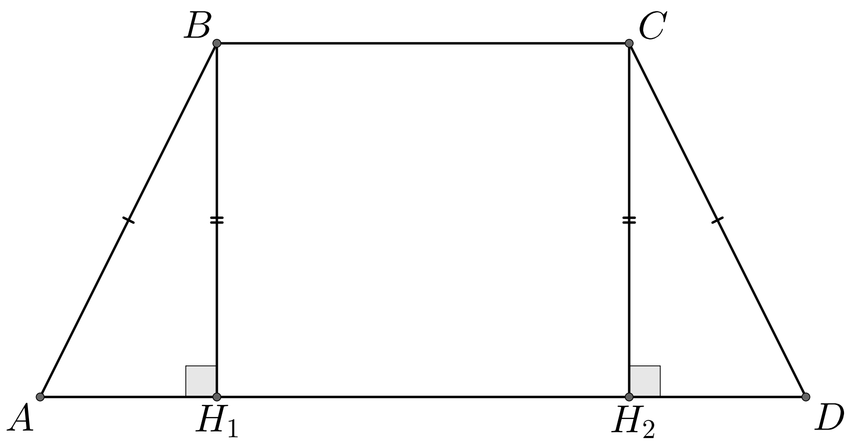
15.9 Трапеция

1. Докажем, что если трапеция равнобедренная, то углы при основаниях равны. Проведём высоты BH_1 и CH_2. В прямоугольных треугольниках ABH_1 и DCH_2 равны гипотенузы AB и CD (так как трапеция равнобедренная) и равны катеты BH_1, CH_2, значит, треугольники ABH_1 и DCH_2 равны, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ и $\angle ABH_1 = \angle DCH_2$, при этом

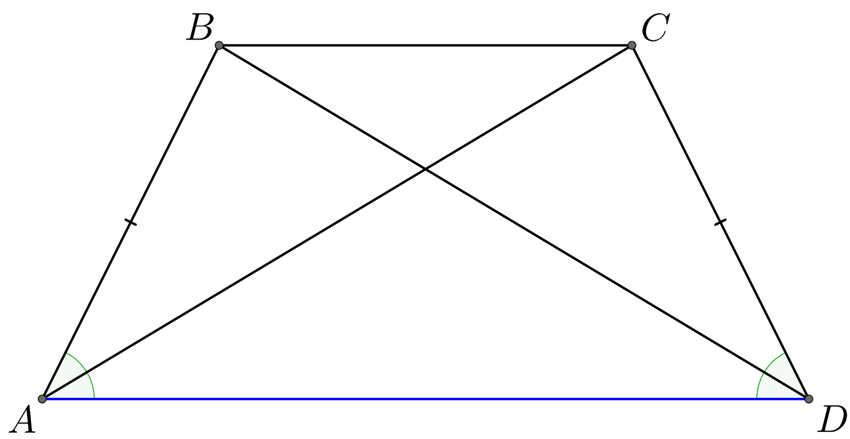
$$\angle H_1BC = \angle H_2CB = 90^\circ,$$

значит, $\angle ABC = \angle DCB$.

Обратно, пусть углы при основаниях равны. Проведём высоты BH_1 и CH_2, они равны, при этом $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle BH_1A = \angle CH_2D = 90^\circ$, поэтому треугольники ABH_1 и DCH_2 равны, значит $AB = CD$. $\square$



2. Рассмотрим треугольники ABD и DCA.
Если $AB = CD$ (то есть трапеция является равнобедренной), то $\angle BAD = \angle CDA$, при этом сторона AD является общей для треугольников ABD и DCA, значит, треугольники равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AC = BD$.



Пусть $AC = BD$, но $AB \neq CD$ (без ограничения общности будем считать, что $CD > AB$). На отрезке AD отметим точку D' так, что $AB = CD'$. То есть трапеция $ABCD'$ является равнобедренной, то есть $AC = BD'$. Далее на прямой AD отметим точку D'' такую, что $BD'' = BD$. Треугольники BDD' и BDD'' являются равнобедренными, поэтому

$$\angle BD''D = \angle BDD' = \angle BD'D.$$

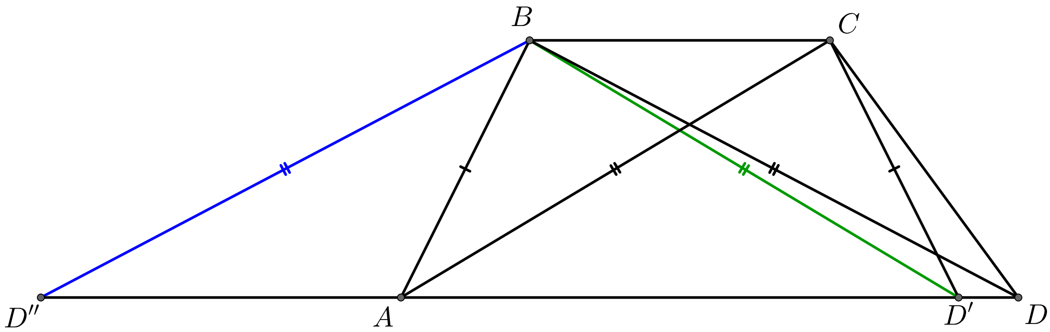
При этом треугольник $BD'D''$ также является равнобедренным и

$$\angle BD'D'' = \angle BD''D.$$

То есть $\angle BD'D'' = \angle BD'D$, при этом данные углы являются смежными, значит

$$\angle BD'D'' = \angle BD'D = \angle BDD' = 90^\circ.$$

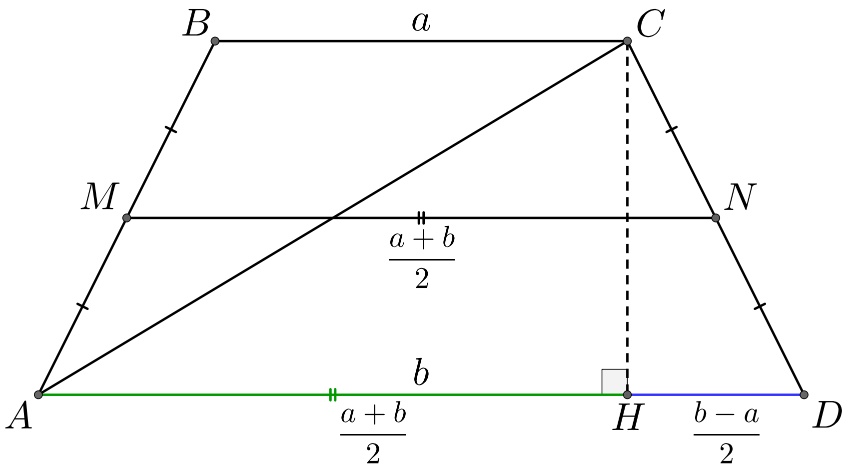
Сумма углов треугольника равна 180°, значит $\angle D'BD = 0^\circ$. Получаем противоречие, то есть $AB = CD$. $\square$



4. Докажем сразу оба свойства. Пусть CH – высота трапеции. Тогда

$$AD = b = AH + HD = a + 2HD,$$

значит, $HD = \frac{b-a}{2}$, $AH = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. $\square$



5. Пусть M, N – середины оснований BC и AD соответственно, Q_1 – точка пересечения диагонали AC и MN, Q_2 – точка пересечения диагонали BD и MN. Треугольники AQ_1N и CQ_1M подобны, значит,

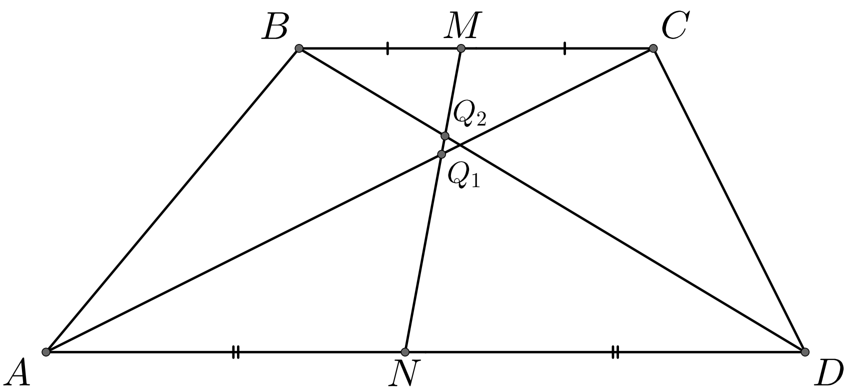
$$\frac{MQ_1}{Q_1N} = \frac{MC}{AN}.$$

Треугольники DQ_2N и BQ_2M подобны, значит,

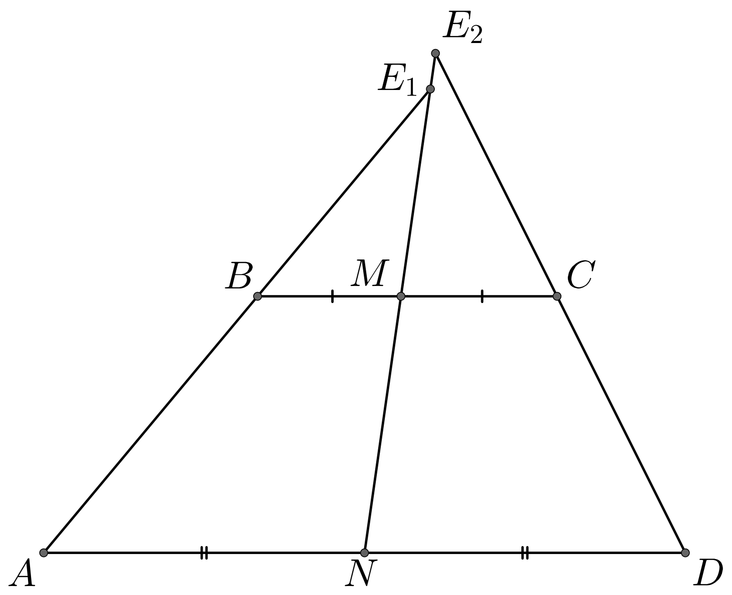
$$\frac{MQ_2}{Q_2N} = \frac{MB}{ND}.$$

При этом $MC = MB$ и $AN = ND$, значит

$$\frac{MQ_1}{Q_1N} = \frac{MQ_2}{Q_2N}.$$



То есть точки Q_1 и Q_2 делят отрезок MN в одном и том же отношении, значит, эти точки совпадают, поэтому диагонали трапеции пересекаются на отрезке MN.
Далее, пусть продолжение боковой стороны AB пересекает продолжение MN в точке E_1, продолжение стороны CD пересекает продолжение MN в точке E_2.



Треугольники BE_1M и AE_1N подобны, значит,

$$\frac{ME_1}{E_1N} = \frac{MB}{AN}.$$

Треугольники ME_2C и NE_2D подобны, значит,

$$\frac{ME_2}{E_2N} = \frac{CM}{ND}.$$

Так как $CM = MB$ и $AN = ND$, то

$$\frac{ME_1}{E_1N} = \frac{ME_2}{E_2N}.$$

Рассмотрим данное соотношение:

$$\frac{E_1N}{ME_1} = \frac{E_2N}{ME_2} \Rightarrow \frac{E_1M + MN}{E_1M} = \frac{E_2M + MN}{E_2M} \Rightarrow 1+\frac{MN}{E_1M} = 1+\frac{MN}{E_2M} \Rightarrow \frac{MN}{E_1M} = \frac{MN}{E_2M} \Rightarrow E_1M = E_2M. \quad \square$$

6. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, тогда $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$, при этом

$$\angle A + \angle B = \angle A + \angle C = 180^\circ.$$

Аналогично доказываем, что

$$\angle B + \angle D = 180^\circ,$$

значит, по первому признаку вписанного четырёхугольника вокруг $ABCD$ можно описать окружность.

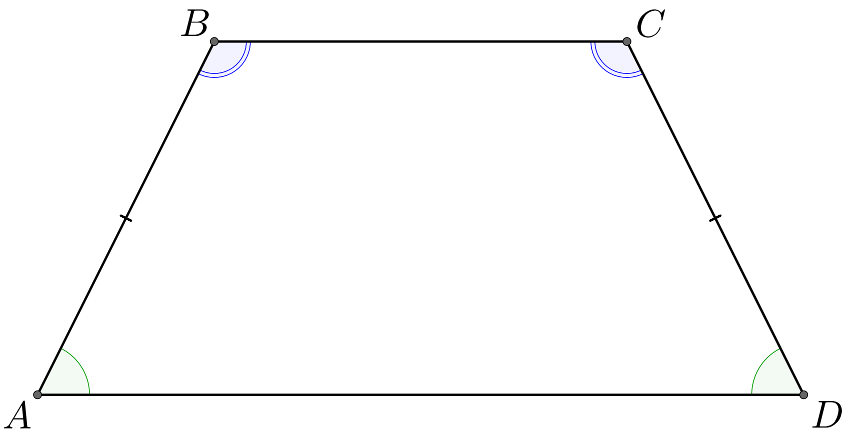
Докажем в обратную сторону. Пусть вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность. Тогда

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ,$$

но также верно, что

$$\angle A + \angle B = 180^\circ,$$

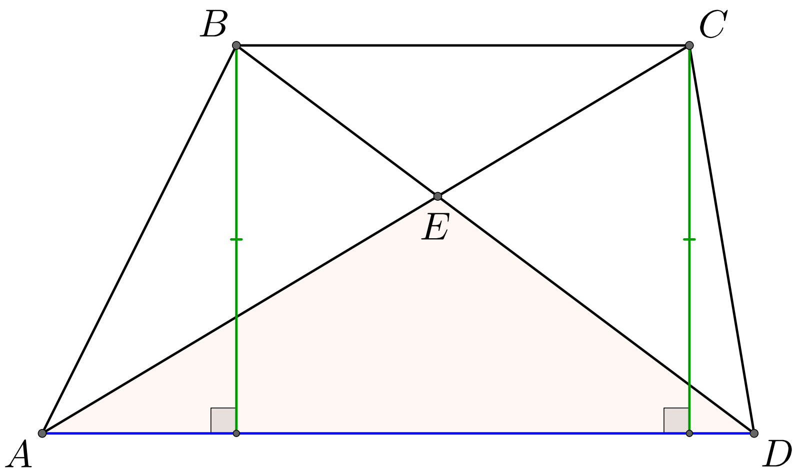
то есть $\angle B = \angle C$, значит, $ABCD$ – равнобедренная трапеция.



7. Для начала докажем равенство площадей треугольников ABE и DCE. Площади треугольников ABD и ACD равны, так как они имеют общую сторону AD, а высоты, проведённые из вершин B и C к стороне AD, являются высотами трапеции. При этом

$$S_{ABD} = S_{AEB} + S_{AED}, \quad S_{ACD} = S_{CED} + S_{AED},$$

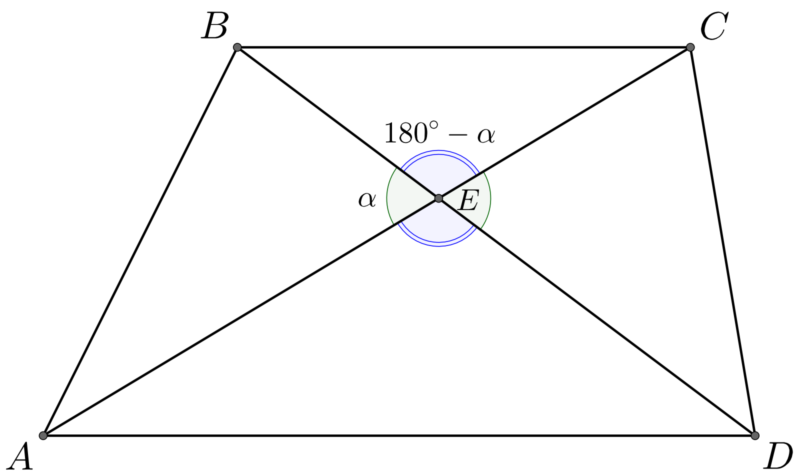
поэтому $S_{AEB} = S_{CED}$.



Пусть E – точка пересечения диагоналей трапеции, $\angle AEB = \alpha$, тогда $\angle BEC = 180^\circ - \alpha$. При этом $\angle AEB = \angle CED$, $\angle BEC = \angle AED$ (как вертикальные углы) и $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.
Найдём площади треугольников AEB и CED:

$$S = S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha,$$

$$S = S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin\alpha.$$



Перемножим полученные равенства:

$$S^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin(180^\circ - \alpha)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin(180^\circ - \alpha)\right) = S_{BEC} \cdot S_{AED}.$$

Таким образом получаем: $S = \sqrt{S_{BEC} \cdot S_{AED}}$. $\square$

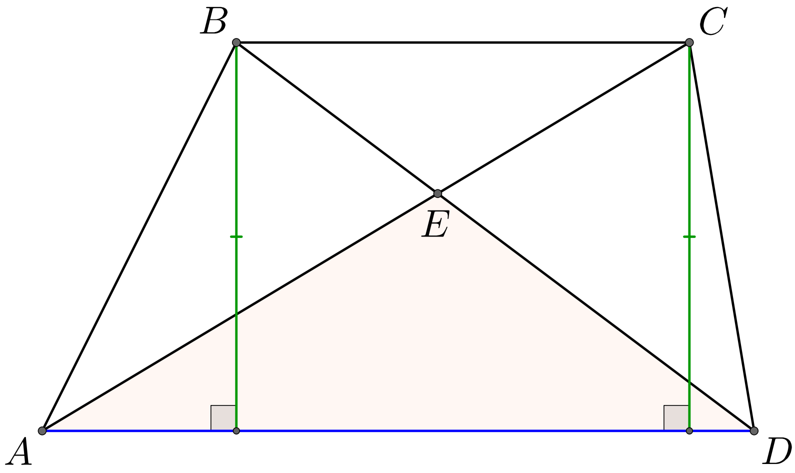
8. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они имеют общую сторону AD. Если

$$S_{AEB} = S_{CED},$$

то

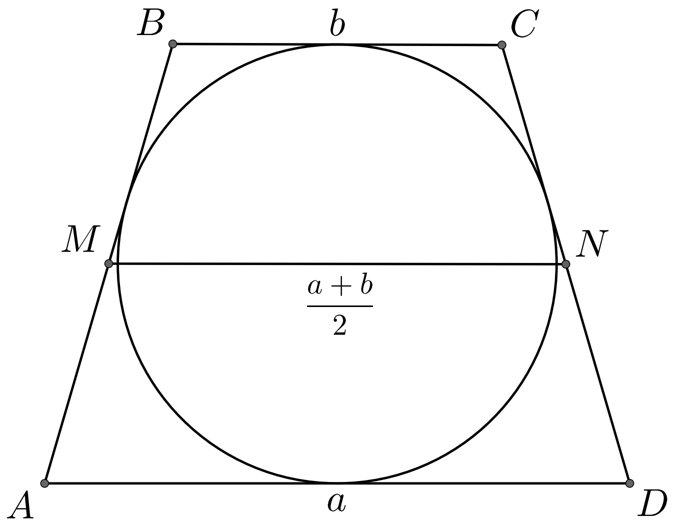
$$S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED} = S_{CED} + S_{AED} = S_{ACD},$$

тогда высоты, проведённые из вершин B и C к стороне AD, равны. Но в таком случае отрезки AD и BC параллельны, то есть $ABCD$ – трапеция. $\square$

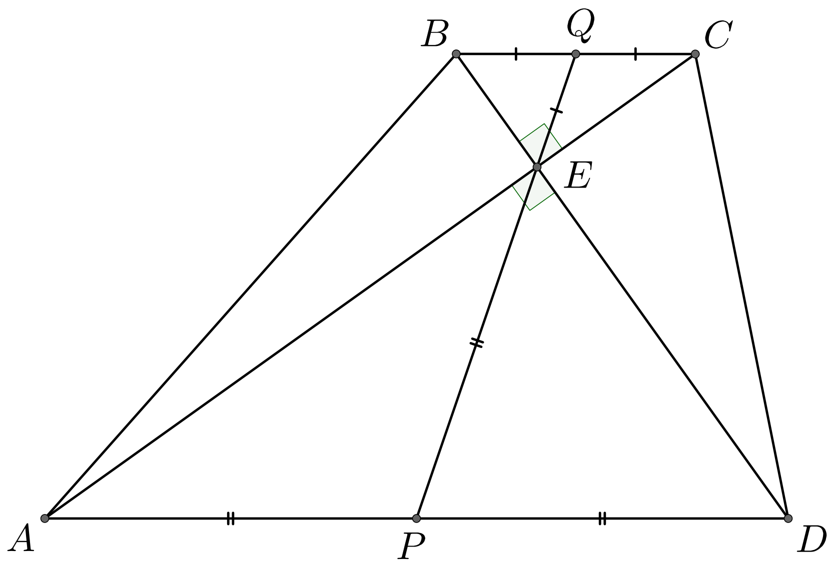


9. Длина средней линии трапеции равна $\frac{a+b}{2}$. Если в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = AD + BC$, при этом $AB = CD$, значит,

$$2AB = AD + BC \implies AB = \frac{AD + BC}{2} = \frac{a+b}{2}. \quad \square$$



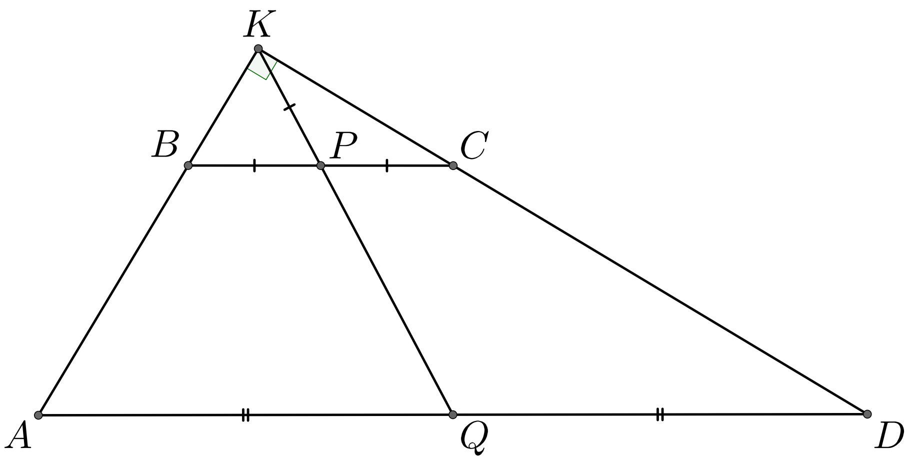
10. Пусть P, Q – середины оснований AD и BC соответственно, E – точка пересечения диагоналей $ABCD$. AED и BEC – прямоугольные треугольники, при этом EP, EQ – медианы этих треугольников, проведённые к гипотенузам, поэтому $EP = \frac{AD}{2}$ и $EQ = \frac{BC}{2}$, значит, $PQ = \frac{AD + BC}{2}$. $\square$



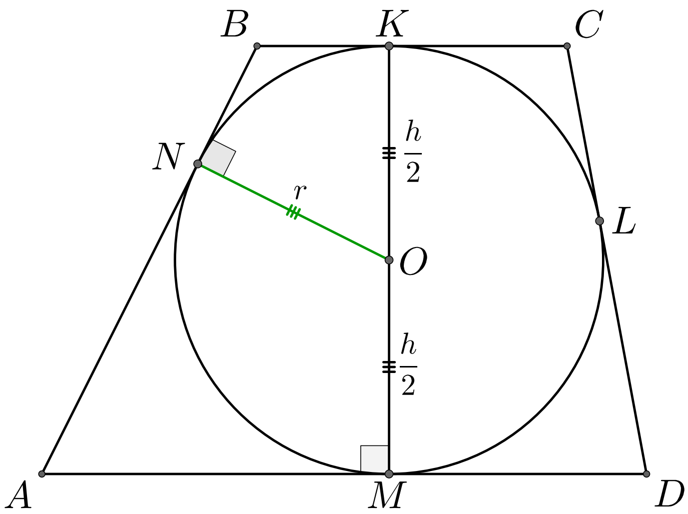
11. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K. Мы знаем, что

$$\angle KAD + \angle ADK = 90^\circ,$$

значит, треугольник AKD – прямоугольный, а также прямоугольным является треугольник BKC (так как отрезки AD и BC параллельны). KQ и KP – медианы треугольников AKD и BKC, проведённые к гипотенузам, поэтому $KQ = \dfrac{AD}{2}$ и $KP = \dfrac{BC}{2}$, значит, $PQ = \dfrac{AD - BC}{2}$. $\square$



12. Пусть M и K – точки касания вписанной окружности с основаниями AD и BC соответственно. N и L – точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами AB и CD соответственно. Так как OM и OK – радиусы окружности, то отрезки OM и OK перпендикулярны основаниям AD и BC и AD параллельны, следовательно, точки O, K и M лежат на одной прямой, а значит KM – высота трапеции. Значит, $OM = OK = r$ и $KM = 2r = h$.

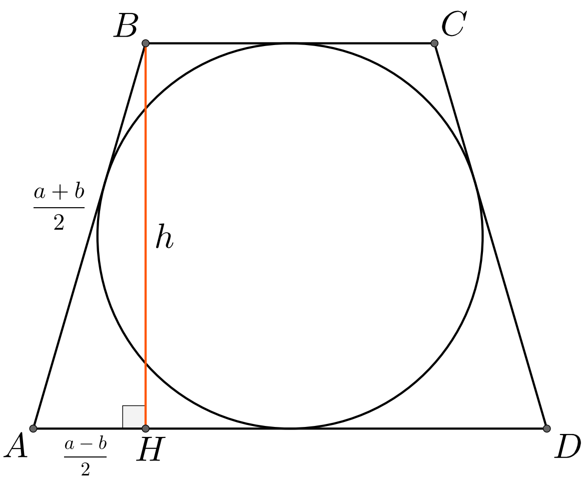


13. Боковая сторона равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна полусумме оснований, значит,

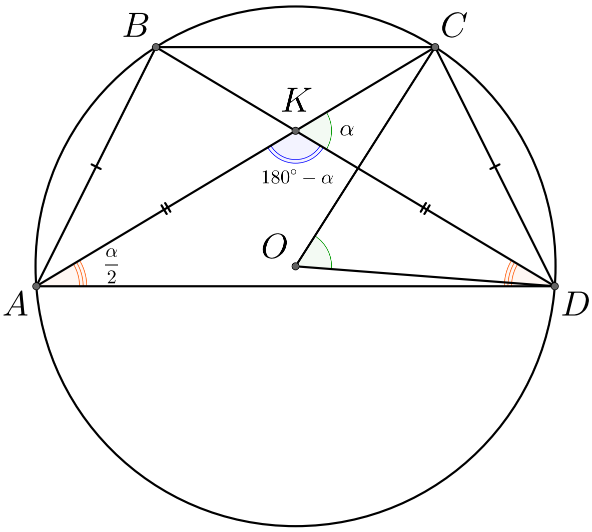
$$AB = c = \frac{a+b}{2}.$$

Рассмотрим высоту BH. Так как трапеция равнобедренная, то $AH = \dfrac{a-b}{2}$. По теореме Пифагора получаем, что $c^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + h^2$ или $h^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = ab$. Мы знаем, что радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен половине высоты этой трапеции. Значит,

$$r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2}. \quad \square$$

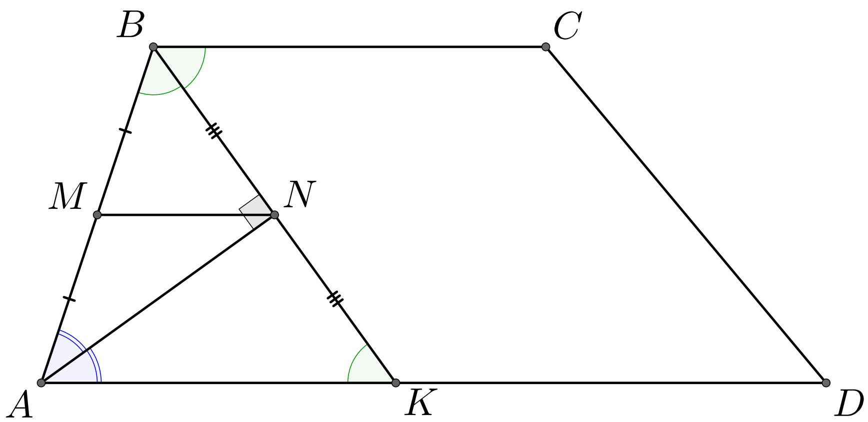


14. Обозначим $\angle CKD = \alpha$. Тогда $\angle AKD = 180^\circ - \alpha$. $ABCD$ – равнобедренная трапеция, значит, AKD – равнобедренный треугольник и $\angle KAD = \angle KDA$. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому $\angle KAD + \angle KDA = 2\angle KAD = 180^\circ - \angle AKD = \alpha$, то есть $\angle KAD = \dfrac{\alpha}{2}$.



Вписанный угол $\angle CAD$ опирается на дугу $\smile{CD}$, центральный угол $\angle COD$ также опирается на эту дугу, значит $\angle COD = 2\angle CAD = \alpha$. □

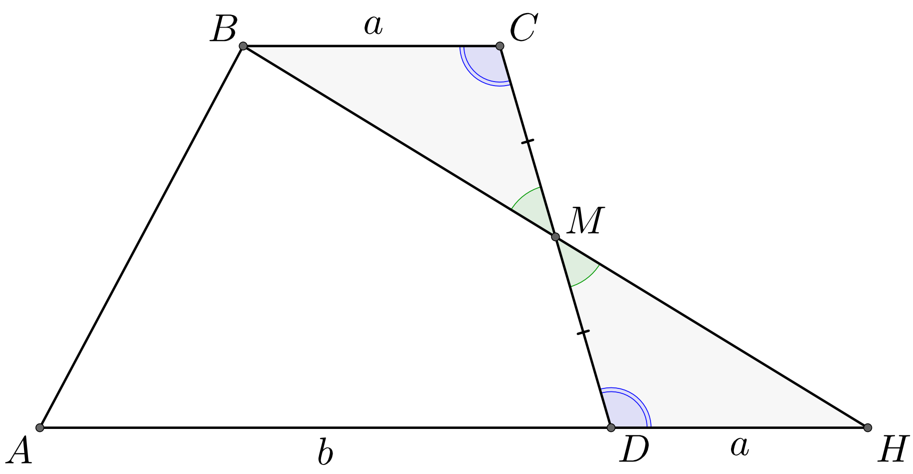
15. Ранее мы доказали, что биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны. Докажем, что в трапеции они пересекаются на средней линии.
Пусть M – середина боковой стороны AB, биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle B$ пересекаются в точке N. Продлим биссектрису BN до пересечения в точке K с основанием AD. $\angle KBC = \angle AKB$, так как они являются внутренними накрест лежащими, при этом $\angle ABK = \angle KBC$, так как BK – биссектриса угла ABC. Получаем, что $\angle ABK = \angle AKB$, то есть ABK – равнобедренный треугольник и $AB = AK$. AN – высота равнобедренного треугольника ABK, проведённая к основанию, поэтому она также является медианой, а значит $BN = KN$.
Получаем, что $AM = MB$ и $BN = NK$, поэтому по обратной теореме Фалеса отрезки MN и AK параллельны, из чего следует, что отрезок MN лежит на средней линии трапеции, а значит на ней лежит и точка N. □



16. Докажем, что треугольники BCM и HDM равны. M – середина CD, значит, $CM = MD$, углы BMC и DMH равны, так как являются вертикальными. Углы BCM и MDH равны, так как являются внутренними накрест лежащими углами при параллельных прямых. Из второго признака равенства треугольников следует, что BCM и HDM равны, значит, $S_{BCM} = S_{HDM}$.
Получаем:

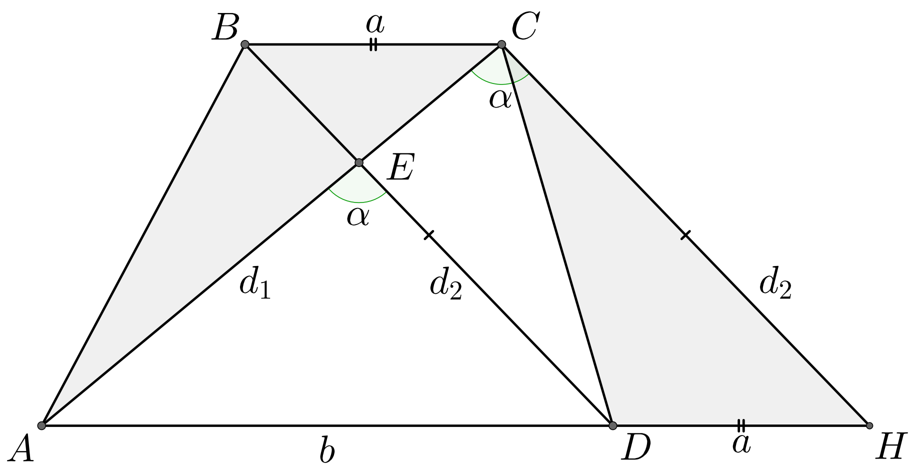
$$S_{ABCD} = S_{ABMD} + S_{BCM}, \quad S_{ABH} = S_{ABMD} + S_{HDM},$$

значит, $S_{ABCD} = S_{ABH}$. □



17. $BCHD$ – параллелограмм, значит, $S_{BDC} = S_{CDH}$. Мы знаем, что $S_{ABE} = S_{CDE}$, при этом $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{BEC}$ и $S_{BCD} = S_{CDE} + S_{BEC}$, значит, $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDH}$. Отсюда получаем, что $S_{ABCD} = S_{ACH}$.
$BCHD$ – параллелограмм, значит $DH = BC = a$. $AH = a + b$ и $BD = CH = d_2$. Значит, площадь треугольника ACH мы можем найти по формуле Герона.

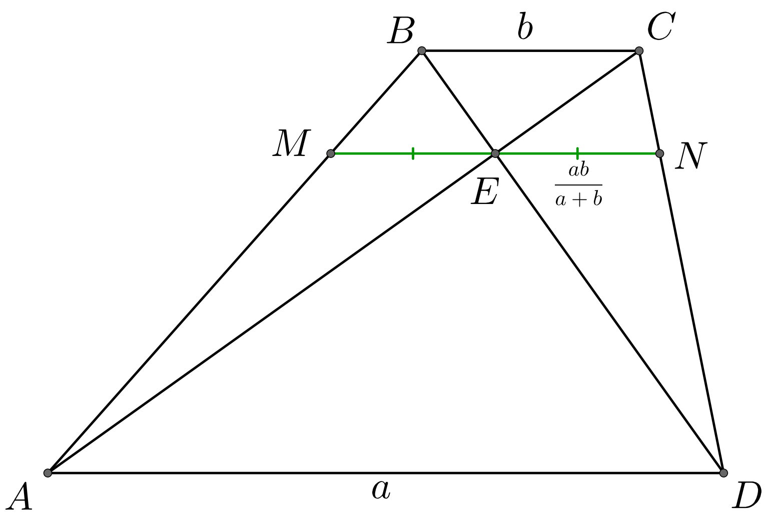
Площадь трапеции $ABCD$ можно найти из формулы: $S_{ABCD} = \dfrac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$. Приравнивая площадь треугольника ACH к площади S_{ABCD}, мы можем выразить $\sin\alpha$. $\square$



19. Пусть E – точка пересечения диагоналей трапеции. $\angle EAD = \angle ECB$ и $\angle EDA = \angle EBC$, так как они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, значит, треугольники ECB и EAD подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{b}{a}$. Получаем:

$$\frac{ED}{BE} = \frac{a}{b} \implies ED = BE\frac{a}{b},$$

$$\frac{EA}{CE} = \frac{a}{b} \implies EA = CE\frac{a}{b}.$$



Треугольники BME и BAD подобны, так как отрезки ME и AD параллельны, причём их коэффициент подобия равен

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BE}{BE+ED} = \frac{BE}{\left(1+\frac{a}{b}\right)BE} = \frac{b}{b+a}.$$

Значит,

$$\frac{ME}{AD} = \frac{b}{b+a} \implies ME = \frac{ab}{a+b}.$$

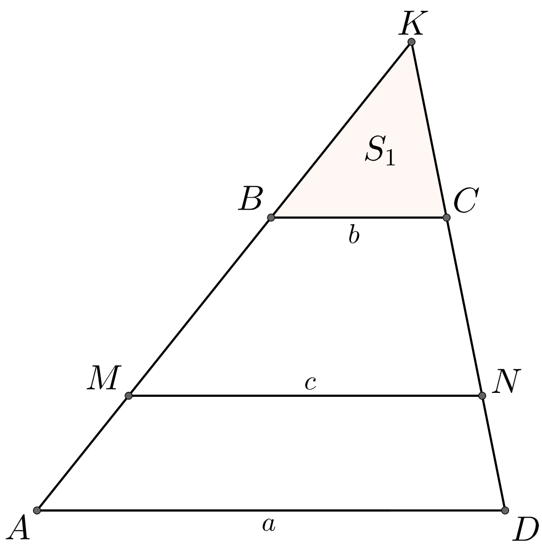
Проводя аналогичные рассуждения для треугольников CEN и CAD мы получаем, что $EN = \dfrac{ab}{a+b}$.

Таким образом, $MN = ME + EN = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. $\square$

20. Пусть $MN = c$. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K. Отрезки AD, MN и BC параллельны, поэтому треугольники MKN и BKC подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{c}{b}$, а также подобны треугольники AKD и BKC с коэффициентом подобия $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{a}{b}$.

Пусть $S_1 = S_{BKC}$, $S = S_{AMND} = S_{MBCN}$. Известно, что площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, значит:

$$\frac{S_{MKN}}{S_{BKC}} = \frac{S+S_1}{S_1} = \frac{S}{S_1} + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \implies c^2 = b^2\left(\frac{S}{S_1}+1\right) \implies c = b\sqrt{\left(\frac{S}{S_1}+1\right)}.$$



Аналогично получаем, что

$$\frac{S_{AKD}}{S_{BKC}} = \frac{2S+S_1}{S_1} = 2\frac{S}{S_1}+1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies \frac{S}{S_1} = \frac{a^2-b^2}{2b^2}.$$

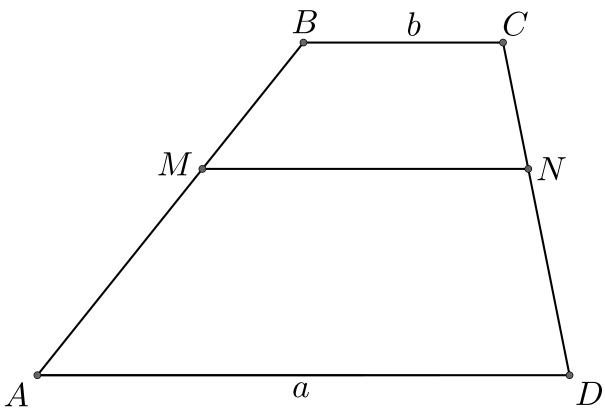
То есть

$$c = b\sqrt{\left(\frac{S}{S_1}+1\right)} = b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2b^2}+1} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad \square$$

21. Трапеции $MBCN$ и $AMND$ подобны, а значит $\dfrac{AD}{MN} = \dfrac{MN}{BC}$, поэтому

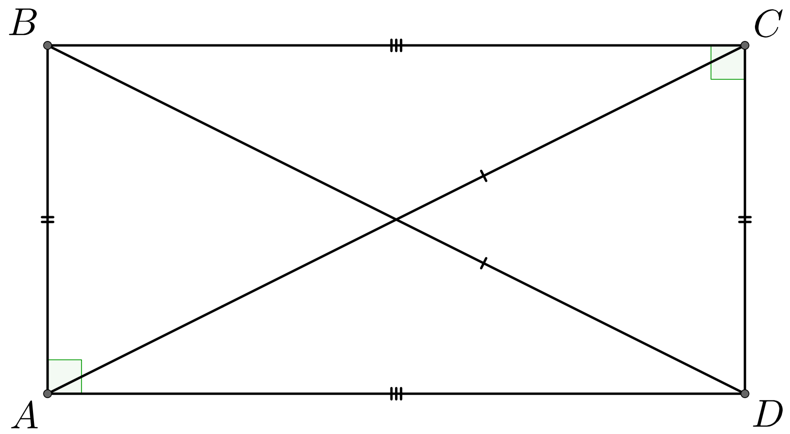
$$MN^2 = AD \cdot BC = ab,$$

то есть $MN = \sqrt{ab}$. $\square$

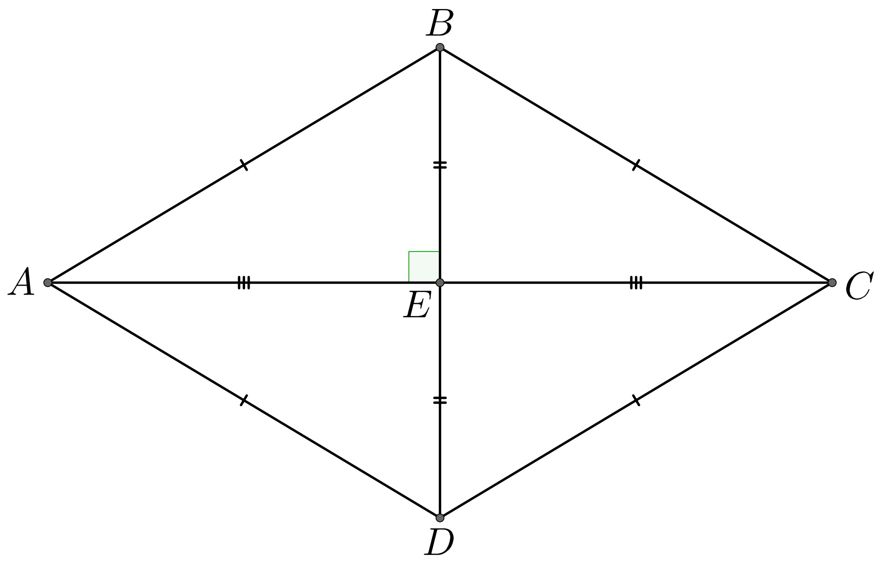


15.10 Основные четырёхугольники

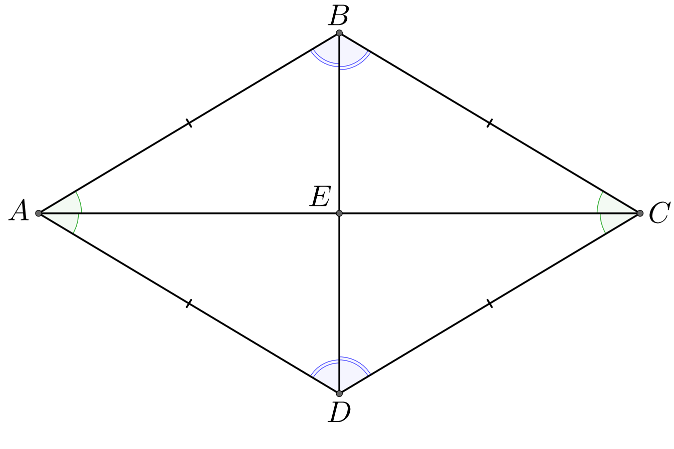
1. $ABCD$ – прямоугольник, следовательно, $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle BAD = \angle ADC$. Получаем, что треугольники BAD и ADC равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AC = BD$. $\square$



2. Пусть E – точка пересечений диагоналей ромба. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть $AE = EC$ и $BE = ED$. Треугольник ABC является равнобедренным, причём BE – медиана треугольника ABC, проведённая к основанию, а значит, она также является высотой, поэтому отрезок BE перпендикулярен отрезку AC, а значит, BD перпендикулярен AC. $\square$

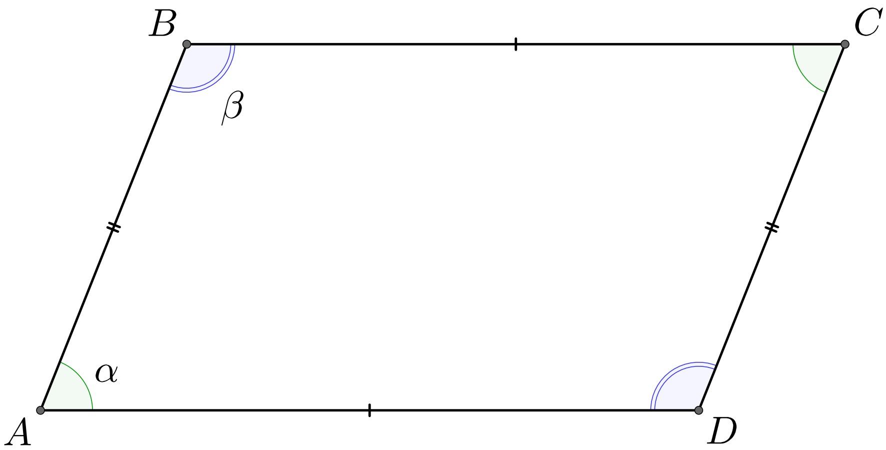


3. Треугольники ABC, ABD, ADC, DCB являются равнобедренными, поэтому их медианы BE, AE, DE и CE также являются биссектрисами, а значит, $\angle ABE = \angle CBE$, $\angle BAE = \angle DAE$, $\angle ADE = \angle CDE$ и $\angle BCE = \angle DCE$. $\square$



4. Углы A и B являются внутренними односторонними при параллельных прямых, поэтому $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. По тем же причинам сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна $180°$, в частности, верно, что $\angle BAD + \angle ADC = 180°$. А значит, $\angle ADC = 180° - \angle BAD = \angle ABC$. Аналогично получим, что $\angle BAD = \angle BCD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сумма любых двух соседних углов равна $180°$. Тогда $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, причём эти углы являются внутренними односторонними при прямых BC, AD и секущей AB. Отсюда получаем, что отрезки AD и BC параллельны. Аналогично можем доказать, что параллельны отрезки AB и CD. □



5. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360°.$$

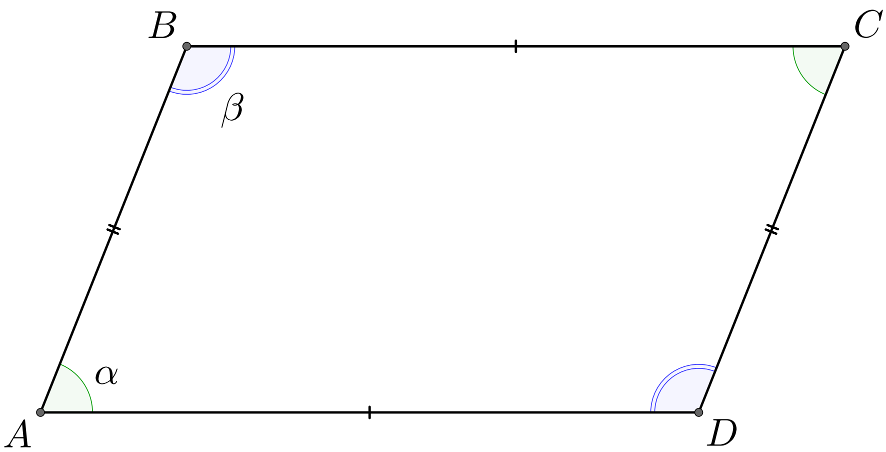
Также мы знаем, что

$$\angle DAB = \angle BCD \text{ и } \angle ABC = \angle CDA.$$

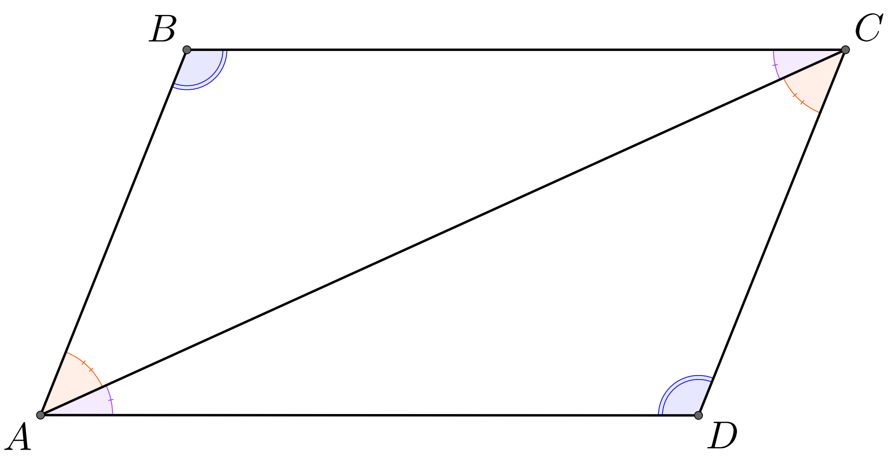
Отсюда следует, что

$$\angle DAB + \angle ABC = 180°.$$

Аналогично, сумма других соседних углов также равна $180°$, а значит, $ABCD$ – параллелограмм. □



6. Углы $\angle BAC$ и $\angle ACD$ являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, поэтому $\angle BAC = \angle ACD$. Аналогично доказываем, что $\angle BCA = \angle CAD$. При этом сторона AC является общей для этих треугольников, а значит, они равны по двум углам и стороне между ними. Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

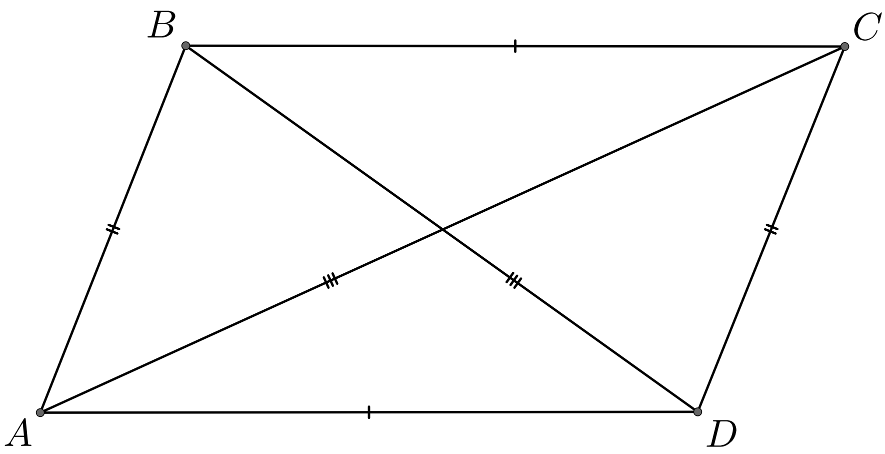


Докажем обратное утверждение. Рассмотрим треугольники ABC и CDA. Мы знаем, что $AB = CD$ и $BC = AD$, при этом AC – общая сторона для наших треугольников. Значит треугольники ABC и CDA равны по трём сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle ACD = \angle BAC$, то есть отрезки AB и CD, AD и BC попарно параллельны. $\square$

7. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $AC = BD$. Тогда из третьего признака равенства треугольников следует, что треугольники ABD и DCA равны. Причём $\angle BAD = \angle ADC$, но по свойству параллелограмма верно, что

$$\angle BAD + \angle ADC = 180°,$$

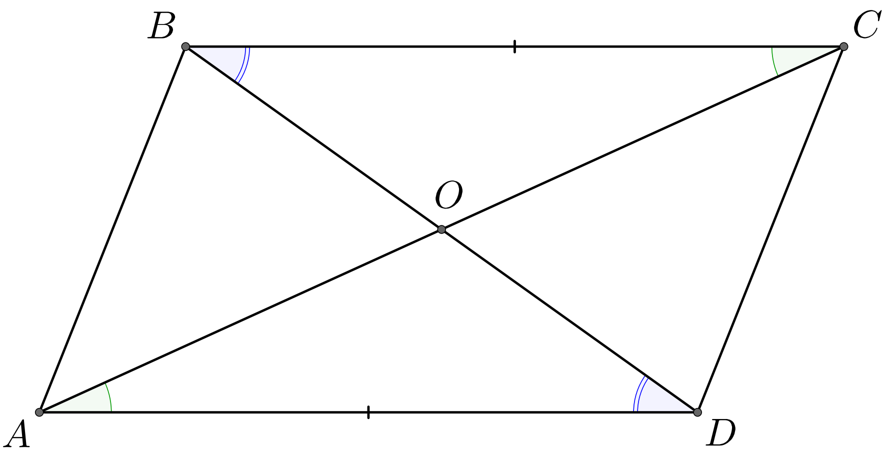
значит $\angle BAD = \angle ADC = 90°$, поэтому $ABCD$ – прямоугольник. $\square$



8. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и равны. Рассмотрим треугольники ABC и CDA. BC и AD параллельны, а значит, $\angle BCA = \angle CAD$. При этом $AD = BC$ и AC – общая сторона для данных треугольников. Из этого следует, что треугольники ABC и CDA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = CD$ и, значит, в $ABCD$ противоположные стороны равны, то есть $ABCD$ – параллелограмм. $\square$

9. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Рассмотрим треугольники AOD и COB. Углы $\angle OAD$ и $\angle OCB$ являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, а значит, $\angle OAD = \angle OCB$. По тем же причинам верно, что $\angle OBC = \angle ODA$. В параллелограмме противоположные стороны равны, а значит, $AD = BC$. Таким образом треугольники AOD и COB равны по двум углам и стороне между ними, поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$.

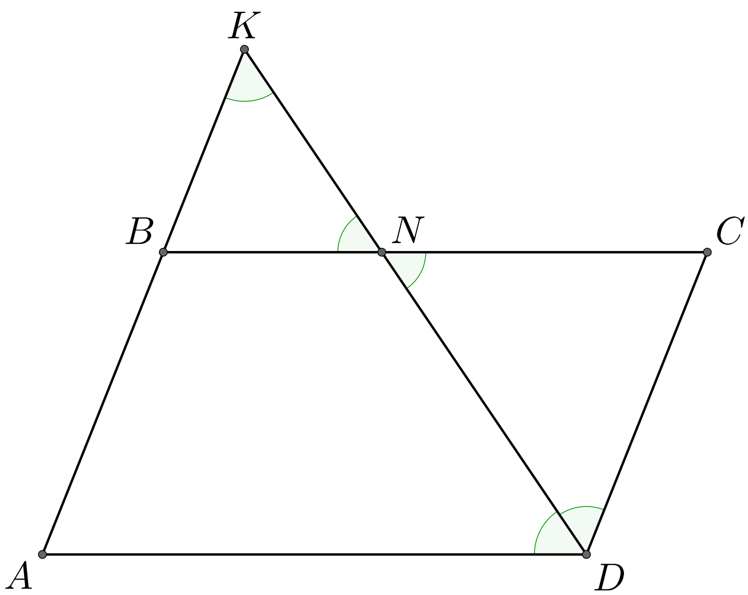
Докажем обратное утверждение. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$, а также $\angle AOD = \angle BOC$, так как они являются вертикальными. Получаем, что треугольники AOD и COB равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $AD = BC$ и $\angle OAD = \angle OCB$. Таким образом, отрезки AD и BC параллельны и равны, то есть $ABCD$ – параллелограмм. $\square$



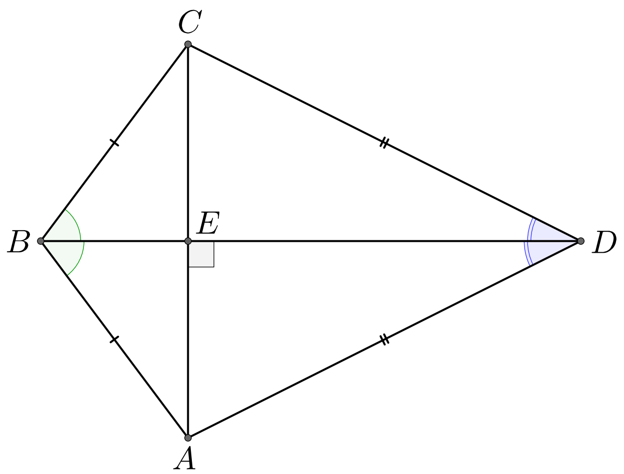
10. Заметим, что $\angle ADN = \angle DNC$, так как данные углы являются накрест лежащими. То есть $\angle DNC = \angle NDC$, значит, треугольник DCN является равнобедренным.
Углы BNK и DNC равны, так как являются вертикальными. $\angle NDC = \angle AKN$, так как данные углы являются накрест лежащими. Значит,

$$\angle AKD = \angle ADK = \angle BNK$$

и треугольники NBK и DAK являются равнобедренными.

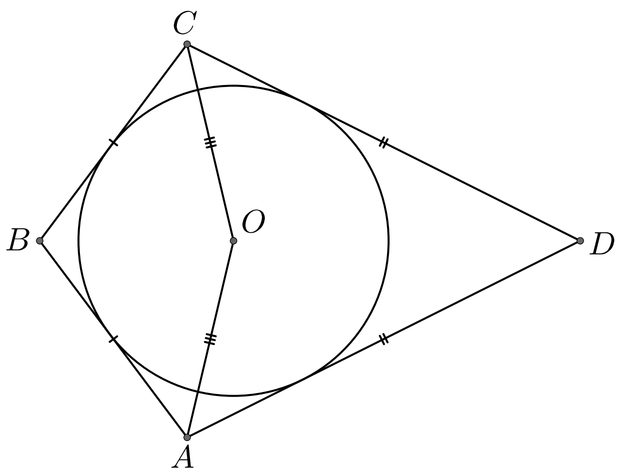


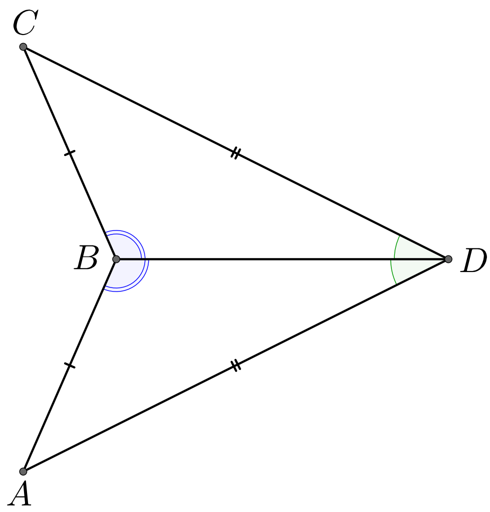
11. Пусть $ABCD$ – дельтоид, причём $BC = AB$ и $AD = CD$. Рассмотрим треугольники BCD и BAD. Сторона BD является общей для этих треугольников, а значит, они равны по трём сторонам. Отсюда получаем, что $\angle CBD = \angle DBA$ и $\angle ADB = \angle CDB$. □



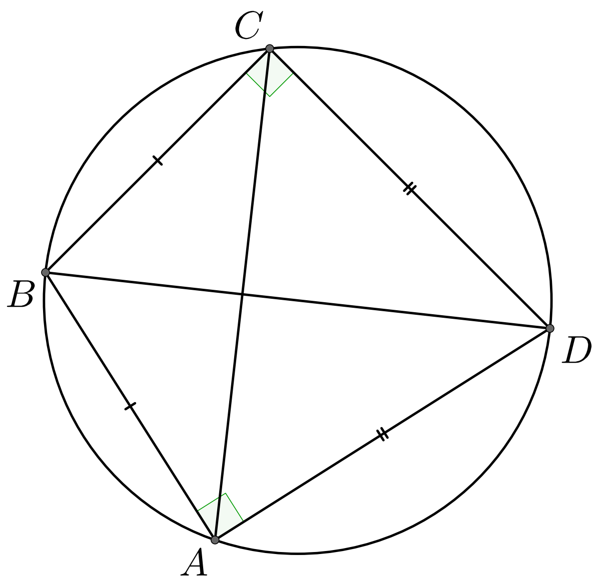
12. Пусть E – точка пересечения диагоналей дельтоида. Тогда BE и DE – биссектрисы равнобедренных треугольников BAC и DAC соответственно. Эти биссектрисы проведены к основаниям равнобедренных треугольников, а значит, они также являются высотами. □

13. Центр вписанной в дельтоид окружности лежит на биссектрисе угла $\angle B$, то есть $\angle CBO = \angle ABO$. Рассмотрим треугольники CBO и ABO. $AB = BC$ и BO – общая сторона для этих треугольников. Тогда получаем, что данные треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $CO = OA$. □





14. Пусть вокруг дельтоида $ABCD$ можно описать окружность, причём $AB = BC$ и $AD = CD$. Рассмотрим треугольники BCD и BAD. Сторона BD является общей для этих треугольников, а значит, они равны по трём сторонам, значит, $\angle BCD = \angle BAD$. Так как вокруг данного дельтоида можно описать окружность, то $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, но тогда $\angle BCD = \angle BAD = 90°$. □



Обратно, если у дельтоида $ABCD$ $\angle BCD = \angle BAD = 90°$, то $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, значит, вокруг дельтоида можно описать окружность. $\square$

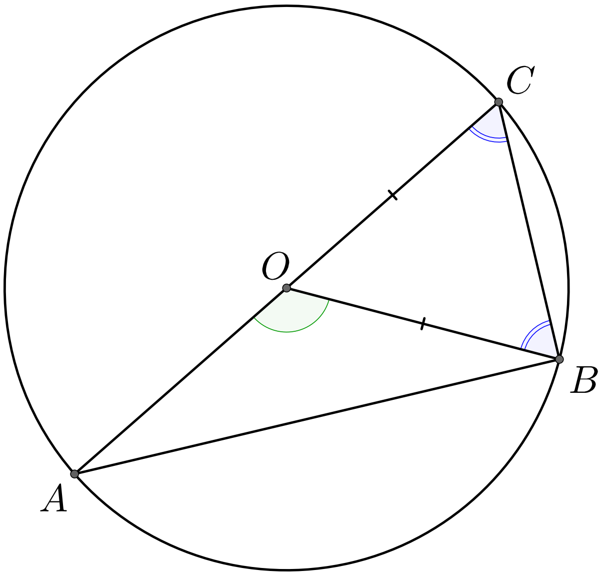
15.11 Вписанные и центральные углы

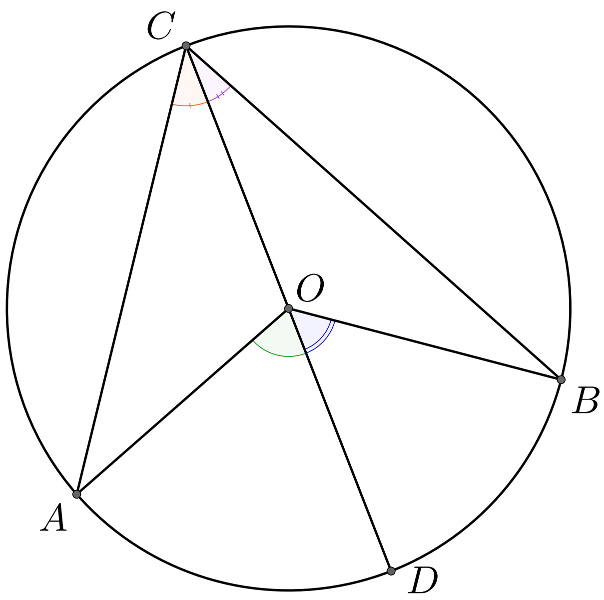
1. Рассмотрим 3 случая расположения точки C.

Случай 1: Пусть точка O лежит на отрезке AC. Тогда AC – диаметр и $OC = OB$, то есть треугольник COB – равнобедренный и $\angle OCB = \angle OBC$. Внешний угол $\angle AOB$ равен сумме внутренних, не смежных с ним. Получаем, что

$$\angle AOB = \angle OCB + \angle OBC = 2\angle OCB = 2\angle ACB.$$

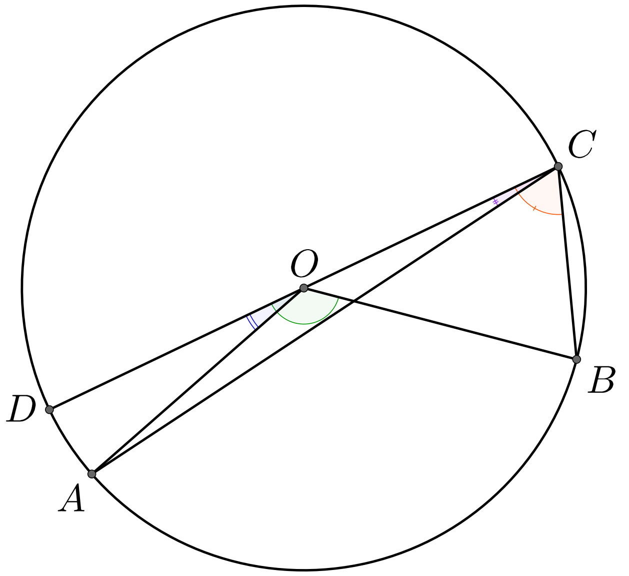
Случай 2: Пусть точка O лежит внутри угла ACB. Продолжим прямую CO до пересечения с окружностью в точке D. Точка O лежит на отрезке CD, а значит, $\angle AOD = 2\angle ACD$ и $\angle DOB = 2\angle DCB$ (см. случай 1), поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB$.



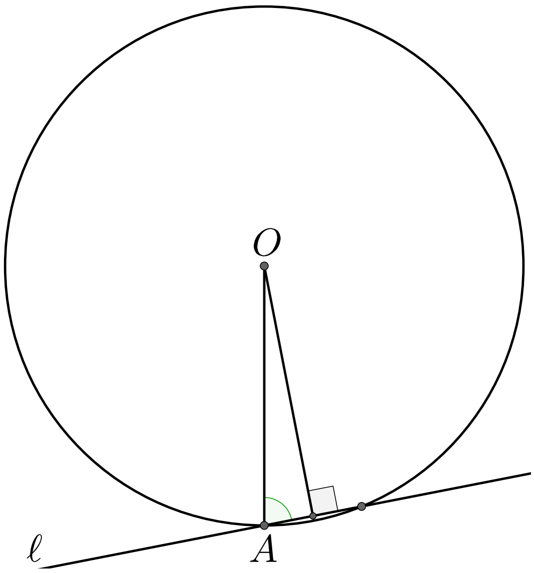


Случай 3: Пусть точка O лежит вне угла ACB. Продолжим прямую CO до пересечения с окружностью в точке D. Без ограничения общности, считаем, что точка A лежит внутри угла DCB. Тогда

$$\angle AOB = \angle BOD - \angle AOD = 2\angle BCD - 2\angle ACD = 2\angle ACB. \quad \square$$



2. Допустим, что радиус окружности, проведенный в точку касания, не перпендикулярен касательной. Тогда из центра окружности проведём к касательной отрезок, перпендикулярный ей. При этом радиус является наклонной к касательной, а значит, расстояние от точки O до касательной меньше радиуса, поэтому касательная имеет две точки пересечения с окружностью. Получаем противоречие.

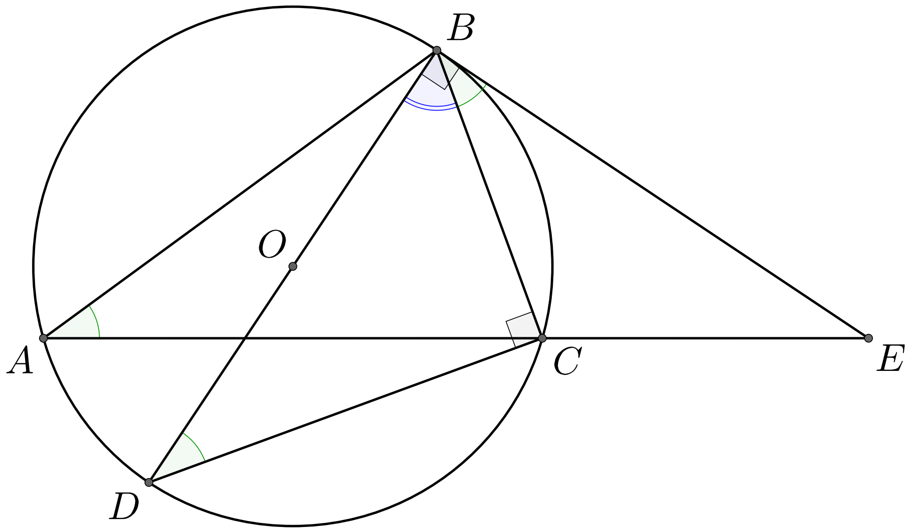


3. Продлим отрезок BO до пересечения с окружностью в точке D. Тогда по теореме о вписанном угле получаем, что $\angle BDC = \angle BAC$. Угол BCD опирается на диаметр окружности, а значит, он равен $90°$, поэтому

$$\angle CBD = 90° - \angle BDC = 90° - \angle BAC.$$

OB – радиус окружности, а значит, $\angle DBE = \angle OBE = 90°$. Таким образом

$$\angle CBE = 90° - \angle CBD = 90° - (90° - \angle BAC) = \angle BAC. \quad \square$$

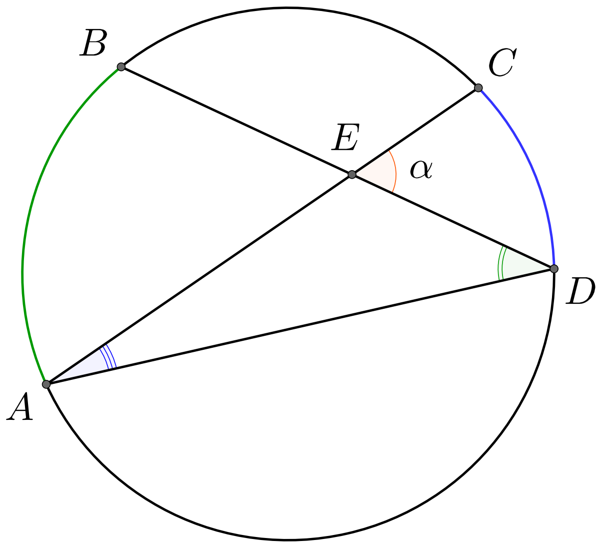


4. Пусть E – точка пересечения хорд AC и BD. Рассмотрим треугольник AED. Мы знаем, что $\angle BDA = \frac{1}{2}\smile AB$ и $\angle CAD = \frac{1}{2}\smile CD$. Тогда получаем:

$$\angle AED = 180° - \angle BDA - \angle CAD = 180° - \frac{\smile AB + \smile CD}{2}.$$

Значит,

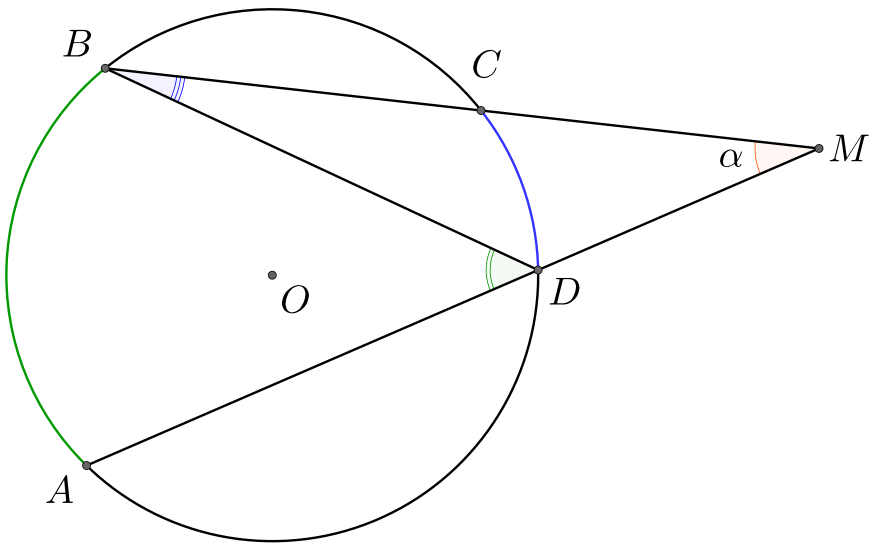
$$\angle CED = 180° - \angle AED = \frac{\smile AB + \smile CD}{2}. \quad \square$$



5. Рассмотрим треугольник MDB. Мы знаем, что $\angle MBD = \frac{1}{2}\,\smile{CD}$ и $\angle ADB = \frac{1}{2}\,\smile{AB}$. Угол ADB – внешний для треугольника MDB, значит,

$$\angle ADB = \angle DMB + \angle MBD,$$

то есть $\angle DMB = \angle ADB - \angle MBD = \dfrac{\smile{AB} - \smile{CD}}{2}$. $\square$

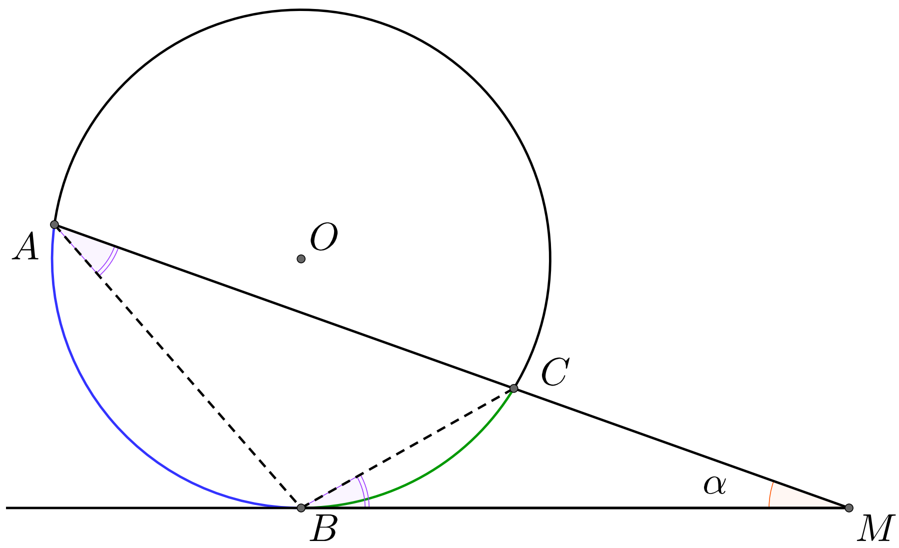


6. Рассмотрим треугольник ABC. По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle BAC = \angle CBM$. По теореме о вписанном угле мы знаем, что $\angle ACB = \frac{1}{2}\,\smile{BA}$ и $\angle CBM = \angle BAC = \frac{1}{2}\,\smile{CB}$. Угол ACB является внешним для треугольника MBC, значит,

$$\angle ACB = \angle CBM + \angle CMB,$$

то есть

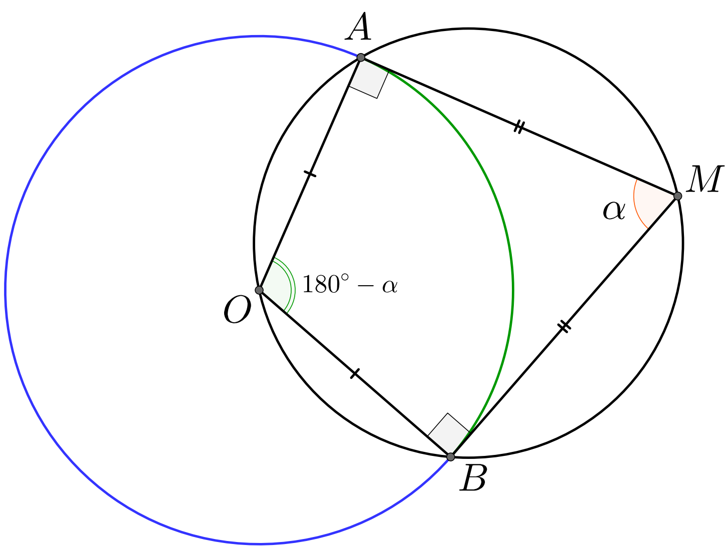
$$\angle CMB = \angle ACB - \angle CBM = \frac{\smile{BA} - \smile{CB}}{2}. \quad \square$$



7. Четырёхугольник $AOBM$ – дельтоид, потому, что AO и OB – радиусы окружности, MA и MB – касательные, проведённые из одной точки. При этом по теореме об угле между касательной и радиусом получаем, что $\angle OAM = \angle OBM = 90°$, значит, вокруг $AOBM$ можно описать окружность. Поэтому $\angle AOB + \angle AMB = 180°$. Угол AOB – центральный, поэтому $\angle AOB = \overset{\smile}{AB}$. Также мы знаем, что $\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BA} = 360°$, то есть $\dfrac{\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BA}}{2} = 180°$. Значит

$$\overset{\smile}{AB} + \angle AMB = \frac{\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BA}}{2},$$

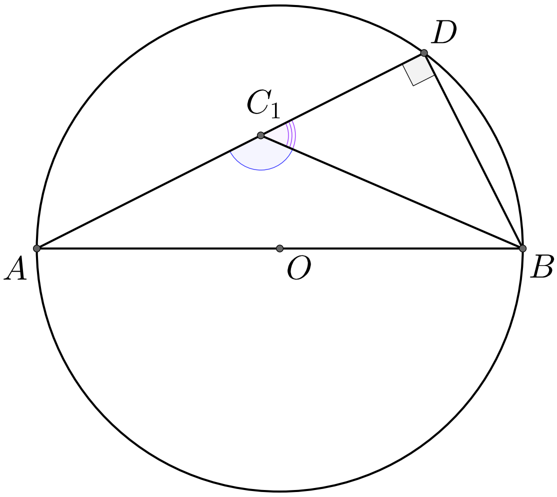
то есть $\angle AMB = \dfrac{\overset{\smile}{BA} - \overset{\smile}{AB}}{2}$. $\square$

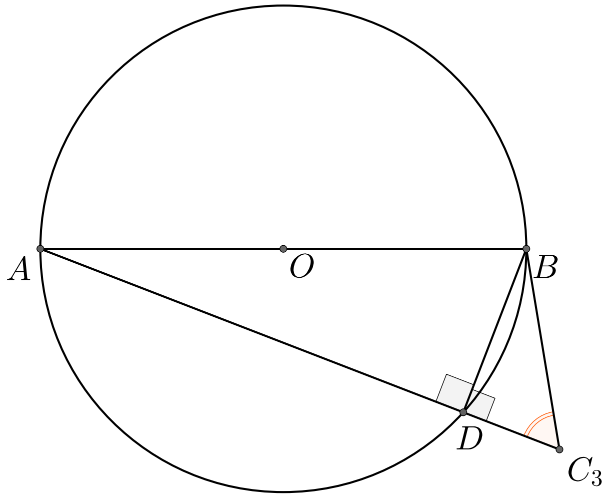


8. Для начала рассмотрим случай, когда точка C_2 лежит на окружности. Тогда угол $\angle AC_2B$ опирается на диаметр окружности, значит, по теореме о вписанном угле следует, что $\angle AC_2B = 90°$.

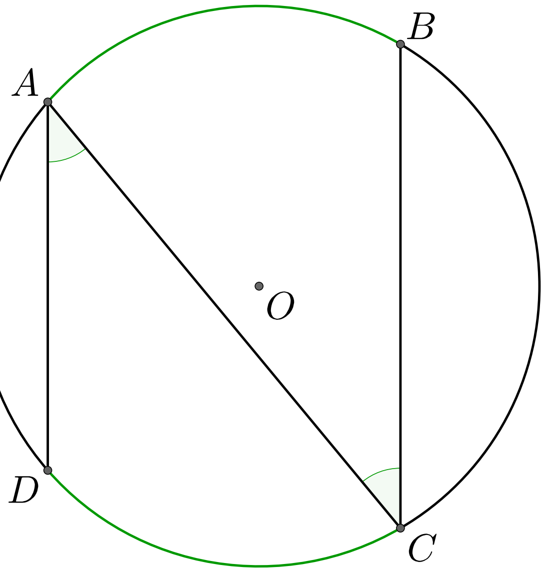
Далее рассмотрим случай 1. Пусть точка C_1 лежит внутри окружности. Продлим отрезок AC_1 до пересечения с окружностью в точке D. Тогда $\angle ADB = 90°$, значит, $\angle BC_1D < 90°$, так как $\angle BC_1D$ – угол между катетом и гипотенузой в прямоугольном треугольнике BDC_1. Таким образом, получаем, что $\angle AC_1B = 180° - \angle BC_1D > 90°$.

Рассмотрим случай 3. Пусть точка C_3 лежит вне окружности и D – точка пересечения отрезка AC_3 с окружностью. Тогда $\angle ADB = 90°$, поэтому $\angle BDC_3 = 90°$, значит,
$\angle BC_3D < 90°$. $\square$

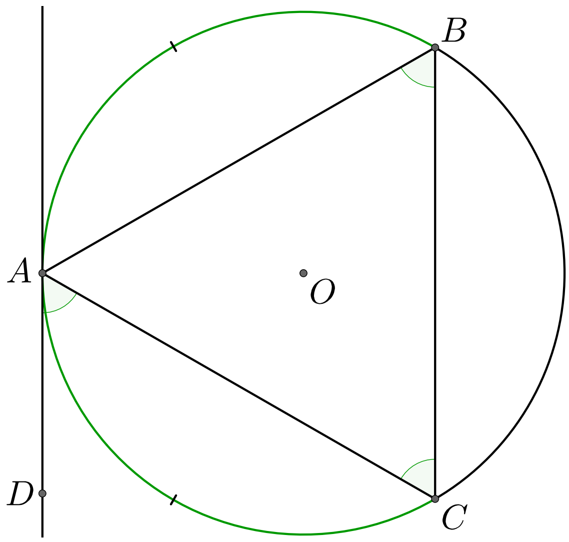




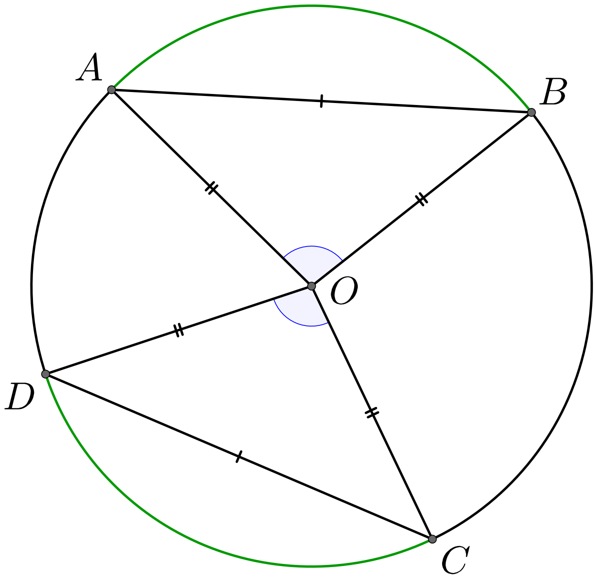
9. Так как отрезки AD и BC параллельны, то углы DAC и ACB равны как внутренние накрест лежащие, значит, они опираются на равные дуги. □



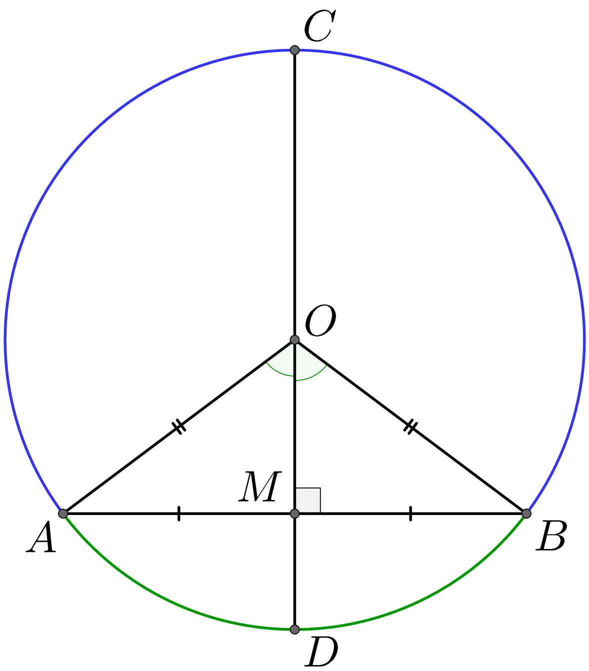
10. Углы CAD и ACB равны, так как они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых. При этом по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle CAD = \angle ABC$. Значит, $\angle ACB = \angle ABC$, поэтому равны и соответствующие им дуги $\overset{\smile}{AB}$. □



11. Рассмотрим треугольники AOB и DOC. $AO = OB = DO = OC$, так как это радиусы окружности, при этом $AB = CD$, значит, треугольники AOB и DOC равны по трём сторонам, поэтому $\angle AOB = \angle DOC$, то есть равны и соответствующие этим центральным углам дуги, то есть $\smile{AB} = \smile{DC}$. $\square$



12. Пусть CD – диаметр, AB – хорда перпендикулярная CD. Рассмотрим треугольник AOB, он равнобедренный, так как OA и OB – радиусы окружности. OM – высота треугольника AOB, проведённая к основанию, значит OM также является биссектрисой. Поэтому дуги, на которые опираются центральные углы AOD и BOD, равны. Аналогично доказывается, что $\smile{AC} = \smile{CB}$.



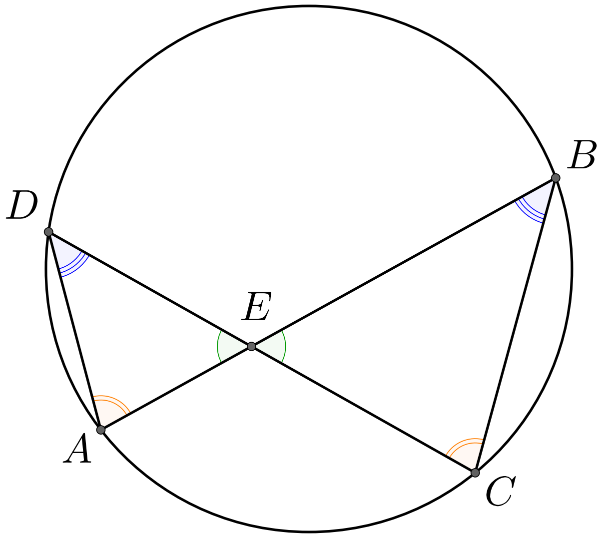
Обратно, пусть диаметр CD проходит проходит через середину хорды AB. AOB – равнобедренный треугольник, а значит OM – высота треугольника AOB, то есть диаметр окружности перпендикулярен хорде AB. $\square$

13. Рассмотрим треугольники DEA и CEB. Вписанные углы ADC и ABC опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle ADC = \angle ABC$. Аналогично получаем, что $\angle DAB = \angle DCB$, значит, треугольники DEA и CEB подобны по двум углам. Таким образом,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EB},$$

значит,

$$AE \cdot EB = DE \cdot EC. \quad \square$$



14. Рассмотрим треугольники ABM и BCM. По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle BAC = \angle CBM$. Угол BMA общий для треугольников ABM и BCM, значит, они подобны. Получаем, что

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MC}{MB},$$

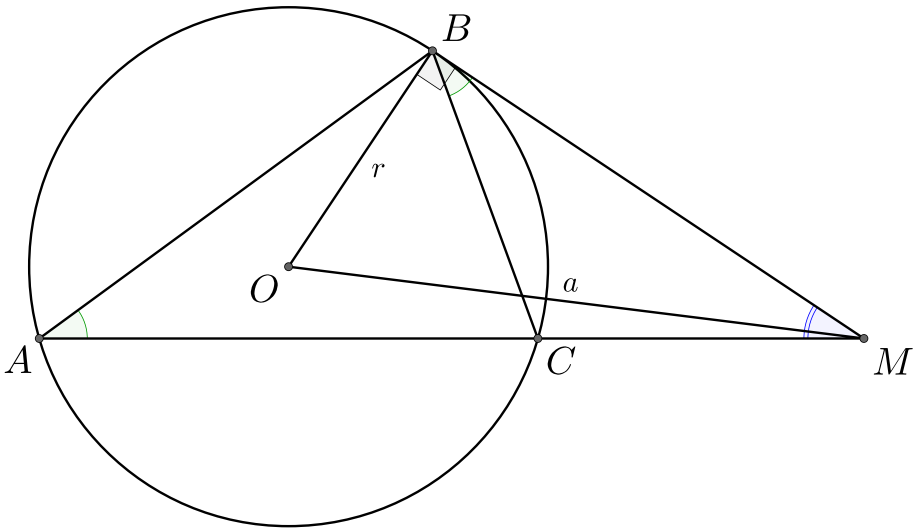
значит, $MB^2 = MC \cdot MA$.

Треугольник OBM – прямоугольный, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Таким образом, по теореме Пифагора получаем, что

$$OM^2 = OB^2 + MB^2,$$

значит,

$$MB^2 = a^2 - r^2. \quad \square$$



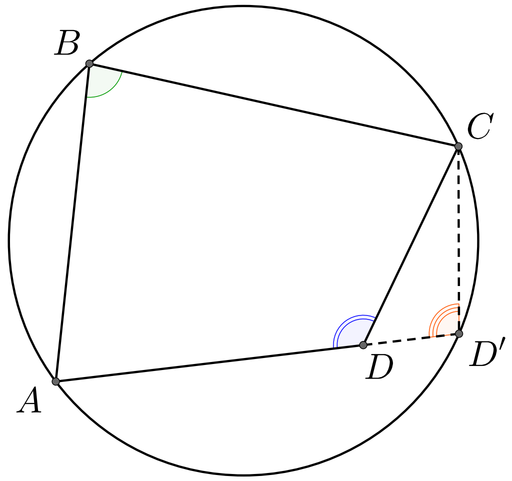
15.12 Вписанные и описанные четырехугольники

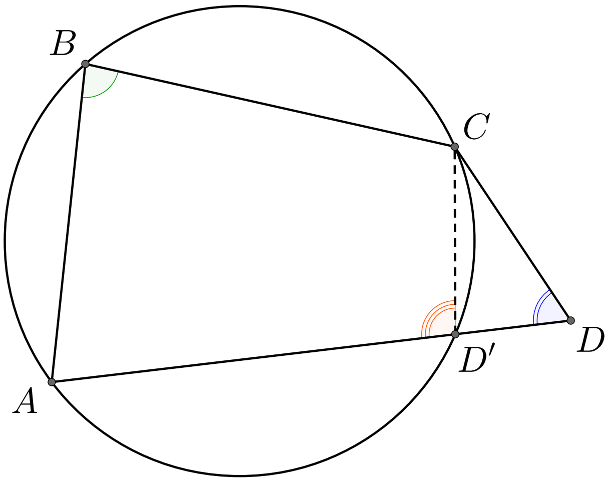
1. Для начала докажем первый вариант формулировки. Пусть четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Тогда дуги, на которые опираются углы $\angle A$ и $\angle C$ вместе образуют всю окружность, а значит, сумма градусных мер этих дуг равна $360°$. Из теоремы о вписанном угле следует, что $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогично можем доказать, что
$\angle B + \angle D = 180°$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть сумма противоположных углов четырёхугольника $ABCD$ равна $180°$. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Пусть точка D лежит внутри окружности. Тогда продлим отрезок AD до пересечения с окружностью в точке D'. Четырёхугольник $ABCD'$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle AD'C = 180°$, но также мы знаем, что $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, то есть $\angle AD'C = \angle ADC$. Точки D и D' лежат на одной прямой, поэтому $\angle AD'C = \angle ADC$ только если отрезки CD и CD' параллельны, что невозможно, так как у них есть общая точка. Значит, D не может лежать внутри окружности.

Случай 2: Пусть точка D лежит вне окружности. Причём D' – точка пересечения отрезка AD с окружностью. Аналогично предыдущему случаю мы можем установить, что $\angle AD'C = \angle ADC$. Но это верно только если отрезки CD и CD' параллельны, что также невозможно. Таким образом, точка D не может лежать вне окружности, значит, она лежит на дуге окружности, то есть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.





Покажем, что вторая формулировка равносильна первой. Действительно, если $\alpha = \gamma$, то $\angle ADC + \angle ABC = (180° - \alpha) + \alpha = 180°$.
Обратно, если $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, то $\gamma = 180° - \angle ADC = \angle ABC = \alpha$. $\square$

2. Пусть четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Как известно углы, вершины которых лежат на окружности и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Значит, $\alpha = \angle BAC = \angle CDB = \beta$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ верно, что
$\angle BAC = \angle BDC$. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Пусть точка D лежит внутри окружности. Тогда продлим отрезки BD и CD до пересечения с окружностью в точках B_1 и C_1 соответственно. По теореме о вписанном угле мы знаем, что $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$, значит, $\angle BDC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$. Далее, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CB_1}$ и $\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{C_1B}$. Мы знаем, что $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CB_1} + \overset{\frown}{B_1C_1} + \overset{\frown}{C_1B} = 360°$, то есть

$$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB_1} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{C_1B} = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{B_1C_1} < 180°.$$

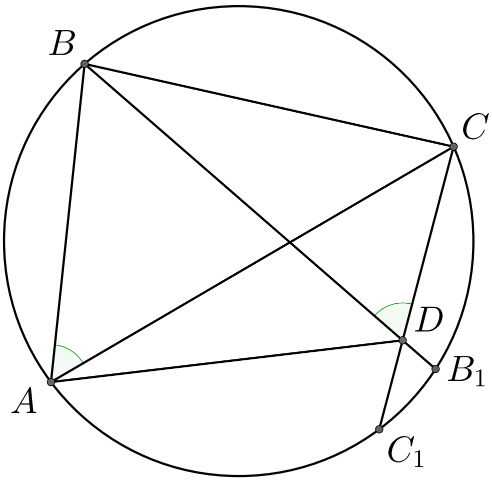
Получаем противоречие.

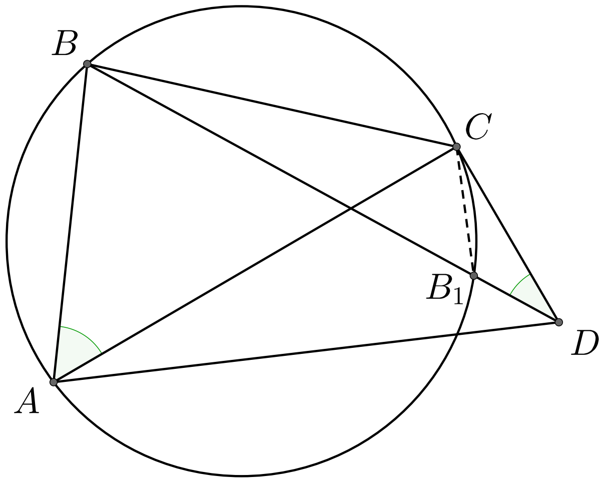
Случай 2: Пусть точка D лежит вне окружности. Пусть B_1 – точка пересечения диагонали BD с окружностью. Аналогично с предыдущим случаем имеем, что $\angle BDC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$. Также $\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CB_1}$ и

$\angle BCB_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \overset{\smile}{B_1B}$, при этом $\angle BCD > \angle BCB_1$. Получаем, что

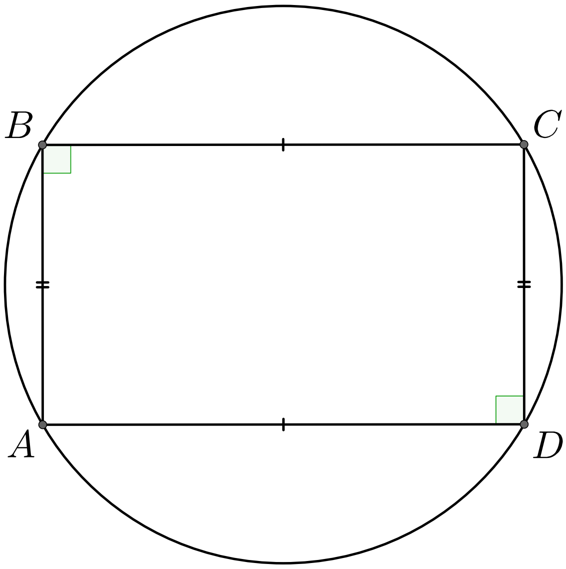
$$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180^\circ > \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{CB_1} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{B_1B} = 180^\circ.$$

Противоречие, значит, точка D лежит на окружности. $\square$



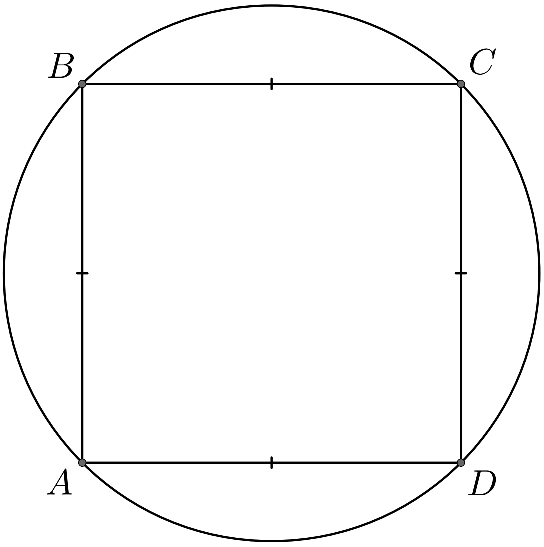


3. Все углы прямоугольника равны 90°, поэтому сумма его противоположных углов равна 180°, то есть вокруг прямоугольника можно описать окружность.

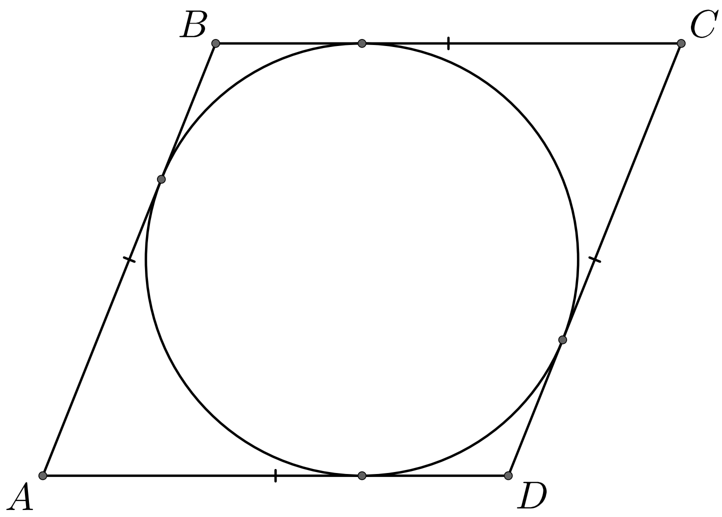


Обратно, пусть параллелограмм $ABCD$ мы можем вписать в окружность. Мы знаем, что противоположные углы параллелограмма равны: $\angle ABC = \angle ADC$. При этом, чтобы мы могли вписать его в окружность в сумме противоположные углы должны давать 180°. Получаем, что $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. То есть $ABCD$ – прямоугольник. $\square$

4. Ромб $ABCD$ является параллелограммом, а значит, вокруг него можно описать окружность тогда и только тогда, когда $ABCD$ – прямоугольник, при этом у $ABCD$ все стороны равны, а значит, $ABCD$ – квадрат. □



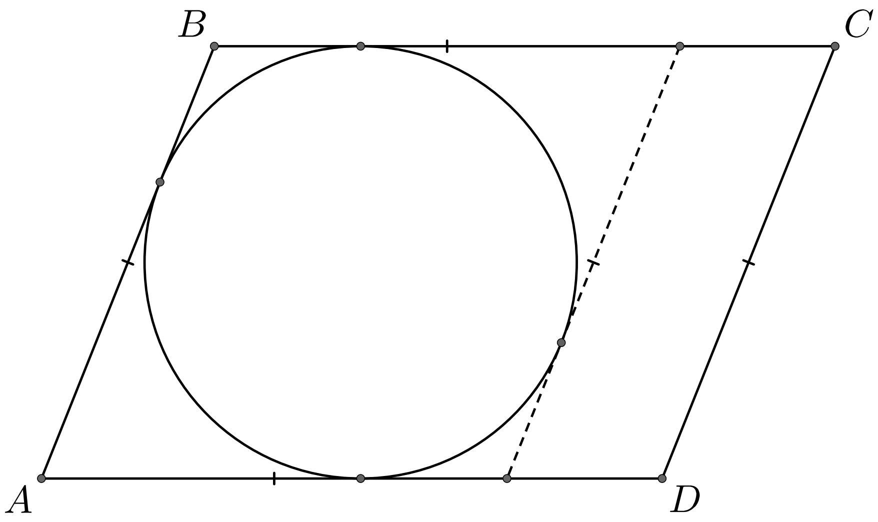
5. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, если $AB + CD = AD + BC$. Так как в ромбе все стороны равны, то это равенство выполняется, а значит, в него можно вписать окружность. □



6. Пусть $ABCD$ – ромб. Все стороны ромба равны, значит

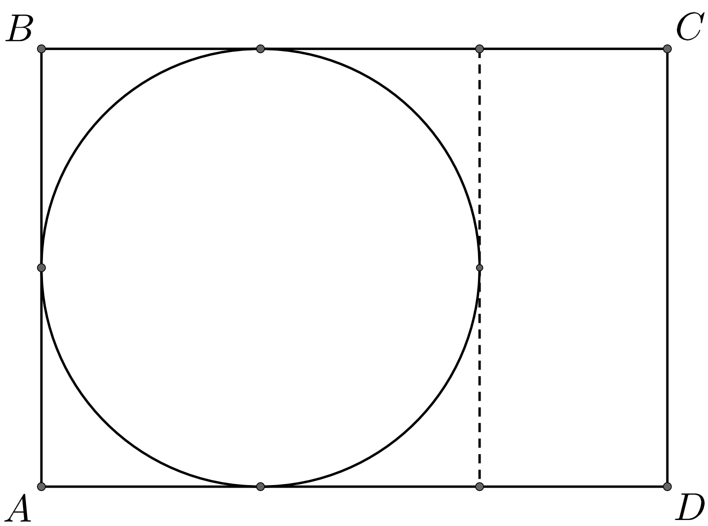
$$AB + CD = AD + BC,$$

значит, в ромб $ABCD$ можно вписать окружность.



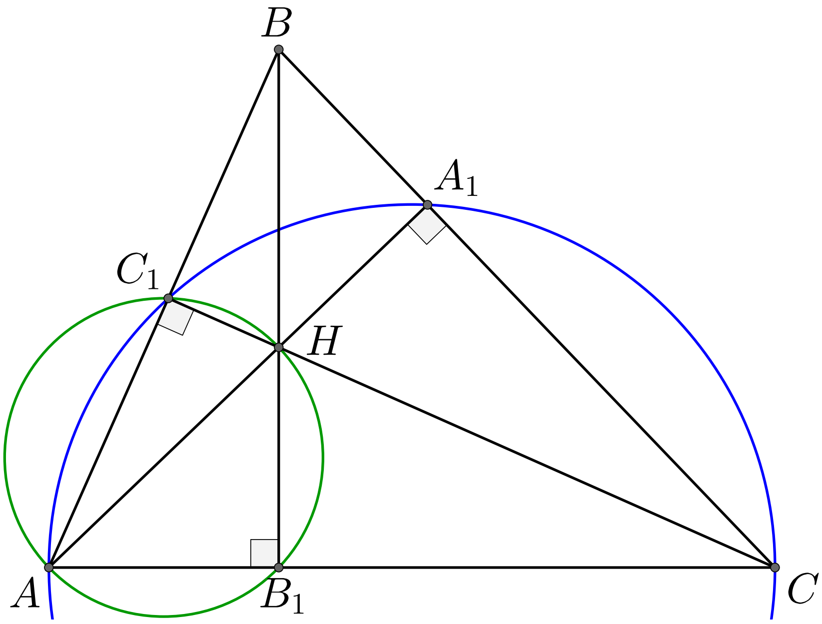
Обратно, пусть в параллелограмм $ABCD$ можно вписать окружность. Противоположные стороны параллелограмма равны. Если $AB = CD < BC = AD$, то
$AB + CD < BC + AD$. Аналогично, если $AB = CD > BC = AD$, то $AB + CD > BC + AD$. Значит, $AB = CD = BC = AD$. □

7. Прямоугольник является параллелограммом, поэтому в него можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом. Но если прямоугольник – ромб, то этот прямоугольник является квадратом. □

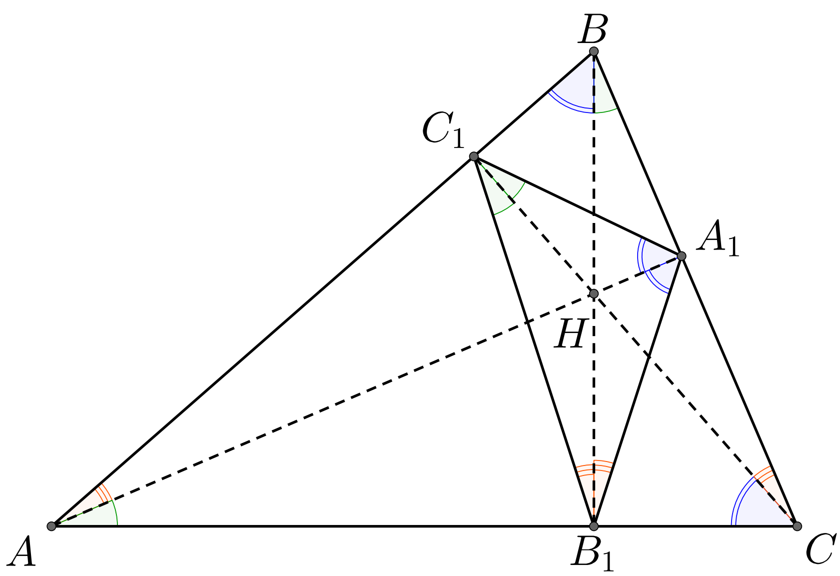


15.13 Свойства ортоцентра

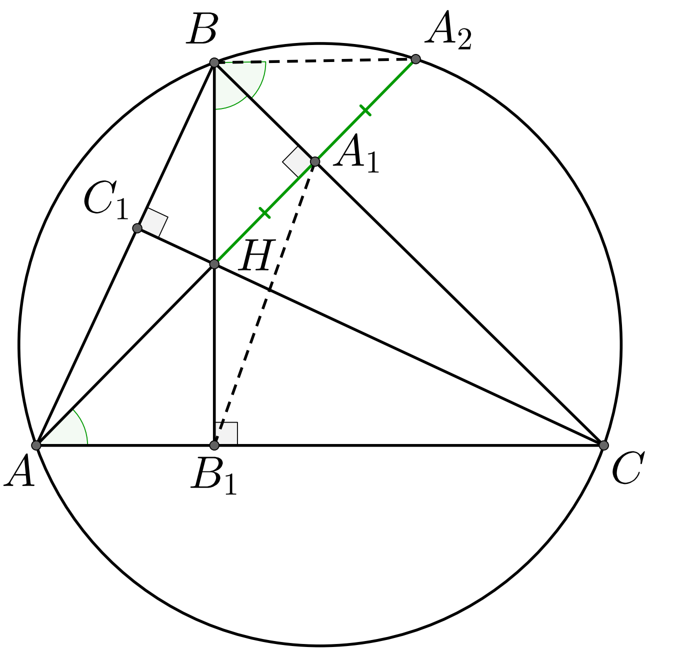
1. Докажем утверждение для четырёхугольников AC_1HB_1 и AC_1A_1C.
Мы знаем, что $\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$, поэтому $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$, значит по первому признаку вписанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника AC_1HB_1.
В четырёхугольнике AC_1A_1C углы AC_1C и AA_1C опираются на одну и ту же сторону и равны 90°, значит, по второму признаку вписанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника AC_1A_1C. □



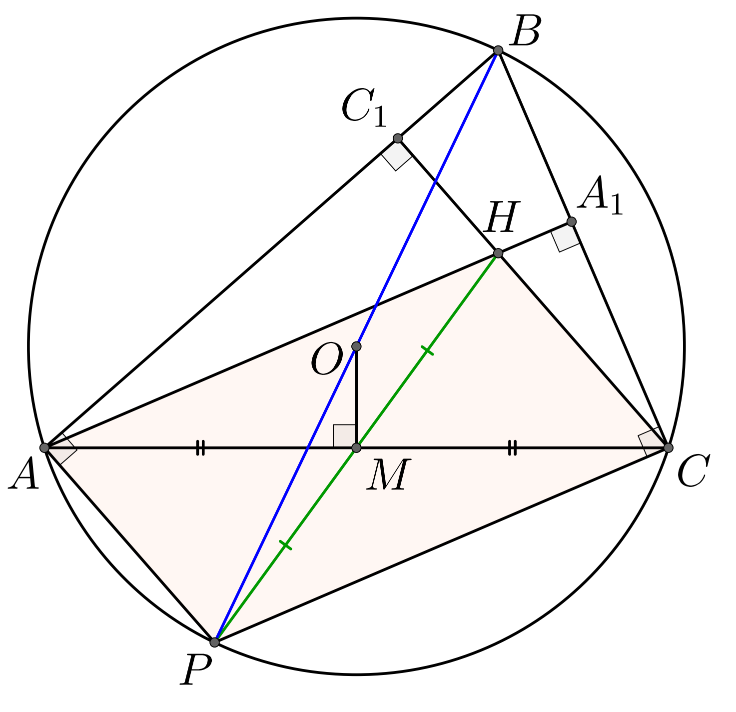
2. Докажем, что высота CC_1 делит угол $\angle A_1C_1B_1$ пополам. Для остальных углов доказательство будет аналогичным.
Рассмотрим четырёхугольники AC_1HB_1 и AC_1A_1C. Вокруг AC_1HB_1 можно описать окружность, поэтому $\angle HAB_1 = \angle B_1C_1H$, так как эти углы опираются на одну и ту же дугу. Вокруг AC_1A_1C можно описать окружность, поэтому $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C$, а значит, $\angle A_1C_1C = \angle B_1C_1H$, то есть высота CC_1 делит угол $\angle A_1C_1B_1$ пополам. □



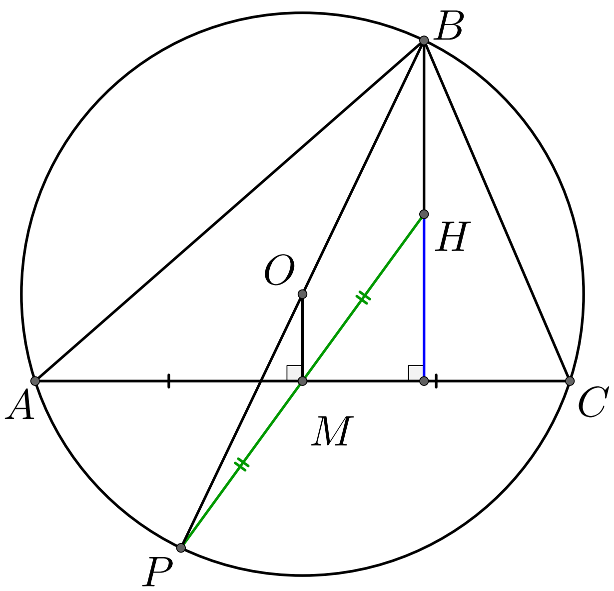
3. Докажем, что $HA_1 = A_1A_2$, остальные равенства будут доказываться аналогично.
Вписанные углы $\angle CBA_2$ и $\angle A_2AC$ опираются на одну и ту же дугу, поэтому
$\angle CBA_2 = \angle A_2AC$. При этом вокруг четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность (так как $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$), а значит, $\angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1$, причём $\angle A_1AB_1 = \angle CBA_2$, то есть $\angle A_1BB_1 = \angle CBA_2$. Таким образом BA_1 – биссектриса треугольника HBA_2, при этом она также является высотой этого треугольника, а значит, HBA_2 – равнобедренный, поэтому BA_1 также является медианой, то есть $HA_1 = A_1A_2$. □



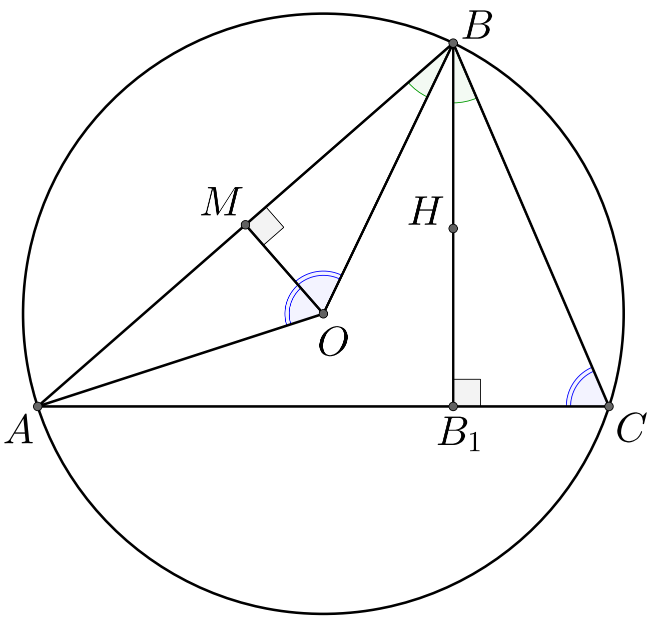
4. Отрезок OM перпендикулярен стороне AC, так как M – середина стороны AC и O является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам ABC. Пусть AA_1 и CC_1 – высоты треугольника. Проведём диаметр окружности BP. Углы $\angle PAB$ и $\angle PCB$ опираются на диаметр, поэтому $\angle PAB = \angle PCB = 90°$. $\angle AC_1C = 90°$, поэтому отрезки AP и C_1C параллельны, в частности параллельны отрезки AP и HC. $\angle AA_1C = 90°$, поэтому отрезки CP и A_1A, параллельны, в частности параллельны отрезки CP и AH. Получаем, что в четырёхугольнике $AHCP$ противоположные стороны параллельны, а значит, $AHCP$ – параллелограмм. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому $MH = PM$. □



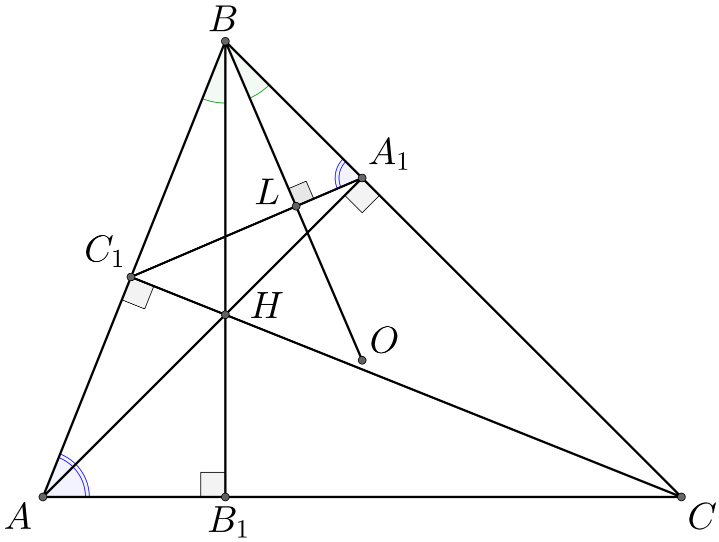
5. Пусть луч HM пересекает окружность в точке P (M – середина стороны AC). OM – серединный перпендикуляр к стороне AC. BH – часть высоты, проведённой к стороне AC, значит, отрезки OM и BH параллельны, поэтому $\angle PBH = \angle POM$. Значит, треугольники PBH и POM подобны по двум углам (угол BPH является общим) с коэффициентом подобия 2, значит $BH = 2OM$. □



6. Рассмотрим треугольник AOB, он является равнобедренным, а значит высота OM в нём также является биссектрисой. Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол $\angle ACB$ опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$. Так как OM – биссектриса угла $\angle AOB$, то $\angle MOB = \angle ACB$. Таким образом в прямоугольных треугольниках MOB и B_1CB имеем, что $\angle MOB = \angle B_1CB$, значит, $\angle ABO = \angle B_1BC = \angle HBC$. $\square$



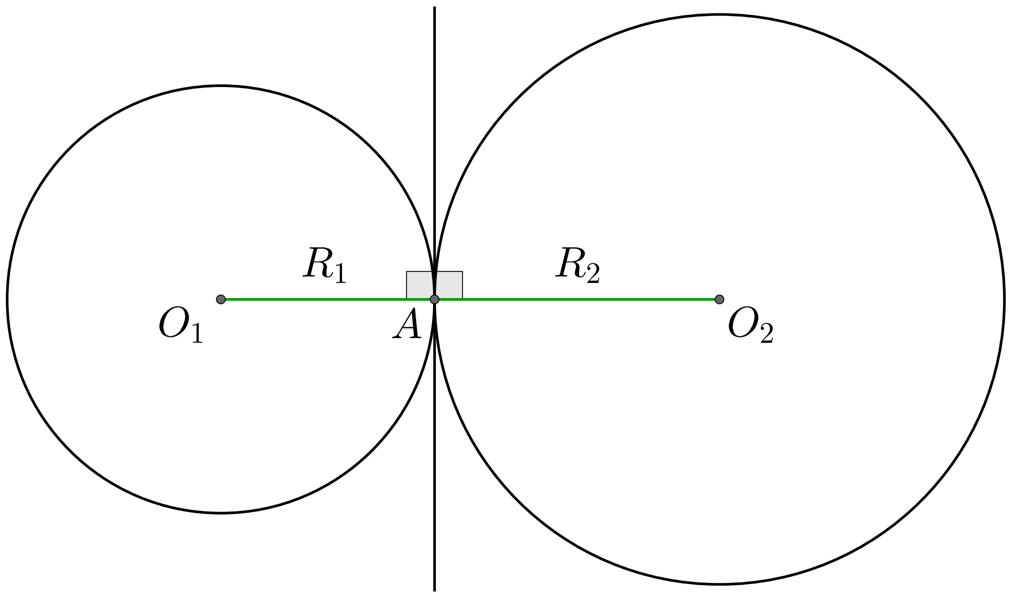
7. Пусть L – точка пересечения BO и A_1C_1. Четырёхугольник AC_1A_1C является вписанным, поэтому. Мы знаем, что $\angle BAB_1 = \angle BA_1C_1$, при этом $\angle ABB_1 = \angle OBC$, значит, в треугольниках ABB_1 и A_1BL совпадают два угла, следовательно, совпадают все три: $\angle AB_1B = \angle A_1LB = 90°$. $\square$



15.14 Конструкции и теоремы

1. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке A, проведём через эту точку общую касательную. Радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны общей касательной, а значит точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой и

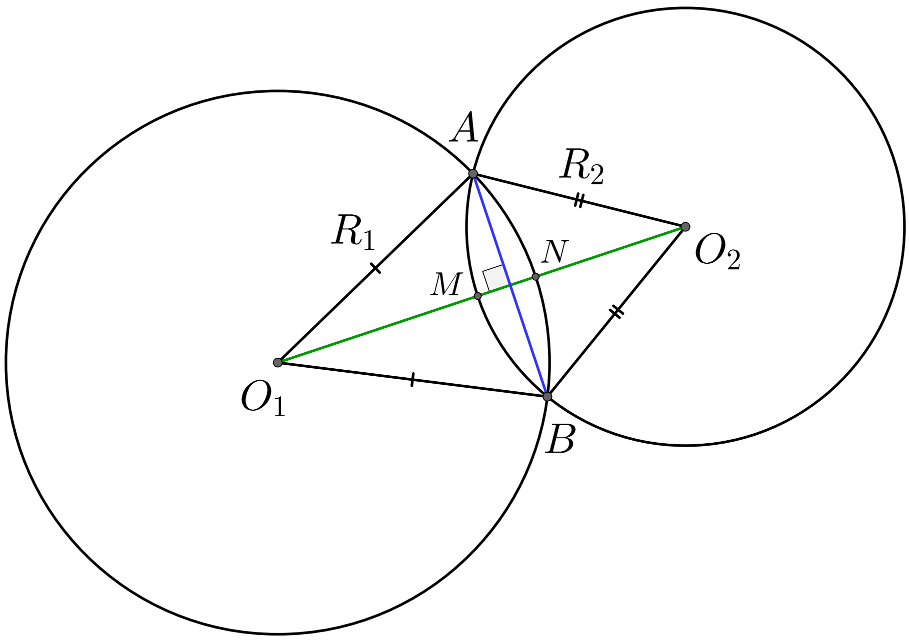
$$O_1O_2 = O_1A + AO_2 = R_1 + R_2. \quad \square$$



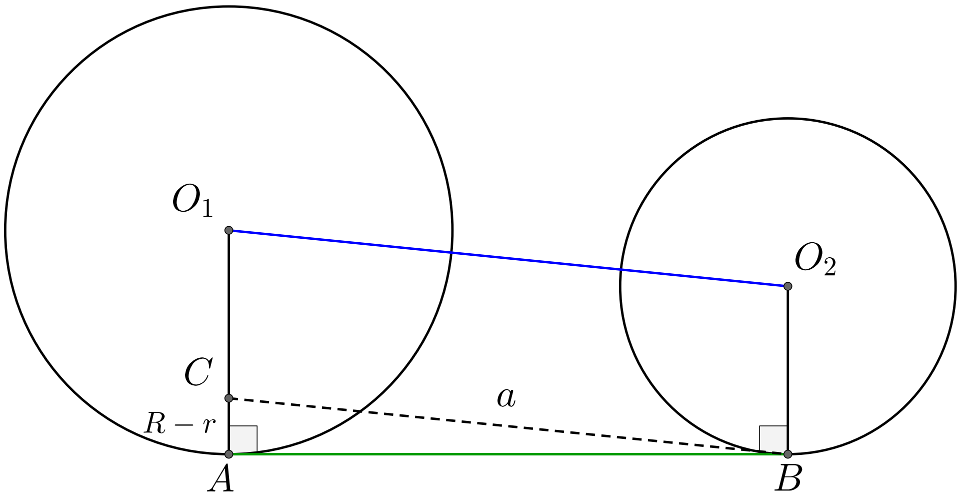
2. Пусть отрезок O_1O_2 пересекает окружности в точках M и N, тогда $O_1N + O_2M = R_1 + R_2$, но

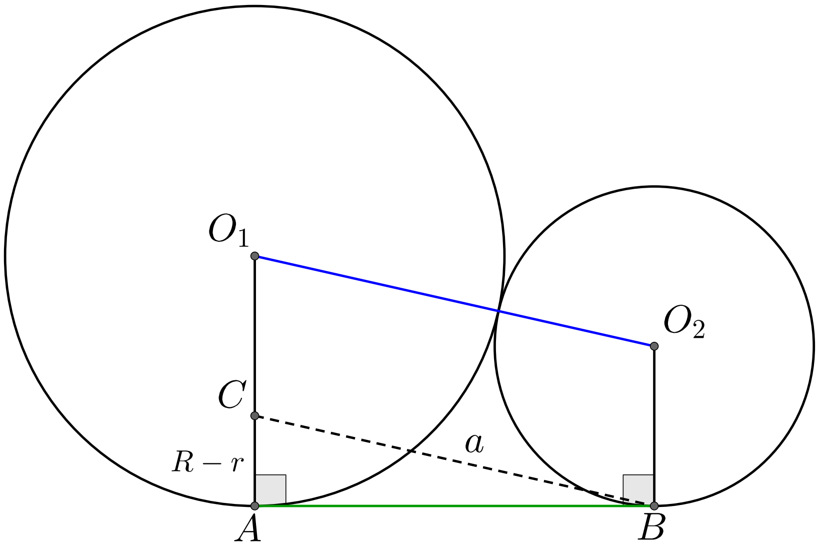
$$O_1O_2 = O_1N + O_2M - MN < O_1N + O_2M = R_1 + R_2.$$

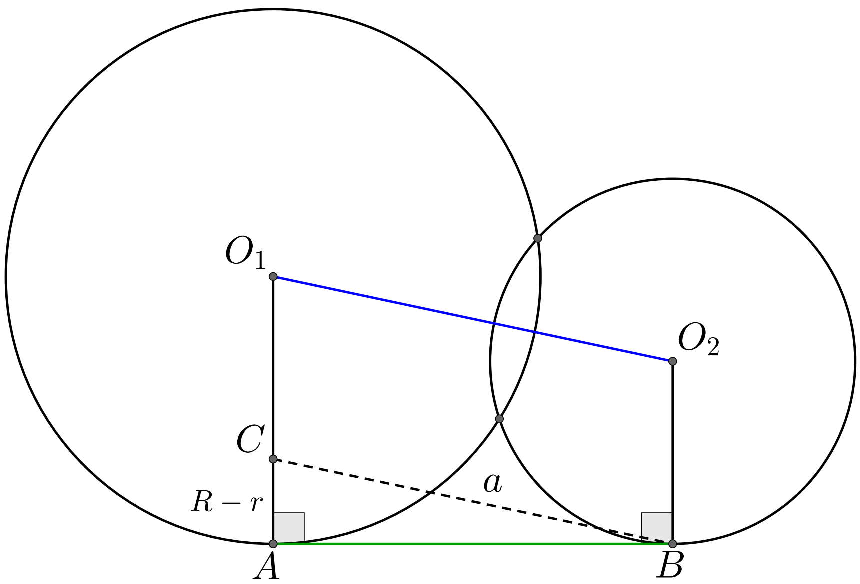
Далее, в четырёхугольнике AO_1BO_2 известно, что $O_1A = O_1B = R_1$ и $O_2A = O_2B = R_2$, значит, данный четырёхугольник – дельтоид. $\square$



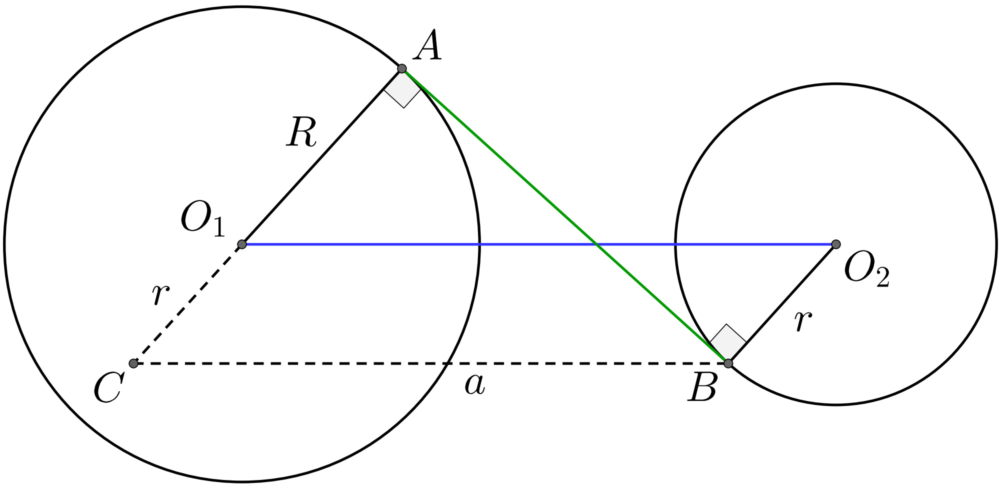
3. Пусть $R > r$, через точку B параллельно отрезку O_1O_2 проведём отрезок BC, причём точка C лежит на отрезке O_1A. Радиусы O_1A и O_2B перпендикулярны касательной AB, значит, они параллельны. Получаем, что четырёхугольник CO_1O_2B – параллелограмм, а значит, $CO_1 = BO_2 = r$ и $AC = R - r$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем, что $a^2 = AB^2 + (R - r)^2$, то есть $AB = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$. $\square$



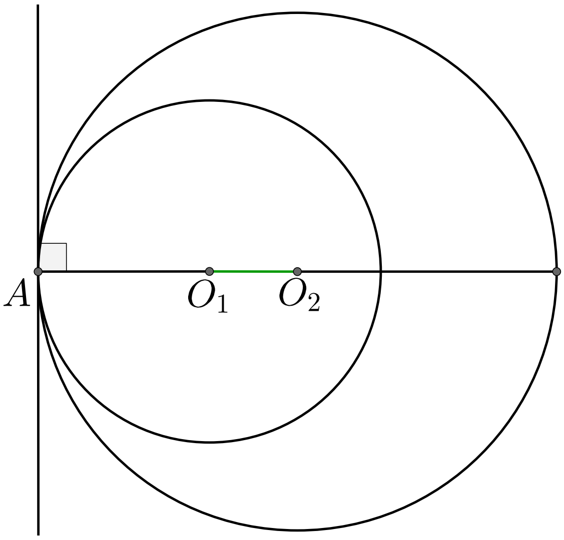




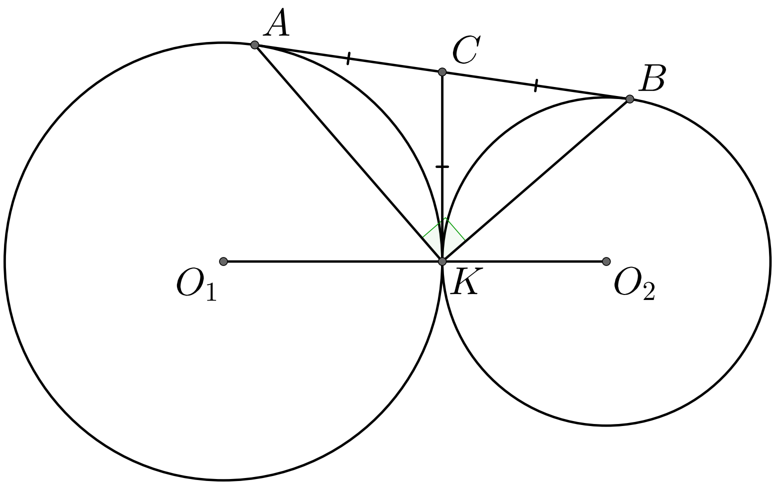
4. Пусть $R > r$. Через точку B проведём прямую, параллельную отрезку O_1O_2, которая пересекает продолжение отрезка AO_1 в точке C. Отрезки O_1A и O_2B перпендикулярны общей касательной AB, значит, они параллельны, то есть в четырёхугольнике O_1CBO_2 противоположные стороны параллельны, поэтому он является параллелограммом. В параллелограмме противоположные стороны равны, значит, $O_1C = r$ и $AC = R + r$. Имеем, что треугольник CAB – прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2 + AB^2 = a^2$, то есть $AB = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$. $\square$



5. Пусть $R_2 > R_1$. Проведём через точку касания A общую касательную. Радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны общей касательной, значит, точки O_1, O_2, A лежат на одной прямой, поэтому $O_1O_2 = O_2A - O_1A = R_2 - R_1$. $\square$

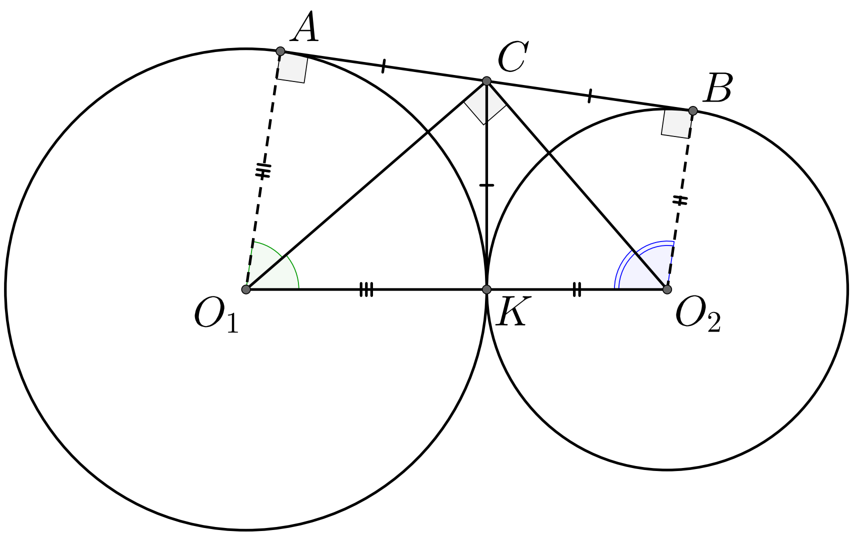


6. Касательные к окружности, выходящие из одной точки, равны, значит $AC = CK = CB$. То есть в треугольнике AKB медиана CK равна половине стороны, на которую она опущена. Отсюда следует, что треугольник AKB – прямоугольный, то есть $\angle AKB = 90°$.



Отрезки O_1A и O_2B перпендикулярны касательной AB, значит, они параллельны и четырёхугольник AO_1O_2B является трапецией с основаниями AO_1 и O_2B.

Мы установили, что $AC = CK = CB$. Также имеем, что $AO_1 = O_1K = R_1$ и $BO_2 = O_2K = R_2$, значит, четырёхугольники AO_1KC и BO_2KC являются дельтоидами. Отсюда следует, что диагонали O_1C и O_2C – биссектрисы углов AO_1K и BO_2K соответственно. Так как прямые O_1A и O_2B параллельны, то биссектрисы O_1C и O_2C перпендикулярны и $\angle O_1CO_2 = 90°$. □



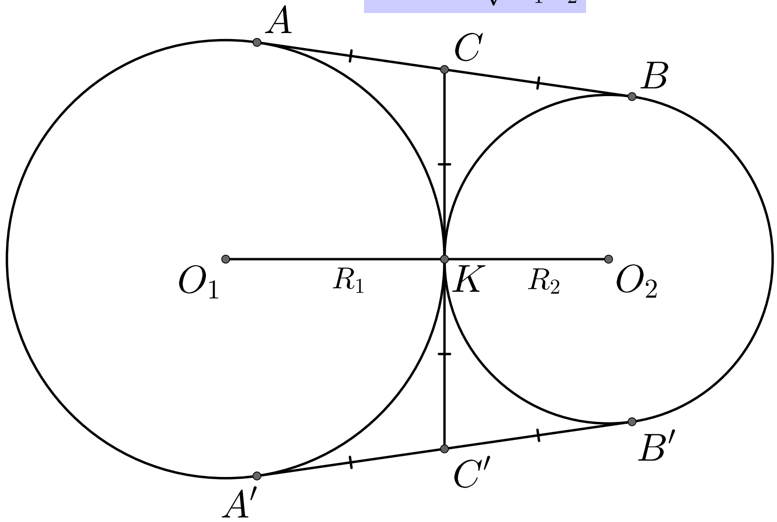
8. Длину общей касательной AB мы можем вычислить с помощью теоремы Пифагора:

$$AB = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} =$$

$$= \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 + 2R_1R_2 - R_2^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

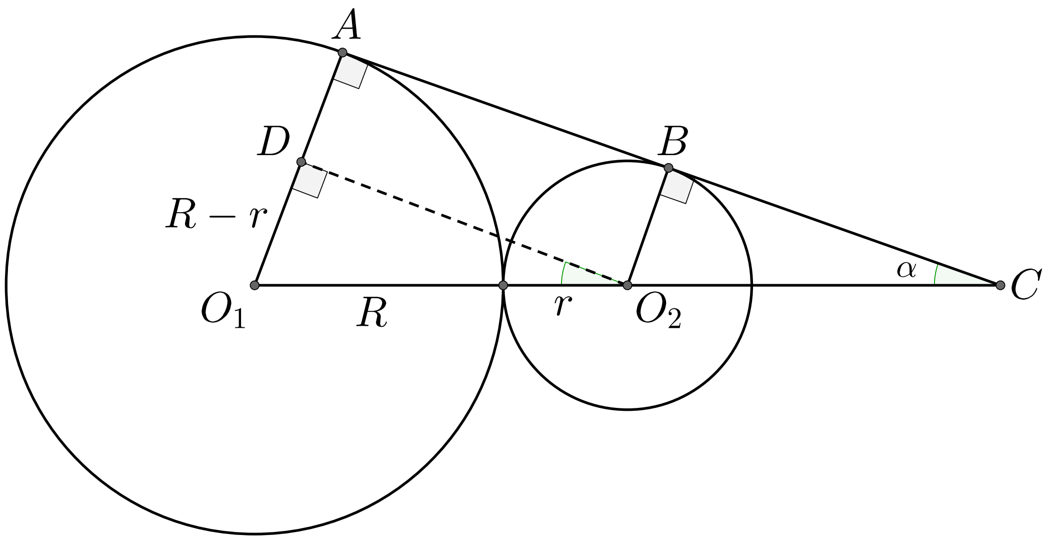
В силу симметрии получаем, что $AB = A'B'$ и $CK = C'K$. Мы установили, что $AB = 2CK$, значит, $CC' = CK + KC' = 2CK = AB = 2\sqrt{R_1R_2}$. □

$$\boxed{CC' = 2\sqrt{R_1R_2}}$$

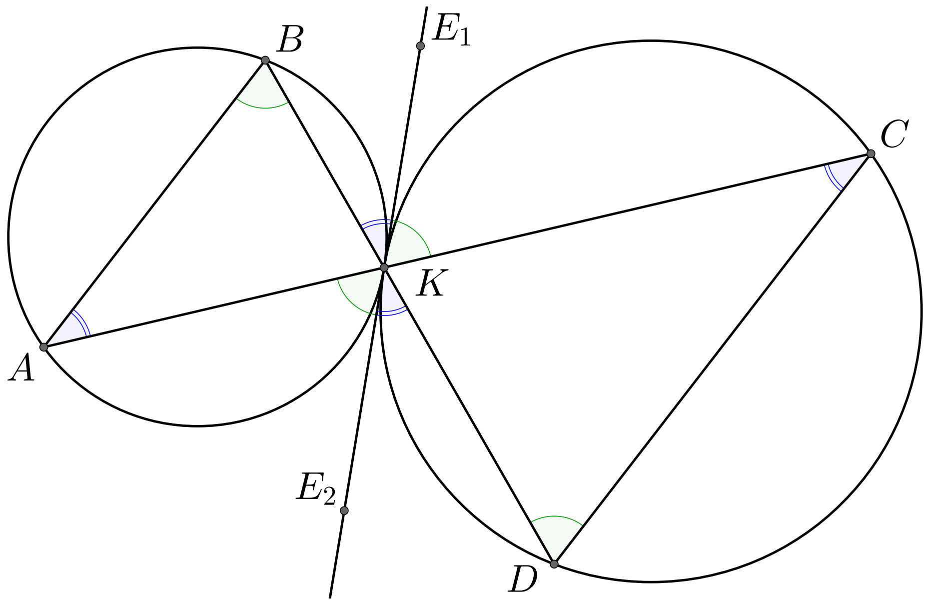


9. Пусть $R > r$, параллельно отрезку AB проведём отрезок O_2D (точка D лежит на отрезке AO_1), тогда в силу параллельности отрезков AO_1 и BO_2 имеем, что $O_1D = R - r$, причём $\angle DO_2O_1 = \angle ACO_1$ и $O_1O_2 = R + r$, значит,

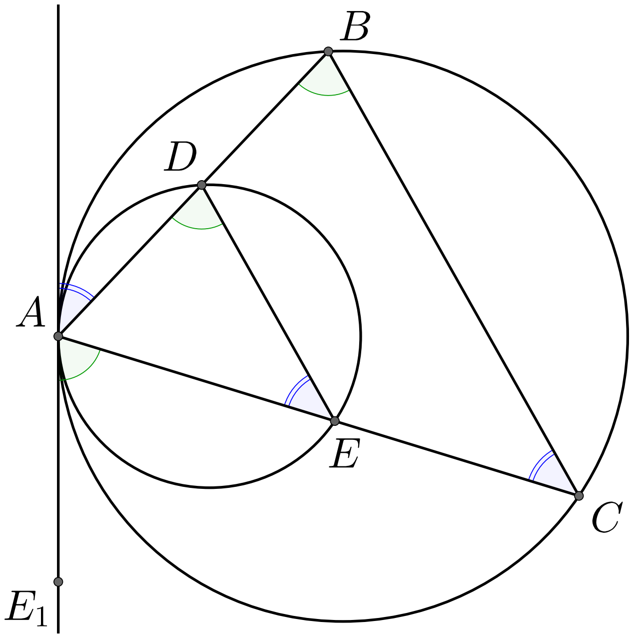
$$\sin\alpha = \frac{O_1D}{O_1O_2} = \frac{R - r}{R + r}. \quad \square$$



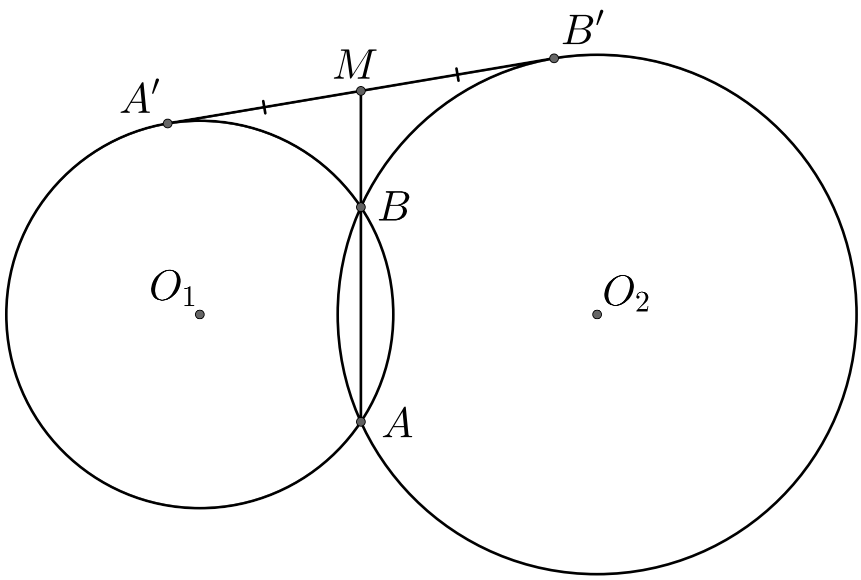
10. Углы BKA и CKD равны, так как являются вертикальными. По той же причине равны углы CKE_1 и AKE_2. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle ABK = \angle AKE_2$ и $\angle KDC = \angle CKE_1$, то есть $\angle ABK = \angle KDC$. Значит, треугольники AKB и CKD подобны по двум углам. Параллельность отрезков AB и CD следует из того, что их внутренние накрест лежащие углы равны. $\square$



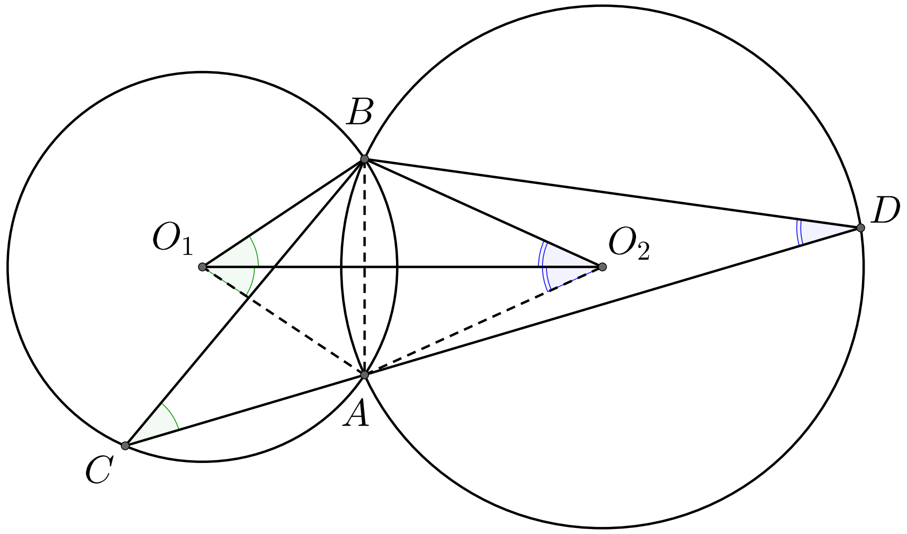
11. Угол A является общим для треугольников ABC и ADE. По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle EAE_1 = \angle ADE$ и $\angle CAE_1 = \angle ABC$, значит, $\angle ADE = \angle ABC$. Аналогично можно доказать, что $\angle AED = \angle ACB$. То есть треугольники ABC и ADE подобны по двум углам.



12. Пусть M – точка пересечения прямой AB и касательной $A'B'$. Тогда, с одной стороны, для окружности с центром O_1 верно, что $A'M^2 = MA \cdot MB$, с другой стороны, для окружности с центром в точке O_2 имеем, что $B'M^2 = MA \cdot MB$. Тогда получим, что $A'M^2 = B'M^2$ или $A'M = B'M$. □



13. Рассмотрим углы BO_1A и BO_2A. Четырёхугольник BO_1AO_2 является дельтоидом ($O_1B = O_1A$ и $O_2B = O_2A$), поэтому диагональ O_1O_2 делит углы BO_1A и BO_2A пополам. При этом центральный угол BO_1A первой окружности опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BCA, аналогично, центральный угол второй окружности BO_2A опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BDA. Значит, $\angle BO_1A = 2\angle BCA$ и $\angle BO_2A = 2\angle BDA$, то есть $\angle BO_1O_2 = \angle BCA$ и $\angle BO_2O_1 = \angle BDA$. Таким образом, треугольники BO_1O_2 и BCD подобны по двум углам. □



14. **Случай 1:** Пусть α – острый угол. Рассмотрим четырёхугольник AC_1A_1C. Мы можем описать вокруг него окружность, поэтому

$$\angle C_1A_1A = \angle C_1CA \ \text{ и } \ \angle A_1C_1C = \angle A_1AC.$$

При этом

$$\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle C_1AC \ \text{ и } \ \angle A_1AC = 90^\circ - \angle A_1CA.$$

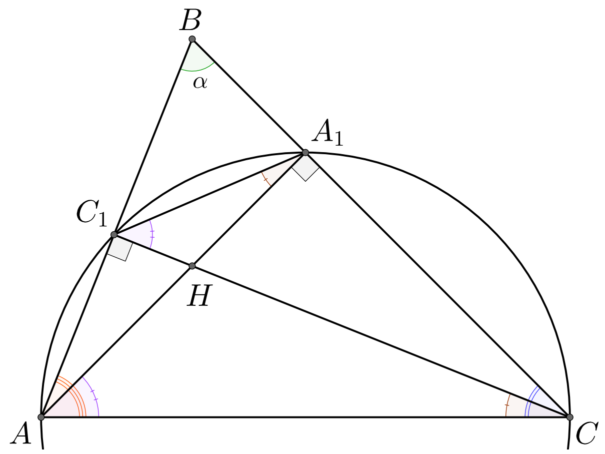
А также

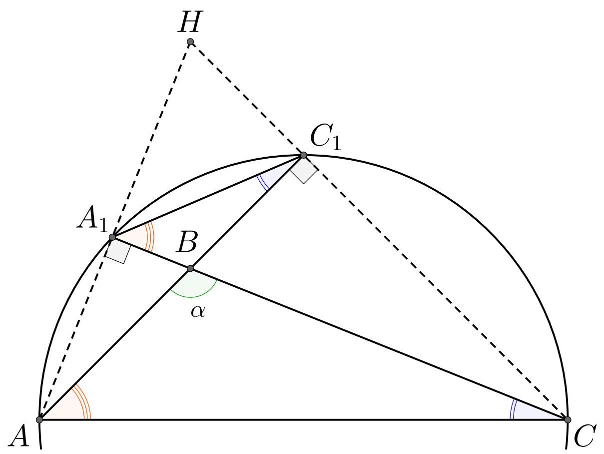
$$\angle C_1A_1A + \angle C_1A_1B = 90^\circ \ \text{ и } \ \angle CC_1A_1 + \angle A_1C_1B = 90^\circ.$$

Получаем, что

$$\angle C_1A_1B = \angle C_1AC \ \text{ и } \ \angle A_1C_1B = \angle A_1CA,$$

то есть треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум углам. Треугольник AA_1B – прямоугольный, значит $\cos\alpha = \dfrac{A_1B}{AB}$, поэтому $k = \cos\alpha$ – коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC.





Случай 2: Пусть α – тупой угол. Тогда высоты падают на продолжения сторон AB и BC. Вокруг четырёхугольника AA_1C_1C можно описать окружность, значит

$$\angle C_1A_1C = \angle C_1AC \ \text{ и } \ \angle A_1C_1A = \angle A_1CA,$$

поэтому треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум углам. Имеем:

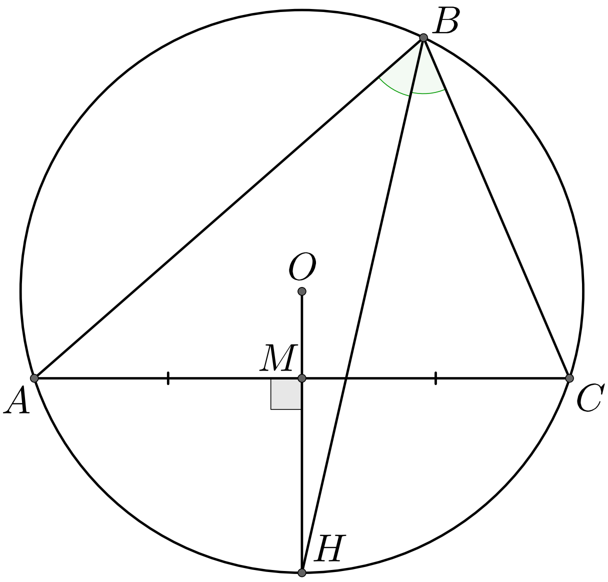
$$\angle A_1BA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha.$$

Треугольник AA_1B – прямоугольный, значит

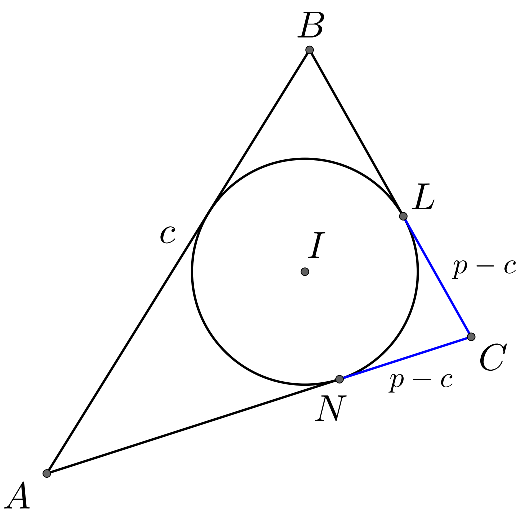
$$\cos(\angle A_1BA) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{A_1B}{AB},$$

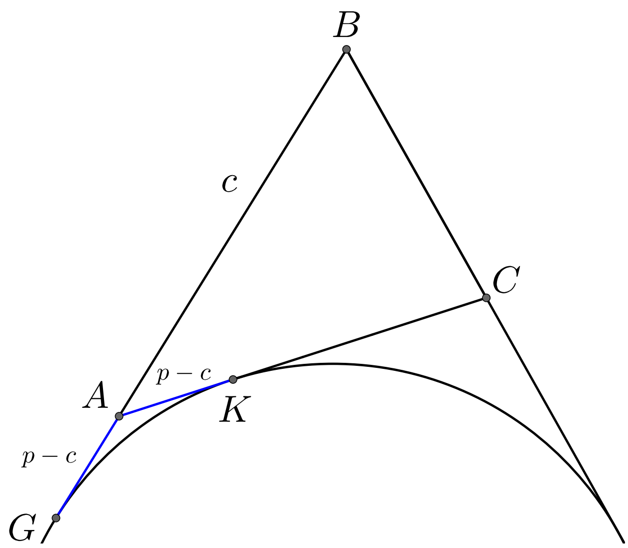
то есть $k = -\cos\alpha$ – коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC. □

15. Пусть BH – биссектриса угла ABC, причём точка H лежит на описанной окружности. Тогда дуги $\overset{\smile}{CH}$ и $\overset{\smile}{HA}$ равны. При этом серединный перпендикуляр к отрезку AC делит дугу $\overset{\smile}{CA}$ пополам, а значит, он пересекает окружность в точке H. $\square$

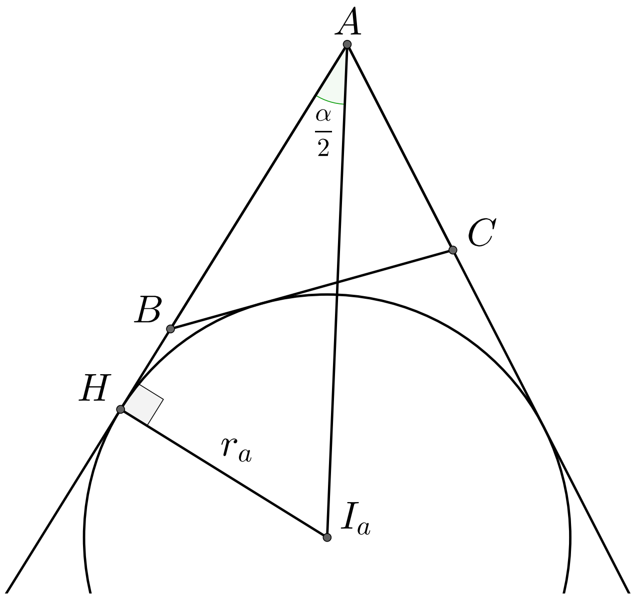


16. Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке L. Тогда мы знаем, что $NC = LC = p - c$, где p – полупериметр треугольника ABC и $c = AB$.
Далее, пусть вневписанная окружность касается продолжения стороны AB в точке G. Тогда мы знаем, что $AG = AK = p - c$. Тогда $AK = NC$. Если M – середина отрезка KN, то получаем, что $AM = AK + KM = MN + NC = MC$, значит M – середина стороны AC. $\square$

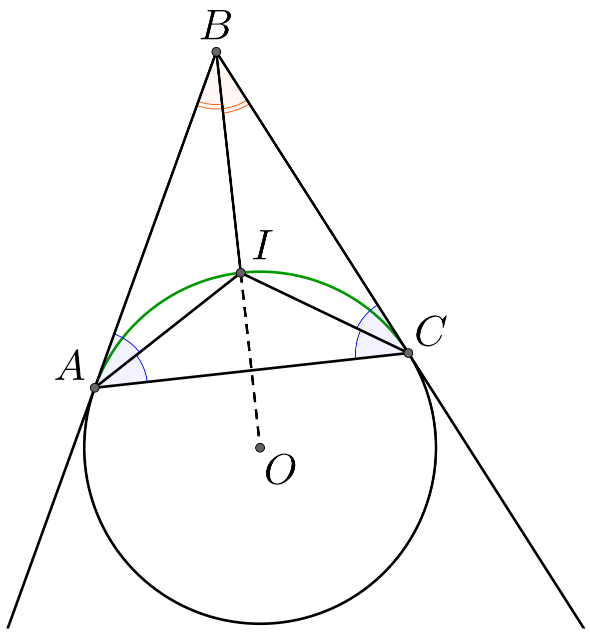




17. Центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, лежит на биссектрисе угла BAC. Пусть H – точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AB, значит $\angle HAI_a = \dfrac{\alpha}{2}$. Получаем, что AHI_a – прямоугольный треугольник, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{I_aH}{AH}$.
Пусть p – полупериметр треугольника ABC, r_a – радиус вневписанной окружности, $c = AB$. Имеем, что $AH = p$. Получаем, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_a}{p}$ или $r_a = p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. $\square$



18. Пусть I – середина дуги $\smile{AC}$, тогда $\angle IAC = \angle ICA$. При этом, по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle ICA = \angle BAI = \angle IAC$. Аналогично получаем, что $\angle BCI = \angle ACI$. Таким образом, I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, значит I – центр вписанной в ABC окружности. $\square$

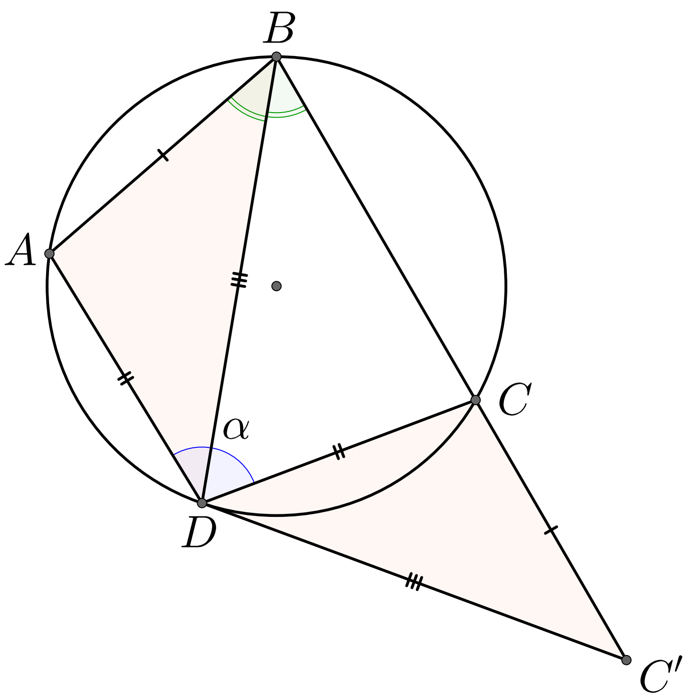


19. Углы ABD и DBC равны, поэтому $\smile{DA}=\smile{DC}$, значит $AD = DC$, так как равные дуги стягивают равные хорды.
$ABCD$ – вписанный четырёхугольник, поэтому $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$. Продлим сторону BC за точку C до точки C' так, что $CC' = AB$. Углы BCD и $C'CD$ – смежные, поэтому $\angle C'CD = 180^\circ - \angle BCD = \angle BAD$. Получаем, что треугольники BAD и $C'CD$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит,

$$\angle CDC' = \angle ADB,\ \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle CDC' + \angle BDC = \angle BDC' = \alpha.$$

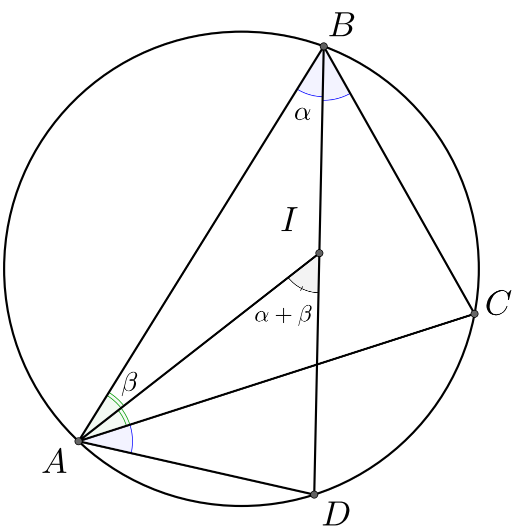
Имеем

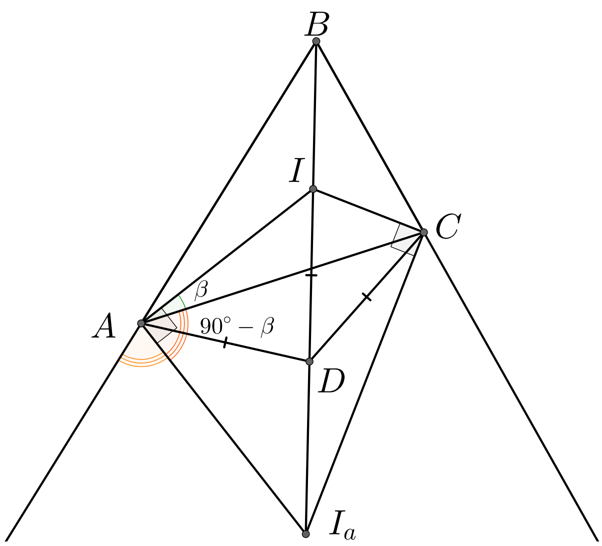
$$S_{ABCD} = S_{BAD} + S_{BDC} = S_{CC'D} + S_{BDC} = S_{BDC'} = \frac{1}{2}BD^2 \sin\alpha. \quad \square$$



20. BD – биссектриса угла ABC ($\angle ABD = \angle CBD = \alpha$), поэтому дуги $\smile DA$ и $\smile CD$ равны, а значит, равны и хорды, которые на них опираются: $AD = DC$. I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, значит $\angle BAI = \angle IAC = \beta$.

Внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним внутренних углов, значит, $\angle AID = \alpha + \beta$. Углы CAD и DBC опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CAD = \angle DBC$, а значит, $\angle IAD = \alpha + \beta$, то есть треугольник IAD – равнобедренный и $AD = ID$.





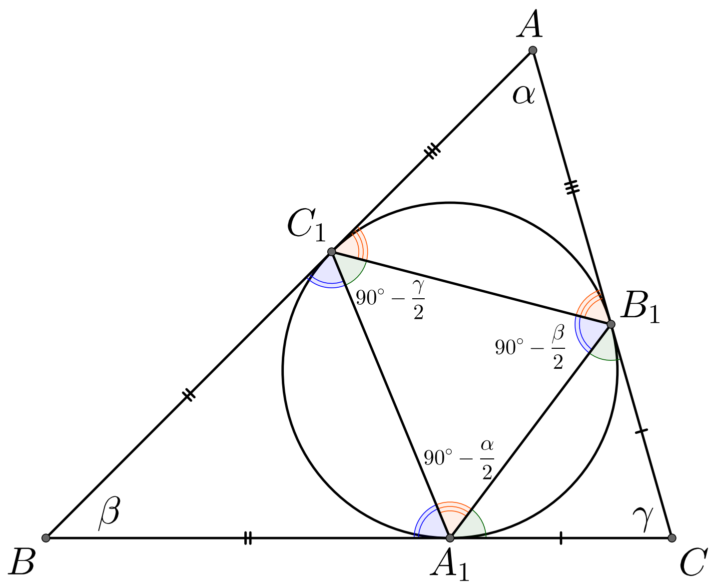
AI_a – биссектриса угла, смежного углу BAC, значит $\angle CAI_a = 90° - \beta$, при этом $\angle IAC = \beta$, значит $\angle IAI_a = 90°$. По тем же причинам $\angle ICI_a = 90°$. Получаем, что сумма противоположных углов четырёхугольника IAI_aC равна $180°$, а значит, вокруг него можно описать окружность, причём II_a – диаметр этой окружности. Мы уже установили, что $AD = DC = ID$, значит D – центр описанной вокруг четырёхугольника IAI_aC окружности, то есть I_aD – радиус этой окружности, поэтому $I_aD = ID$. $\square$

21. Касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны. Значит, $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$, то есть треугольники AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 являются равнобедренными. Имеем:

$$\angle AC_1B_1 = 90° - \frac{\alpha}{2},\quad \angle BA_1C_1 = 90° - \frac{\beta}{2},\quad \angle CA_1B_1 = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

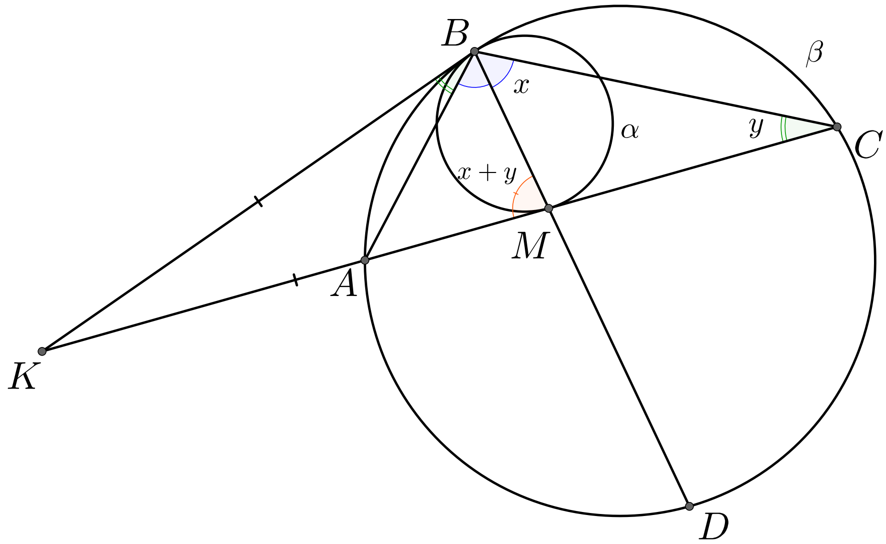
Тогда по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что в треугольнике $A_1B_1C_1$

$$\angle A_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \angle B_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \angle C_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}. \quad \square$$

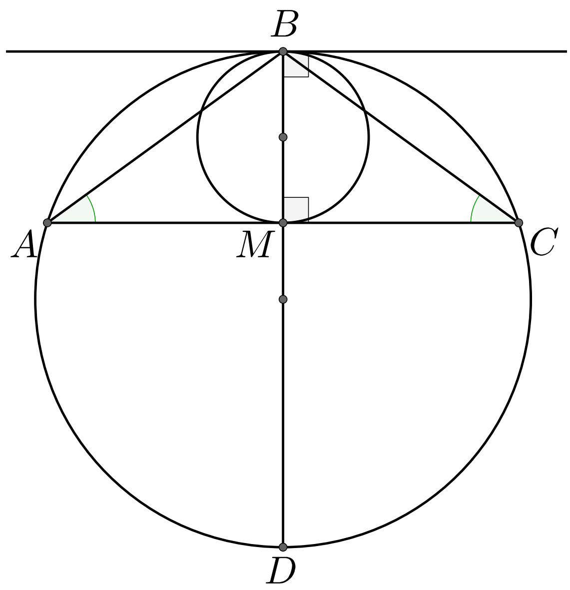


22. Проведём общую касательную к окружностям в точке B. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Касательная не параллельна отрезку AC. Пусть K – точка пересечения касательной с прямой AC. Без ограничения общности считаем, что $AK < CK$. Пусть $\angle DBC = x$, $\angle BCA = y$. Угол AMB является внешним углом треугольника BCM, значит $\angle AMB = x + y$. По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle KBA = y$. KM и KB – касательные, проведённые из одной точки к окружности α, значит $KM = KB$, то есть треугольник BKM – равнобедренный, значит $\angle KBM = \angle KMB = x + y$, значит $ABD = x$, то есть BD – биссектриса угла ABC и делит дугу $\overset{\smile}{CA}$ пополам. $\square$



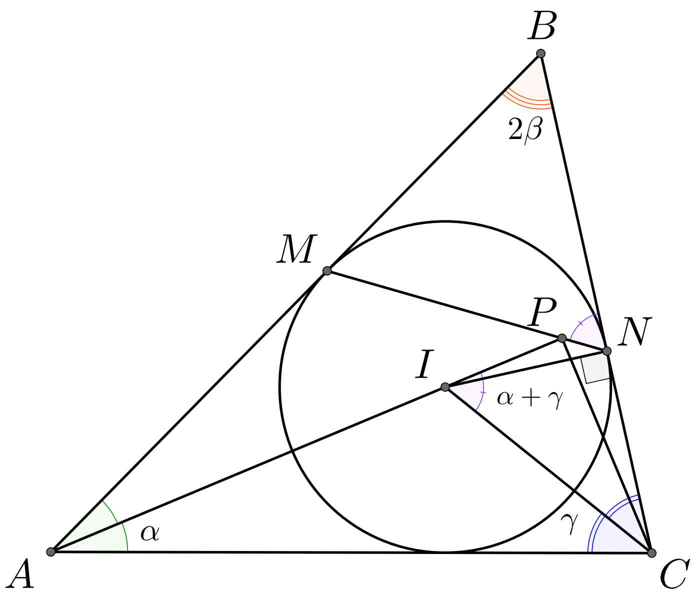
Случай 2: Касательная параллельна отрезку AC. В этом случае дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{BC}$ равны, то есть треугольник ABC – равнобедренный. Отрезок BM перпендикулярен касательной, значит, BM перпендикулярен AC, значит, BM – высота треугольника. Так как ABC – равнобедренный, то BM – биссектриса угла ABC. $\square$



23. Пусть I – центр вписанной окружности. IN – радиус вписанной окружности, значит, $\angle INC = 90°$. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Угол PIC является внешним углом треугольника AIC, значит, $\angle PIC = \alpha + \gamma$. Мы знаем, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ или $\alpha + \gamma = 90° - \beta$. BM и BN – касательные к окружности, поэтому $BM = BN$, значит, MBN – равнобедренный треугольник, поэтому

$$\angle BMN = \angle BNM = 90° - \beta = \alpha + \gamma,$$

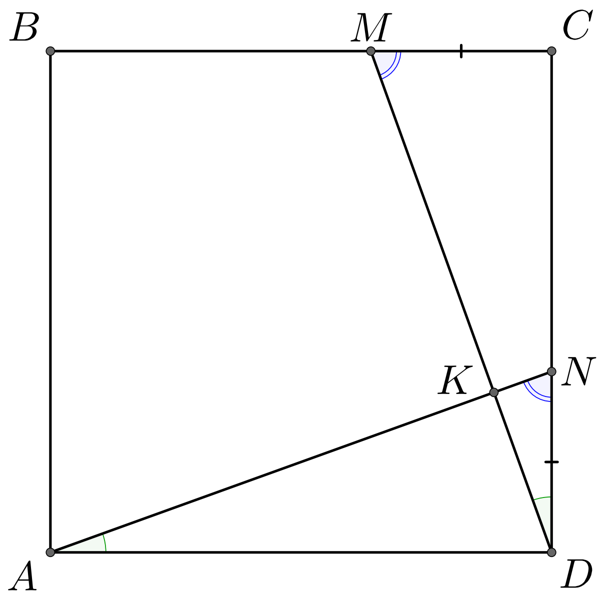
то есть вокруг четырёхугольника $PNCI$ можно описать окружность. Углы INC и IPC опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle IPC = \angle INC = 90°$. □



24. Прямоугольные треугольники ADN и CMD равны, так как $AD = CD$ и $ND = MC$, значит, $\angle NAD = \angle MDC$ и $\angle AND = \angle DMC$. Имеем:

$$\angle MDC + \angle AND = \angle MDC + \angle DMC = 90^\circ,$$

значит, $\angle DKN = 90^\circ$. $\square$



25. По теореме Пифагора получаем:

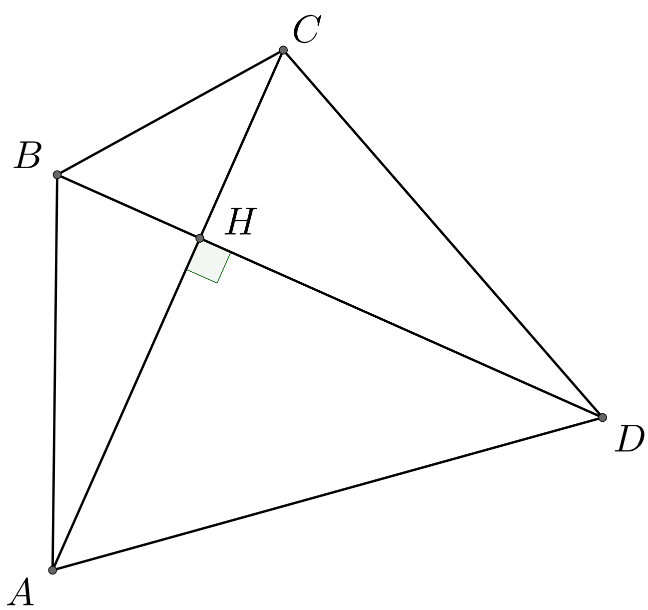
$$AH^2 + HB^2 = AB^2; \;\; HD^2 + HC^2 = CD^2;$$

$$AH^2 + HD^2 = AD^2; \;\; HC^2 + HB^2 = BC^2$$

Вычтем из суммы первых двух равенств два других:

$$AH^2 + HB^2 + HD^2 + HC^2 - (AH^2 + HD^2 + HC^2 + HB^2) = AB^2 + CD^2 - (AD^2 + BC^2) \implies$$

$$\implies AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$



Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\angle AHD = \angle BHD = \alpha$ (без ограничения общности можем считать, что $\alpha \leq 90^\circ$), тогда $\angle AHD = \angle CHD = 180^\circ - \alpha$. Нам известно, что $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, тогда по теореме косинусов для треугольников AHD, BHD, AHB и DHC получаем, что

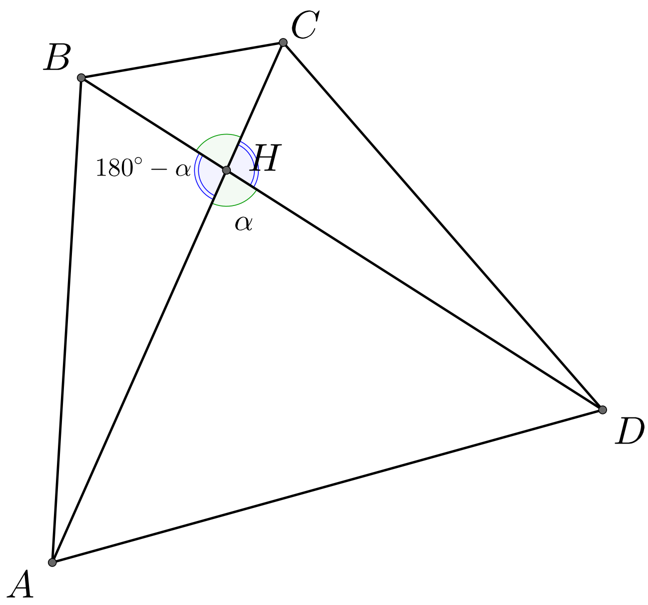
$$AD^2 = AH^2 + DH^2 - 2AH \cdot HD \cdot \cos\alpha; \quad BC^2 = BH^2 + CH^2 - 2BH \cdot CH \cdot \cos\alpha;$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 + 2AH \cdot BH \cdot \cos\alpha; \quad CD^2 = CH^2 + DH^2 + 2CH \cdot DH \cdot \cos\alpha.$$

Так как $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, то

$$(2AH \cdot BH + 2CH \cdot DH) \cdot \cos\alpha = -(2AH \cdot HD + 2BH \cdot CH) \cdot \cos\alpha.$$

Если $\alpha \neq 90^\circ$, то левая часть равенства положительна, а правая отрицательна, значит $\alpha = 90^\circ$. $\square$



26. Проведём через точку O перпендикулярные прямые A_1C_1 и B_1D_1 параллельно сторонам прямоугольника. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ имеет перпендикулярные диагонали, поэтому

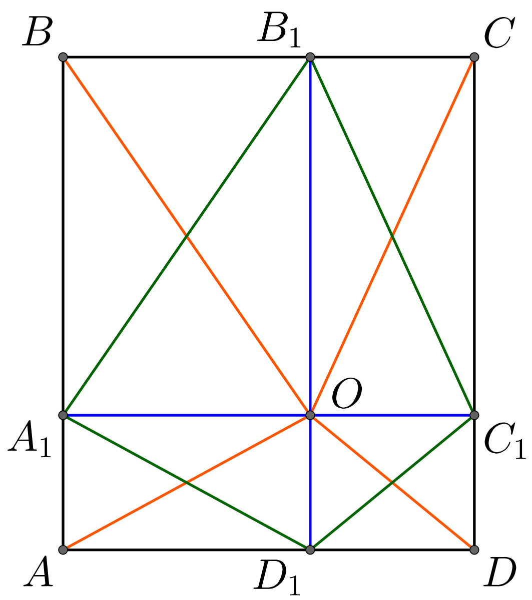
$$A_1B_1^2 + C_1D_1^2 = A_1D_1^2 + B_1C_1^2.$$

$A_1B_1 = BO$, так как это диагонали в прямоугольнике A_1BB_1O. По тем же причинам

$$D_1C_1 = DO, \quad B_1C_1 = CO, \quad A_1D_1 = AO.$$

Отсюда и получаем

$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2. \quad \square$$

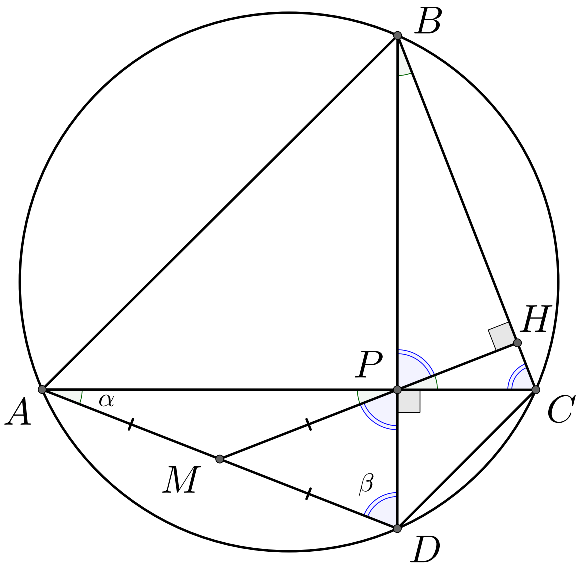


27. Пусть $\angle DAP = \alpha$, $\angle ADP = \beta$. APD – прямоугольный треугольник, поэтому $AM = MD = MP$, значит, $\angle DPM = \beta$. Вертикальные углы равны, поэтому $\angle BPH = \beta$. Углы DAC и DBC равны, так как они опираются на одну и ту же дугу, то есть $\angle DBC = \alpha$. Получаем:

$$\angle DBC + \angle BPH = \alpha + \beta = 90^\circ,$$

значит

$$\angle BHP = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ. \quad \square$$

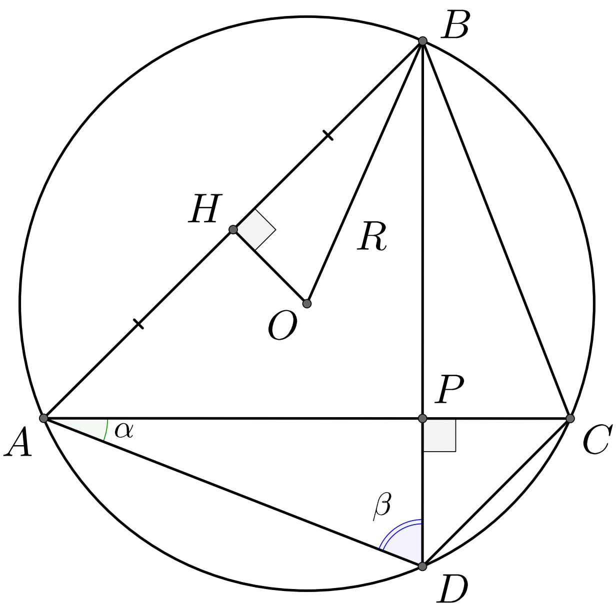


28. Пусть $\angle DAP = \alpha$ и $\angle ADP = \beta$, причём $\alpha + \beta = 90^\circ$, так как треугольник APD – прямоугольный. Значит, $\sin\beta = \cos\alpha$. Треугольник AOB является равнобедренным, поэтому высота OH, также является медианой, значит, $AB = 2BH$. По теореме синусов для треугольника ABD получаем, что

$$\frac{AB}{\sin\beta} = 2R \iff BH = R\sin\beta = R\cos\alpha.$$

По теореме синусов для треугольника DAC получаем, что

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = 2R \iff CD = 2R\sin\alpha.$$



Треугольник OBH является прямоугольным, значит по теореме Пифагора имеем:

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \iff OH^2 = R^2 - R^2\cos^2\alpha = R^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) = R^2 \cdot \sin^2\alpha.$$

Значит $OH = R\sin\alpha$ и $CD = 2R\sin\alpha$, то есть $CD = 2OH$. $\square$

29. Треугольники ABP и APD являются прямоугольными. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, $\angle ABD = \alpha_1$ и $\angle BAC = \beta_1$. Причём $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$, поэтому $\sin\beta = \cos\alpha$ и $\sin\beta_1 = \cos\alpha_1$.

По теореме синусов для треугольника ABD получаем, что

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha_1} = 2R.$$

Значит,

$$AB = 2R\sin\beta = 2R\cos\alpha \ \text{ и } \ AD = 2R\sin\alpha_1.$$

Далее, по теореме синусов для треугольника ACD получаем, что

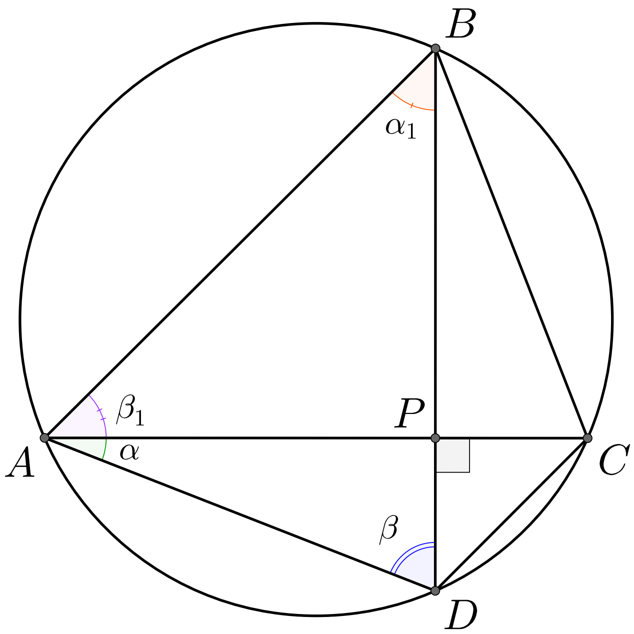
$$\frac{CD}{\sin\alpha} = 2R \implies CD = 2R\sin\alpha.$$

Аналогично для треугольника ABC имеем:

$$\frac{BC}{\sin\beta_1} = 2R \implies BC = 2R\cos\alpha_1.$$

Получаем

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\cos^2\alpha_1 + 4R^2\sin^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha_1 =$$
$$= 4R^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 4R^2(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1) = 8R^2. \quad \square$$



30. Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, то получаем, что

$$AA_1 = A_1L = LM_2 = \frac{m_a}{3},\ BB_1 = B_1L = LM_3 = \frac{m_b}{3} \ \text{ и } \ CC_1 = C_1L = LM_1 = \frac{m_c}{3}.$$

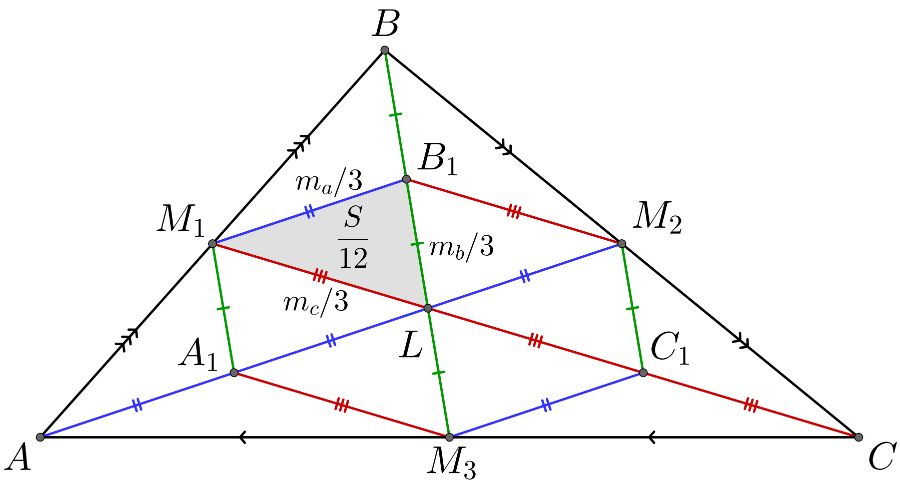
Рассмотрим треугольник ALC. Мы знаем, что A_1, M_3 и C_1 – середины сторон AL, AC и LC соответственно. Отсюда получаем, что A_1M_3 и C_1M_3 – средние линии данного треугольника, значит,

$$A_1M_3 = \frac{LC}{2} = \frac{m_c}{3} \ \text{ и } \ C_1M_3 = \frac{AL}{2} = \frac{m_a}{3}.$$

Аналогично, рассматривая треугольники BLC и ALB получаем, что

$$B_1M_2 = \frac{m_c}{3},\ C_1M_2 = \frac{m_b}{3},\ A_1M_1 = \frac{m_b}{3} \ \text{ и } \ B_1M_1 = \frac{m_a}{3}.$$

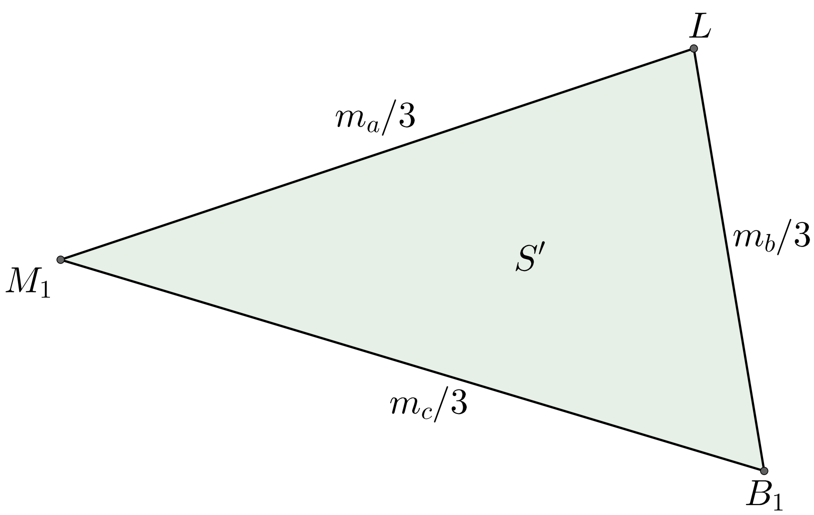
Таким образом получаем, что треугольники M_1B_1L, M_1A_1L, M_2B_1L, M_2C_1L, M_3A_1L и M_3C_1L равны, а значит, равны их площади. Пусть площади этих треугольников равны $\frac{S}{12}$.



Далее, рассмотрим треугольник M_1LB. M_1B_1 – медиана данного треугольника, значит, $S_{M_1B_1L} = S_{M_1B_1B} = \frac{S}{12}$. Аналогично, рассматривая треугольники M_1AL, M_2BL, M_2CL, M_3AL и M_3CL, получим, что $S_{M_1A_1A} = S_{M_2B_1B} = S_{M_2C_1C} = S_{M_3A_1A} = S_{M_3C_1C} = \frac{S}{12}$. $\square$

31. Рассмотрим треугольник M_1LB_1. Его стороны равны $\frac{m_a}{3}$, $\frac{m_b}{3}$ и $\frac{m_c}{3}$, значит, он подобен треугольнику, длины сторон которого равны длинам медиан ABC, с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. То есть $S_{M_1LB_1} = \frac{S'}{9}$, при этом $S_{M_1LB_1} = \frac{S}{12}$, значит $\frac{S}{12} = \frac{S'}{9}$, то есть

$$S = \frac{4S'}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}. \quad \square$$



32. На лучах AB, AC и AD отметим точки B_1, C_1 и D_1 соответственно, такие, что

$$AB_1 = \frac{1}{AB}, \quad AC_1 = \frac{1}{AC} \quad \text{и} \quad AD_1 = \frac{1}{AD}.$$

Тогда

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{AB \cdot AC} = \frac{AC_1}{AB},$$

значит, треугольники AB_1C_1 и ACB подобны. Аналогично получаем, что подобны треугольники AD_1C_1 и ACD. Отсюда получаем, что

$$\angle B_1C_1A = \angle ABC \quad \text{и} \quad \angle AC_1D_1 = \angle ADC.$$

Имеем:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} \iff B_1C_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC}$$
$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AC} \iff C_1D_1 = \frac{CD}{AD \cdot AC}.$$

Мы знаем, что

$$\frac{AB_1}{AD} = \frac{1}{AB \cdot AD} = \frac{AD_1}{AB},$$

значит треугольники AB_1D_1 и ABD подобны. Следовательно

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AB_1}{AD}, \iff B_1D_1 = \frac{BD}{AD \cdot AB}.$$

По неравенству треугольника получаем, что $B_1C_1 + C_1D_1 \geq B_1D_1$, значит

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AD \cdot AC} \geq \frac{BD}{AD \cdot AB},$$

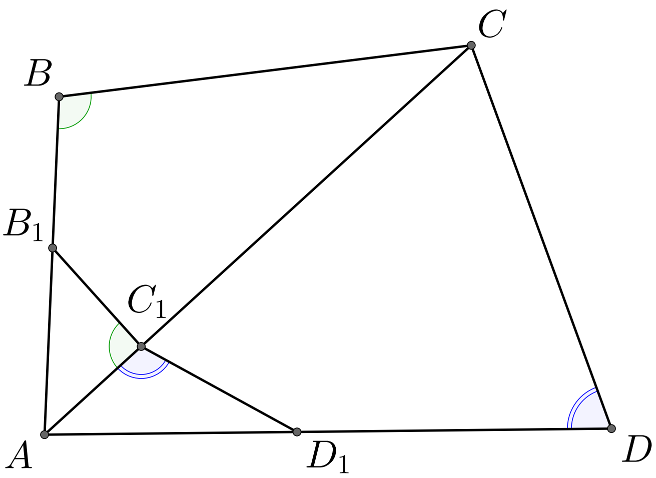
следовательно,

$$AD \cdot BC + CD \cdot AB \geq AC \cdot BD.$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда точки B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой. Значит $\angle B_1C_1A + \angle AC_1D_1 = 180°$. Тогда

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle B_1C_1A + \angle AC_1D_1 = 180°,$$

значит вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.



Обратно, если вокруг четырёхугольника можно описать окружность, то

$$\angle ABC + \angle ADC = 180°.$$

При этом мы уже установили, что

$$\angle B_1C_1A = \angle ABC \text{ и } \angle AC_1D_1 = \angle ADC,$$

то есть

$$\angle B_1C_1A + \angle AC_1D_1 = 180°.$$

Значит точки B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой, то есть $B_1C_1 + C_1D_1 = B_1D_1$, значит

$$AD \cdot BC + CD \cdot AB = AC \cdot BD. \quad \square$$

33. Площадь четырёхугольника $ABCD$ можно найти по формуле

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между диагоналями четырёхугольника. Если диагонали $ABCD$ перпендикулярны, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Если вокруг $ABCD$ можно описать окружность, то по теореме Птолемея получаем, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Если диагонали четырёхугольника не перпендикулярны, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha < \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

По неравенству Птолемея имеем

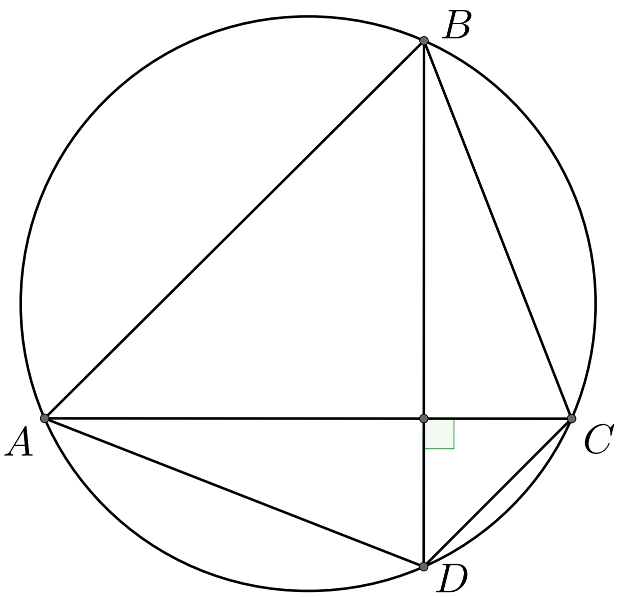
$$\frac{1}{2}AC \cdot BD \leq \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

То есть

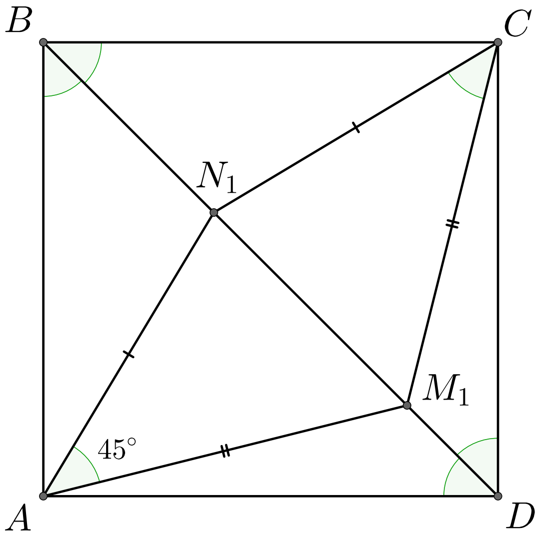
$$S_{ABCD} < \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

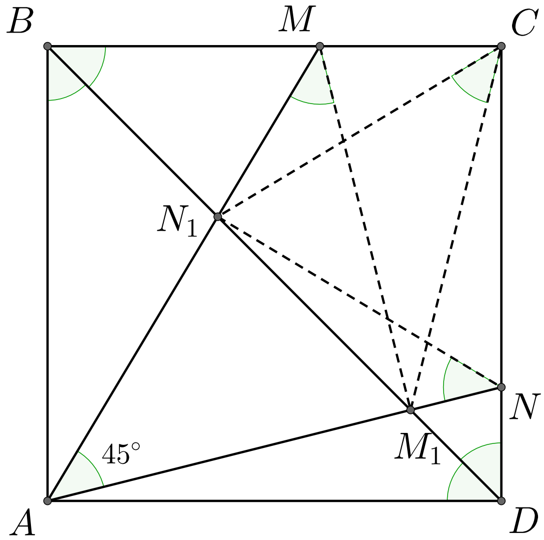
Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, но вокруг него нельзя описать окружность, то по неравенству Птолемея получаем, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD < \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC). \quad \square$$



34. Для начала покажем, что $\angle N_1CM_1 = 45°$. Действительно, BD – диагональ квадрата, поэтому $\angle ADM_1 = \angle CDM_1 = 45°$. $AD = CD$ и сторона M_1D является общей для треугольников AM_1D и CM_1D, значит они равны по двум сторонами и углу между ними, поэтому $CM_1 = AM_1$. Аналогично доказывается, что $AN_1 = CN_1$. Получаем, что в треугольниках CN_1M_1 и AN_1M_1 равны три стороны (N_1M_1 – общая), значит эти треугольники равны и значит $\angle N_1CM_1 = \angle N_1AM_1 = 45°$.





Далее, имеем, что $\angle N_1DN = \angle N_1AM_1 = 45°$, значит вокруг четырёхугольника $ADNN_1$ можно описать окружность. Получаем, что $\angle N_1NA = \angle N_1DA = 45°$.
Аналогично, получаем, что вокруг четырёхугольника $ABMM_1$ можно описать окружность и поэтому $\angle AMM_1 = \angle ABM_1 = 45°$.
Так как углы N_1MM_1, N_1CM_1 и N_1NM_1 опираются на отрезок M_1N_1 и равны $45°$, то вокруг пятиугольника N_1MCNM_1 можно описать окружность. □

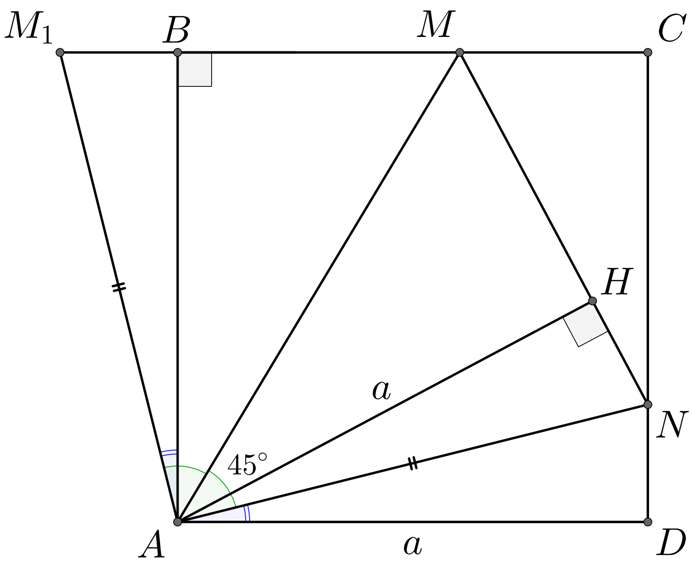
35. Построим треугольник ABM_1, где точка M_1 лежит на продолжении стороны CB за точку B, причём $M_1B = ND$. Также $AD = AB$, значит прямоугольные треугольники ADN и ABM_1 равны, то есть $AN = AM_1$. Также

$$\angle NAD = \angle M_1AB,\ \angle BAM + \angle MAN + \angle NAD = \angle BAM + 45° + \angle M_1AB = 90°,$$

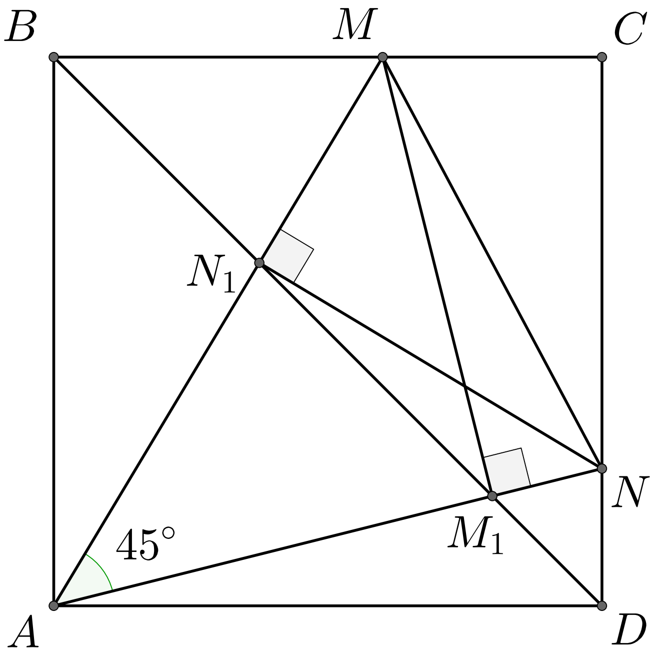
значит

$$\angle BAM + \angle M_1AB = \angle M_1AM = 45°.$$

Получаем, что треугольники M_1AM и NAM равны по двум сторонам и углу между ними. AB – высота треугольника M_1AM, значит $AB = AH$. □



36. Вокруг пятиугольника N_1MCNM_1 можно описать окружность. $\angle MCN = 90°$, значит MN – диаметр окружности. То есть углы MN_1N и NM_1M опираются на диаметр окружности, поэтому $\angle MN_1N = \angle NM_1M = 90°$. □



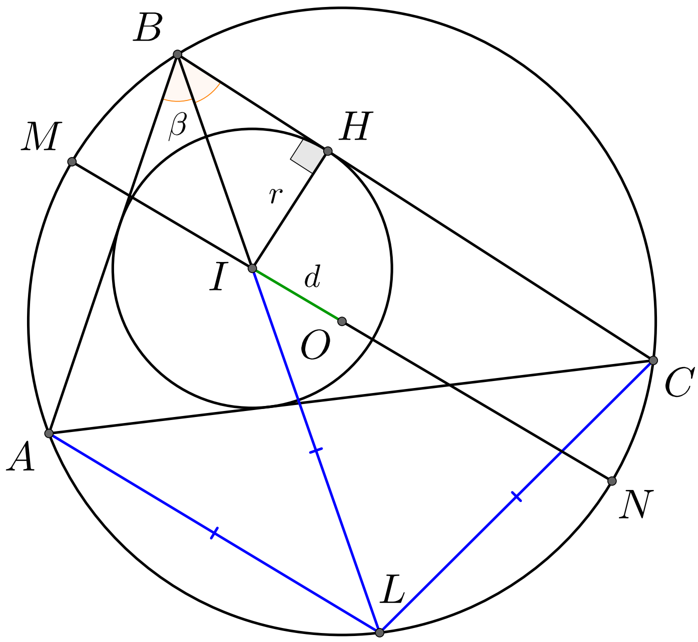
37. Проведём диаметр MN описанной окружности, проходящей через центр вписанной окружности. Тогда

$$MI = MO - OI = R - d, \quad IN = IO + ON = R + d.$$

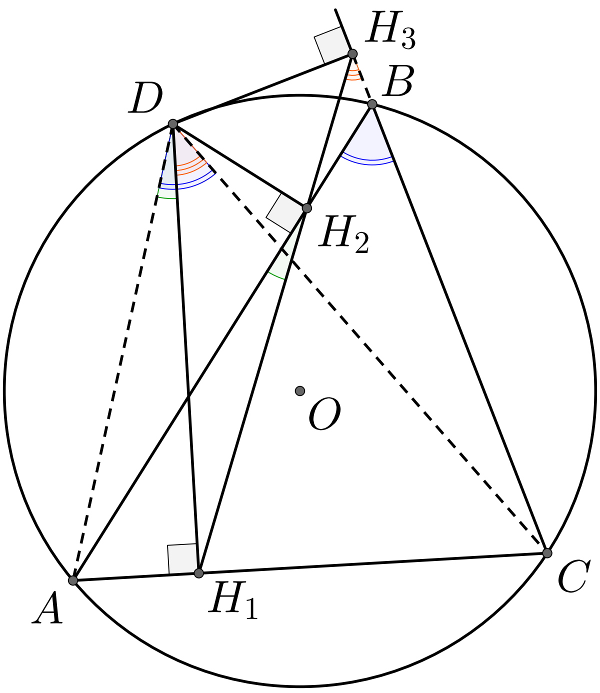
Пусть биссектриса угла ABC пересекает окружность в точке L, причём BL проходит через точку I. Пусть IH – радиус вписанной окружности, проведённый к стороне BC. Треугольник IHB – прямоугольный ($\angle IBH = \beta$), тогда $BI = \dfrac{r}{\sin\beta}$. Далее, по лемме о трезубце получаем, что $AL = IL = LC$. По теореме синусов для треугольника BLC получаем, что $\dfrac{LC}{\sin\beta} = 2R$, значит $LC = IL = 2R\sin\beta$.
Хорды BL и MN описанной окружности пересекаются в точке I, поэтому $MI \cdot IN = BI \cdot IL$, следовательно,

$$(R-d)\cdot(R+d) = R^2 - d^2 = \frac{r}{\sin\beta}\cdot 2R\sin\beta = 2Rr,$$

значит, $d^2 = R^2 - 2Rr$. $\square$



38. Докажем, что углы AH_2H_1 и H_3H_2B – вертикальные. $\angle AH_1D = \angle AH_2D = 90°$, поэтому вокруг четырёхугольника AH_1H_2D можно описать окружность, значит, $\angle ADH_1 = \angle AH_2H_1$. Аналогично, мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника H_1DH_3C, поэтому $\angle H_1DC = \angle H_1H_3C$.

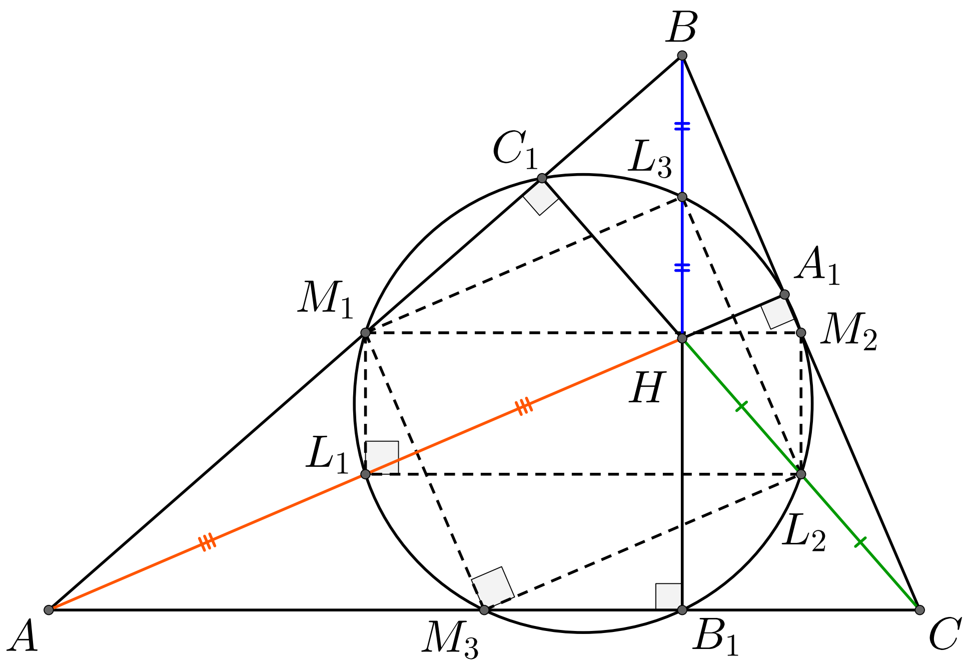


Вокруг четырёхугольника $ADBC$ описана окружность, значит $\angle ADC = \angle ABC$. Угол ABC является внешним для треугольника H_2H_3B, поэтому

$$\angle H_3H_2B = \angle ABC - \angle H_2H_3B = \angle ADC - \angle H_1DC = \angle ADH_1 = \angle AH_2H_1,$$

то есть углы AH_2H_1 и H_3H_2B равны, значит, точки H_1, H_2 и H_3 лежат на одной прямой. $\square$

39. Отрезок M_1M_2 является средней линией треугольника ABC, значит, он параллелен AC и равен его половине. Отрезок L_1L_2 является средней линией треугольника AHC, значит, он параллелен AC и равен его половине. Таким образом, отрезки M_1M_2 и L_1L_2 параллельны и равны. Отрезки L_1M_1 и L_2M_2 являются средними линиями треугольников ABH и CBH, значит, эти отрезки параллельны отрезку BH и равны его половине. То есть, $M_1M_2L_2L_1$ – параллелограмм, причём отрезки AC и BB_1 перпендикулярны, значит, $M_1M_2L_2L_1$ – прямоугольник, поэтому вокруг него можно описать окружность α с диаметром M_1L_2.
Отрезок M_1M_3 является средней линией треугольника ABC, значит, он параллелен BC и равен его половине. Отрезок L_2L_3 является средней линией треугольника BHC, значит, он параллелен BC и равен его половине. Таким образом, отрезки M_1M_3 и L_2L_3 параллельны и равны. Отрезки M_3L_2 и M_1L_3 являются средними линиями треугольников AHC и AHB, значит, они параллельны отрезку AH и равны его половине. Таким образом, $M_1M_3L_2L_3$ – параллелограмм, причём отрезки BC и AA_1 перпендикулярны, значит, $M_1M_3L_2L_3$ – прямоугольник, поэтому вокруг него можно описать окружность с диаметром M_1L_2. Так как вершины M_1 и L_2 являются общими для прямоугольников $M_1M_2L_2L_1$ и $M_1M_3L_2L_3$, значит, точки M_1, M_2, M_3, L_1, L_2 и L_3 лежат на одной окружности α.
Хорды M_1L_2, M_2L_1 и M_3L_3 опираются на прямые углы, значит они являются диаметрами. Мы знаем, что $\angle M_3B_1L_3 = \angle L_1A_1M_2 = \angle L_2C_1M_1 = 90°$, значит точки A_1, B_1 и C_1 лежат на окружности α. $\square$



40. Пусть M' – точка пересечения отрезков OH и BM_1, M_1 – середина отрезка AC, BB_1 – высота треугольника. Рассмотрим треугольники HBM' и OM_1M'. Углы $HM'B$ и $M_1M'O$ являются вертикальными, поэтому равны. Отрезки BB_1 и OM_1 перпендикулярны отрезку AC, поэтому они параллельны, значит, $\angle HBM' = \angle OM_1M'$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Следовательно, треугольники HBM' и OM_1M' подобны по двум углам. Мы знаем, что $BH = 2OM_1$, значит, $BM' = 2M'M_1$, точка пересечения медиан треугольника делит медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины, значит $M = M'$. Помимо этого из подобия треугольников HBM и OM_1M следует, что $HM = 2OM$. $\square$